Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas[1]

Vicenç Font
Universitat de Barcelona

Resumen

En este trabajo se presentan unas breves consideraciones de cómo ve el autor algunas de las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas. Algunas de dichas tendencias son específicas de la enseñanza de las matemáticas, mientras que otras son aplicables también a la enseñanza de otras materias.

El texto está estructurado de la siguiente manera: En el capítulo 1 se presenta una tarea de un libro de texto que será utilizada como contexto de reflexión. En el capítulo 2 se reflexiona sobre cuáles son las tendencias en la incorporación de los nuevos contenidos matemáticos. En el capítulo 3 se reflexiona sobre la tendencia actual a la presentación de matemáticas contextualizadas. En el capítulo 4, la reflexión versa sobre la importancia que se da actualmente a la enseñanza de los procesos matemáticos, mientras que en el capítulo siguiente se comenta la tendencia, de tipo metodológico, hacia una enseñanza-aprendizaje de tipo constructivista. En el capítulo 6 la reflexión es sobre la tendencia a la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs), mientras que en el siguiente se reflexiona sobre la superación de una cierta "ingenuidad" sobre la incorporación de dichas tecnologías a los procesos de instrucción. En el capítulo 8, la reflexión es sobre la tendencia a considerar que Saber matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extra-matemáticos. En el capítulo 9 se reflexiona sobre la tendencia

[1] Texto de la conferencia inaugural del III Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Lima. Febrero del 2008.

a aceptar el principio de Equidad en la Educación Matemática Obligatoria. En el capítulo 10 la reflexión versa sobre las tendencias en la formación inicial de profesores de matemáticas de los niveles no universitarios. Por último, en el capítulo 11 se finaliza con una reflexión sobre una posible agenda de investigación sobre algunas de las tendencias comentadas anteriormente.

1. Los diagramas de Voronoi como contexto de reflexión

Como contexto de reflexión utilizaremos la siguiente tarea del libro *Geometry with applications and proofs* (Goddijn, A., Kindt, M & Reuter, W., 2004, p. I-5) publicado por el Instituto Freudenthal.

1. *En el desierto*.

En la figura de abajo, se muestra parte de un mapa de un desierto. Hay cinco pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas esta mapa contigo.

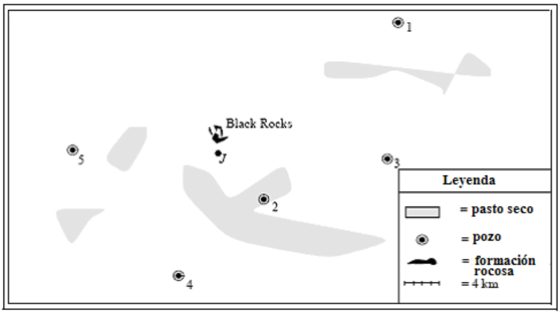

Figura 1. Mapa del desierto

a. *¿A cuál de los pozos irías a tomar agua*?

No es difícil responder, por supuesto irías al pozo más cercano.

b. *Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro*.

c. *Ahora, esboza una división del desierto en cinco partes; cada parte corresponde a uno de los pozos. Cada parte es el dominio alrededor de un pozo particular. Cualquier lugar en este dominio debe estar más cerca de este pozo que de los otros pozos*.

d. *¿Qué es lo que puedes hacer cuando estás exactamente sobre la frontera de dos diferentes dominios*?

e. *¿Los dominios de los pozos 1 y 5 son contiguos? 0*: *trata de encontrar un punto el cual esté a la misma distancia de los pozos 1 y 5 pero a mayor distancia de los demás pozos*.

f. *En la realidad el desierto es mucho más grande de lo que es mostrado en este mapa. Si no hay otros pozos en todo el desierto que los cinco pozos mostrados, ¿los dominios de los pozos 3 y 4 están cerca (juntos)*?

g. *La frontera entre los dominios de los pozos 2 y 3 corta al segmento de recta entre los pozos 2 y 3 exactamente en la mitad. ¿Algo similar se aplica a otras fronteras*?

h. *¿Qué clase de líneas son las fronteras*? *¿Rectas o curvas*?

En este ejercicio se ha dividido un área de acuerdo al principio del vecino más próximo. Hoy en día, particiones similares son usadas en ciencias, por *ejemplo, en geología, forestal, control de comercialización, astronomía, robótica, lingüística, cristalografía, meteorología, por nombrar algunos. A continuación estudiaremos el simple caso de dos pozos, o realmente dos puntos, puesto que no trataremos con pozos en otras aplicaciones.*

2. Primera reflexión: ¿Cuál es la tendencia de los nuevos contenidos matemáticos?

El objetivo de los autores del libro *Geometry with applications and proofs* es que, como resultado de la tarea anterior y de las siguientes, los alumnos construyan el objeto matemático "Diagrama de Voronoi".

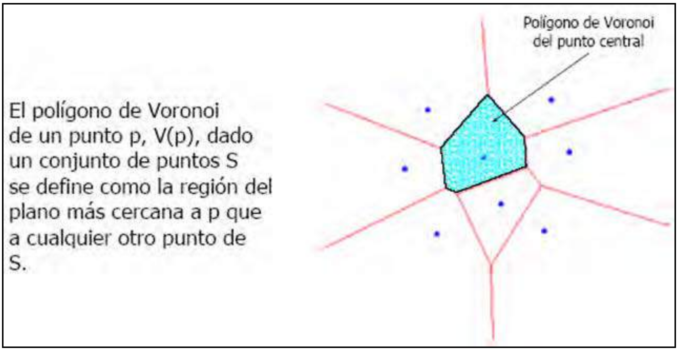

Figura 2. Polígono de Voronoi

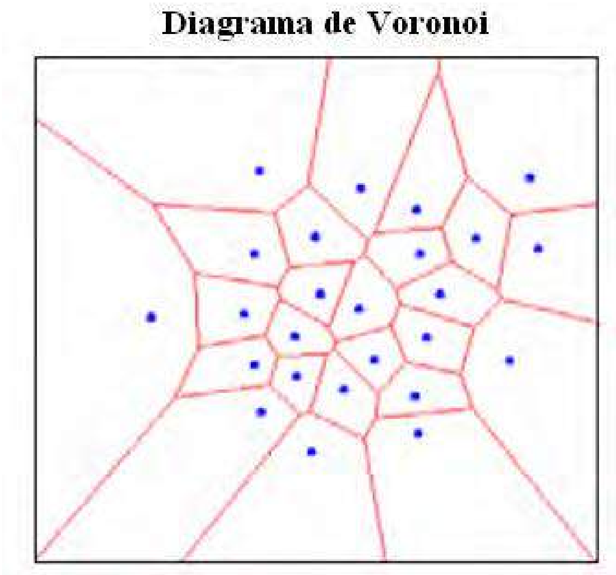

Figura 3. Diagrama de Voronoi

Los diagramas de Voronoi son contenidos correspondientes a la llamada Geometría Discreta. Los autores del libro que estamos comentando se propusieron como objetivo la introducción de contenidos de Matemática Discreta en el currículum de la enseñanza no universitaria.

Tal como se señala en Guzmán (2007), los algoritmos discretos usados en las ciencias de la computación y la modelización de diversos fenómenos mediante el ordenador, ha dado lugar a un traslado de énfasis en la matemática actual hacia la matemática discreta, lo cual ha tenido como consecuencia que se escuchen voces proponiendo su incorporación a los currículums de matemáticas. Incluso se considera que determinadas partes de la Matemática Discreta son lo suficientemente elementales como para poder formar parte con éxito de la enseñanza no universitaria. La combinatoria clásica, así como los aspectos modernos de ella, tales como la teoría de grafos o la geometría combinatoria, junto a la teoría elemental de números se consideran los candidatos más adecuados.

Otra tendencia observable es la de dar más importancia a los contenidos de Geometría. La necesidad de una recuperación de los contenidos geométricos en la enseñanza matemática es algo en lo que todos los interesados en la enseñanza de las matemáticas parecen coincidir, sin embargo, aún no hay acuerdo sobre cómo se debe llevar a cabo.

También se observa la tendencia al aumento de los contenidos de estadística y probabilidad. Esta es una tendencia en la que todos los sistemas educativos parecen concordar y efectivamente son muchos los países que incluyen en sus programas de enseñanza secundaria estas materias, pero en pocos de ellos esta enseñanza se lleva a cabo con la eficacia deseada. Las causas de esta deficiente enseñanza de la Estadística y la Probabilidad parecen ser, por una parte, la dificultad misma de las materias en cuestión y, por otra parte, una falta de preparación adecuada de los profesores que han de impartir estas materias.

3. Segunda reflexión: Tendencia a la presentación de matemáticas contextualizadas

La tarea del desierto que se presenta a los alumnos es una situación de tipo extra matemático cuya resolución permite la emergencia, entre otros, de un nuevo objeto matemático: la partición de un área de acuerdo al principio del vecino más próximo. Los autores pretenden presentar una situación de contexto extra matemático que sea entendida por el alumno como un caso particular de un objeto matemático. En este caso lo particular es extra matemático y lo general es un objeto matemático.

El libro que estamos comentado es un ejemplo de un tipo de libros que dan un papel preponderante a las situaciones problemas contextualizadas y están claramente enfocados a la emergencia de nuevos objetos matemáticos. Actualmente se observa una tendencia a la sustitución de las matemáticas formalistas por unas matemáticas más empíricas (contextualizadas, realistas, inductivas, etc.). Estas matemáticas empíricas (contextualizadas, realistas, intuitivas, etc.) presuponen una cierta concepción empírica de las matemáticas. Es decir, una concepción que considera que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que supone que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales.

¿Por qué hay esta tendencia a la introducción de matemáticas contextualizadas? Las razones que se pueden dar son muchas y muy variadas. Nos limitaremos a dar dos (Font, 2007). La primera tiene que ver con un interés de tipo teórico que va mucho más allá de la Didáctica de la Matemática, mientras que la segunda tiene que ver con las investigaciones realizadas en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas.

La primera razón está relacionada con la importancia que se le da al contexto en los intentos para relacionar lo que los psicólogos han aprendido sobre el modo en que los humanos razonan, sienten, recuerdan, imaginan y deciden con lo que, por su parte, han aprendido los antropólogos sobre la manera en que el significado es construido, aprendido, activado y transformado. En palabras del antropólogo Geertz, este intento de relación *"(...) supone el abandono de la idea de que el cerebro del Homo sapiens es capaz de funcionar autónomamente, que puede operar con efectividad, o que puede operar sin más, como un sistema conducido endógenamente y que funciona con independencia del contexto."* (Geertz, 2002, p. 194).

La segunda tiene que ver con el hecho de que la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha resaltado la importancia que se debe dar a la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a los contextos extra matemáticos de la vida real.

Para las situaciones extra matemáticas que contextualizan un objeto matemático se han propuesto diferentes nombres y clasificaciones. “Problemas contextualizados” (el nombre que vamos a utilizar en este trabajo), “problemas del mundo real” “problemas relacionados con el trabajo”, “problemas situados” son sólo algunos de los diferentes nombres que se da a las tareas escolares que simulan situaciones del mundo real.

La investigación sobre los problemas contextualizados extra matemáticos se ha realizado atendiendo a diferentes objetivos y metodologías (conocimiento situado, etnomatemáticas, teoría de la actividad, etc.). Por una parte, hay que destacar las investigaciones cuyo objetivo ha sido comprender mejor cómo las personas solucionan los problemas en su lugar de trabajo. Estas investigaciones, de tipo socio-cultural, no se han preocupado directamente por comparar la resolución de problemas en el lugar de trabajo con la resolución de problemas contextualizados en las instituciones escolares (Scribner, 1984 y 1986; Lave, 1988; Pozzi, Noss y Hoyles, 1998). En cambio, otras investigaciones se han interesado en comparar y contrastar el diferente uso que hacen las personas de las matemáticas en la escuela y en el trabajo (Reed y Lave, 1981; Nunes, Schliemann y Carraher, 1993; Jurdak y Shahin, 1999 y 2001; Jurdak, 2006, Díez 2004).

Estas investigaciones muestran, con ejemplos concretos, que hay una brecha importante entre las matemáticas que se explican en la escuela y las que las personas hacen servir en su vida cotidiana. Para Díez (2004) la existencia de esta brecha es uno de los motivos que explican las actitudes negativas que muchas personas desarrollan hacia las matemáticas (D’Amore y Fandiño Pinilla, 2001).

En general, los estudios citados anteriormente han puesto de manifiesto que las matemáticas informales e idiosincrásicas son las dominantes en la resolución de problemas en la vida cotidiana y en el mundo laboral, mientras que las matemáticas más formales son las que predominan en la escuela. Algunos de estos estudios han puesto de manifiesto que las personas que fracasan en situaciones matemáticas escolares, pueden ser extraordinariamente competentes en actividades de la vida diaria que implican el uso del mismo contenido matemático (Lave, 1988 y Scribner, 1984). En situaciones de la vida real en las que las personas se sienten implicadas se ha observado que éstas utilizan matemáticas "propias" que pueden ser muy diferentes a las que estudiaron en la escuela. En estas situaciones el problema y la solución se generan simultáneamente y la persona está implicada cognitiva, emocional y socialmente.

Estos fenómenos ponen de manifiesto que los conocimientos se construyen usándolos en contextos reales. En la vida diaria los problemas son concretos y sólo se pueden resolver si las personas los consideran como problemas a resolver. También plantean un problema teórico para la investigación en Didáctica de las Matemáticas: la transferencia del conocimiento usado o generado en un contexto a otro contexto diferente y más en concreto, el problema de la transferencia del conocimiento aprendido en la escuela a las situaciones prácticas de la vida cotidiana y viceversa (Civil, 1992; Evans, 1998; González, Andrade y Carson, 2001; Díez, 2004).

Las referencias citadas anteriormente no pretenden ser una revisión exhaustiva de la literatura sobre la contextualización. En este trabajo nos interesan, sobre todo, destacar algunas investigaciones, como por ejemplo, las que se han preocupado por la introducción de los problemas contextualizados en el currículum. Entre éstas destaca el proyecto desarrollado en el instituto Freudenthal "Realistic Mathematics Education" (Gravemeijer, 1994; De Lange, 1996). Este enfoque de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas concibe la actividad matemática como una actividad humana más, por lo cual se considera que "saber matemáticas" es "hacer matemáticas", lo cual comporta, entre otros aspectos, la resolución de problemas de la vida cotidiana. Uno de sus principios básicos afirma que para conseguir una actividad matemática significativa hay que partir de la experiencia real de los estudiantes (Freudenthal, 1983). Otros principios importantes son que hay que dar al estudiante la oportunidad de reinventar los conceptos matemáticos y que el proceso de enseñanza-aprendizaje debe ser muy interactivo. Según De Lange (1996), básicamente se dan cuatro razones para integrar los problemas contextualizados en el currículum: a) facilitan el aprendizaje de las matemáticas, b) desarrollan las competencias de los ciudadanos, c) desarrollan las competencias y actitudes generales asociadas a la resolución de problemas y d) permiten ver a los estudiantes la utilidad de las matemáticas para resolver tanto situaciones de otras áreas como situaciones de la vida cotidiana.

Para finalizar esta breve revisión, queremos destacar también las evaluaciones internacionales sobre la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas a situaciones de la vida cotidiana como el informe Pisa 2003 (OCDE, 2004).

4. Tercera reflexión: Tendencia a dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos

Una de las tendencias actuales es la importancia que se da a la enseñanza de los procesos de pensamiento propios de la matemática. Ya no se considera que la enseñanza sea una mera transferencia de contenidos. Actualmente se considera que las matemáticas son una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello, se concede una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos, en especial a los megaprocesos "Resolución de Problemas" y "Modelización".

La tarea del desierto que estamos considerando es la primera actividad de una secuencia de actividades que pretende enseñar el proceso de modelización. Normalmente se considera que el proceso de modelización sigue las cinco fases siguientes: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad.

El proceso de modelización o de matematización también se puede entender como el resultado de otros dos procesos: la matematización *horizontal* y la matematización *vertical* (Treffer, 1978; citado en Freudenthal, 1991). La *matematización horizontal*, lleva del mundo real al mundo de los símbolos y hace posible el tratar matemáticamente un conjunto de problemas. En este proceso se combinan, entre otros, los siguientes procesos: 1) *identificar* las matemáticas en situaciones problemas, 2) *esquematizar*, 3) *formular* y *visualizar* un problema de varias maneras. 4) *descubrir* relaciones y regularidades. 5) *reconocer* aspectos isomorfos en diferentes problemas. 6) *transferir* un problema real a un modelo matemático conocido.

La *matematización vertical*, consiste en el tratamiento específicamente matemático de las situaciones, y para ello son necesarios, entre otros, los siguientes procesos: 1) *representar* una relación mediante una fórmula, 2) *utilizar* diferentes modelos, 3) *refinar* y *ajustar* modelos, 4) *combinar* e *integrar* modelos, 5) *probar* regularidades, 6) *formular* un concepto matemático nuevo. 7) *generalizar*, etc.

En estos momentos se puede decir que la comunidad que se dedica a la educación matemática es consciente que los procesos matemáticos son densos en la actividad matemática y que el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene que tenerlos en cuenta. Basta fijarse en la tarea del desierto para observar la cantidad de procesos que son activados en su resolución.

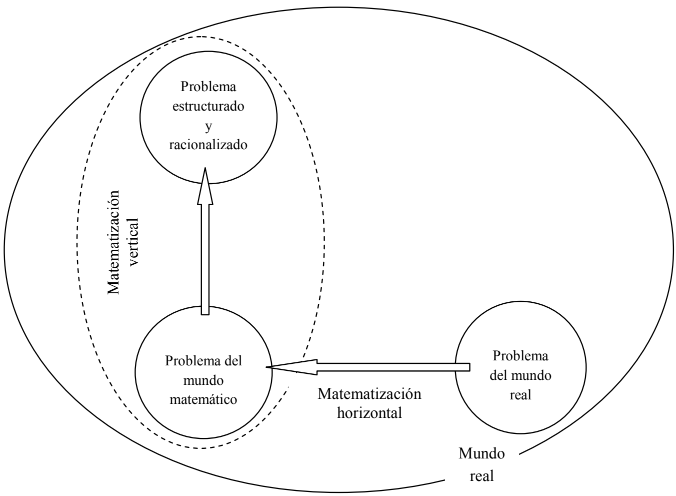

Figura 4. Proceso de Matematización

El análisis detallado de la actividad necesaria para resolver la tarea del desierto muestra que se ponen en juego muchos procesos que no detallaremos aquí por cuestiones de espacio. Nos limitaremos a hacer observar (Font y Contreras, 2008) que en el comentario final los autores primero generan un proceso encubierto de idealización (el desierto se convierte en un área) y después establecen la relación particular general entre la situación idealizada y el objeto matemático "*En este ejercicio se ha dividido un área de acuerdo al principio del vecino más próximo*". La manera de presentar lo general al alumno es el resultado de una abstracción aditiva, puesto que consiste en la reunión en un mismo conjunto de diversos elementos "*Hoy en día, particiones similares son usadas en ciencias, por ejemplo, en geología, forestal, control de comercialización, astronomía, robótica, lingüística, cristalografía, meteorología, por nombrar algunos*". A continuación se realiza un proceso de particularización cuando se anuncia que se va a tratar a continuación el caso de dos pozos "*A continuación estudiaremos el simple caso de dos pozos*" y uno de idealización explícito cuando los dos pozos se convierten en puntos "(…) *o realmente dos puntos, puesto que no trataremos con pozos en otras aplicaciones.*"

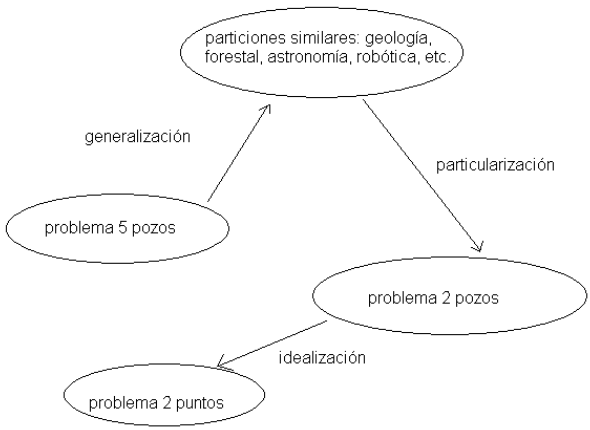

Figura 5. Procesos de generalización, particularización e idealización

5. Cuarta reflexión: Tendencia hacia una enseñanza-aprendizaje de tipo activo (constructivista).

Actualmente podemos observar una tendencia hacia una enseñanza-aprendizaje de tipo activo (constructivista). Más en general, hay una tendencia a tener en cuenta ciertos aspectos psicopedagógicos. Si nos fijamos en el texto de la tarea que estamos analizando, vemos que éste está dividido, explícitamente, en dos partes: 1) El enunciado del problema y 2) el comentario que sigue a continuación**.** El enunciado del problema pretende generar un *proceso de personalización* (en el sentido de que el alumno construya, entre otros aspectos, el objeto matemático "partición de un área de acuerdo al principio del vecino más próximo"). En cambio, el comentario posterior pretende *"institucionalizar"* este objeto matemático, en el sentido de que sea algo conocido por toda la clase, es decir pasa a "existir" en el aula como objeto matemático (Font, Rubio y Contreras, 2008).

Actualmente hay una tendencia a aceptar que el aprendizaje no es una simple reproducción del contenido que se ha de aprender, sino que implica un proceso de construcción o reconstrucción en el que las aportaciones de los alumnos juegan un papel decisivo. Este punto de vista sobre el aprendizaje conlleva la tendencia hacia una enseñanza en la que el papel del profesor es más complejo, ya que, además de favorecer en sus alumnos la construcción de significados, tiene que orientarla en la dirección que marcan los contenidos del aprendizaje.

Aceptar que la enseñanza está mediatizada por la actividad constructiva de los alumnos obliga a sustituir la imagen clásica del profesor como transmisor de conocimientos por la imagen del profesor como orientador o guía. Pero, aceptar que los contenidos que han de construir los alumnos son el resultado de una elaboración social, obliga también a matizar la imagen del profesor-orientador y aceptar que también tiene como misión conectar los procesos de construcción de los alumnos con los significados colectivos culturalmente organizados.

Sin ánimo de ser exhaustivo se puede decir que, las ideas básicas de tipo psicopedagógico que se tiende a tener presente en los procesos de instrucción son las siguientes:

1) Tener en cuenta los niveles de desarrollo evolutivo de los alumnos,
2) Procurar un aprendizaje activo y significativo,
3) Ser consciente de la importancia que los conocimientos previos del alumno tienen con respecto al éxito de cualquier actividad de enseñanza/aprendizaje que vayamos a realizar.
4) Valorar la importancia que tienen los aspectos afectivos sobre el aprendizaje.
5) Tener en cuenta las diferentes explicaciones que dan las diferentes teorías psicopedagógicas a las dificultades que tienen los alumnos para aprender matemáticas.
6) Saber que lo que un alumno es capaz de aprender por sí mismo, viene determinado por su nivel de desarrollo evolutivo y por sus conocimientos previos, pero esta capacidad de aprendizaje hay que diferenciarla de la capacidad de aprender con la ayuda y el estímulo de otras personas (no sólo los profesores, también los amigos, padres, compañeros, etc.). La diferencia entre estos dos niveles de capacidad es lo que Vygostsky llama la zona de desarrollo próximo. Así pues, la enseñanza más eficaz es aquella que parte del desarrollo efectivo del alumno no para amoldarse a él, sino para hacerlo progresar a través de la zona de desarrollo próximo, y de esa manera generar nuevas zonas de desarrollo próximo.

6. Quinta reflexión: Tendencia a la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)

El libro del cual estamos comentando la primera actividad incorpora también actividades con ordenador. Es un ejemplo más de una tendencia, que se observa a nivel general, a la incorporación de las TICs en la enseñanza de las matemáticas. Ahora bien, la incorporación de herramientas tecnológicas afecta tanto a los nuevos contenidos matemáticos como a los que siempre han formado parte del currículum.

Un buen ejemplo de cómo la incorporación de las nuevas tecnologías ha modificado la enseñanza de los contenidos clásicos es el Cálculo Diferencial. La principal tendencia en los últimos años ha sido la de incluir simultáneamente en la enseñanza del Cálculo Diferencial tres dimensiones: gráfica, numérica y analítica. La dimensión predominante durante décadas fue la analítica, ahora se busca no dejar de lado las otras. Se pretende poner el acento en la comprensión e interpretación de lo que se está haciendo y dar menos importancia a las técnicas de cálculo que las nuevas tecnologías permiten realizar con mucha mayor rapidez y seguridad

Con la incorporación de los graficadores la representación gráfica de las funciones pasa a tener un papel más relevante y, en algunos casos, puede llegar a sustituir a la expresión simbólica. Un ejemplo ilustrativo es la tarea, diseñada para alumnos de Bachillerato que sigue a continuación. Su objetivo es utilizar las posibilidades de los programas de representación de funciones para llegar a una conjetura sobre cuál es la derivada de la función seno obviando el cálculo de $\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ debido a su dificultad.

Actividad: Con el graficador "Funcions i gràfics" representa la función $\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ y la función coseno. La pantalla tiene que quedar como la siguiente para el valor h = 5:

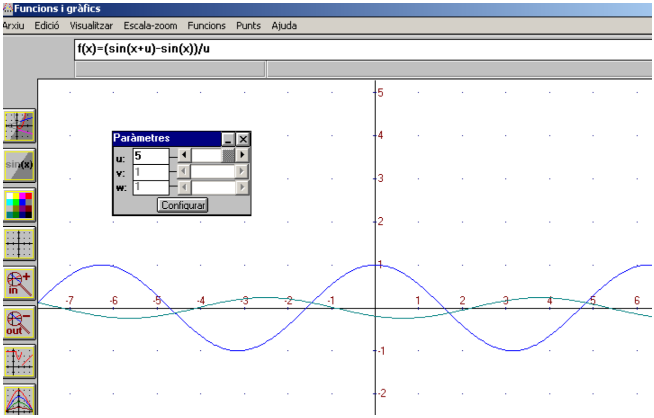

Figura 6. Graficador “Funcions i gràfics”

¿Qué puedes decir de la función $\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ cuando h se acerca a cero? ¿Qué puedes decir con relación al $\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$? ¿Cuál es la derivada de la función seno?

En este caso, para calcular la derivada de la función seno se trataría de seguir el esquema siguiente (Font, 2005a):

Expresión simbólica de $f(x)$ ± Gráfica de $f'(x)$ Ψ Expresión simbólica de $f'(x)$

Una manera de obtener la gráfica de la función derivada a partir de la expresión simbólica de $f(x)$ consiste en utilizar un graficador para representar la función $pf_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (función gradiente o función pendiente de la función $f(x)$ según un incremento h) con h suficientemente pequeño. Al ser h muy pequeño, la gráfica que dibuja el graficador se puede considerar que es la de la función derivada. El alumno ha de reconocer que la gráfica que ha obtenido es la de la función coseno y recordar su fórmula. Este último paso supone que el alumno es capaz de reconocer la gráfica de la función coseno que tiene en la pantalla del ordenador.

El uso de esta técnica permite prescindir del siguiente cálculo de la derivada de la función seno y de la demostración previa de que

$$\lim_{h \to 0} \frac{seno\, h}{h} = 1 :$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2}) \cdot sen\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) \cdot \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x$$

Además, tiene la ventaja de que permite reducir la unidad de trigonometría que se imparte antes de empezar la derivada, ya que no será necesario ampliarla para que incorpore las propiedades que permiten convertir la diferencia de senos en un producto.

7. Sexta reflexión: Superación de una cierta ingenuidad con relación a las bondades de la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)

A continuación sigue un cuestionario propuesto a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato (17 años) como parte de un proceso de instrucción sobre la derivada (Font, en prensa). Su objetivo es el cálculo de la derivada de la función exponencial $f(x) = e^x$ sin usar la definición por límites. Antes de contestar el cuestionario, los alumnos habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes. En concreto, les permitió observar que, para la función exponencial de base *e*, la longitud de la subtangente siempre es 1.

El software puede ser diverso, desde un programa clásico como el "Calcula", o bien un programa gratuito de muy fácil manejo que permite representar funciones con parámetros como "Funcions i gràfics" o bien applets específicamente diseñados.

Programa "Funcions i gràfics"

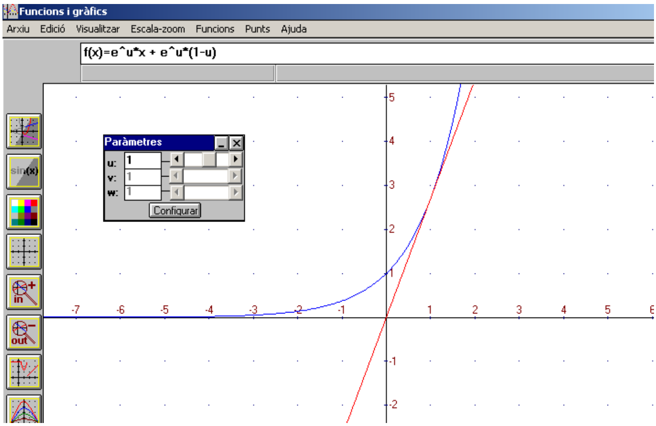

Figura 7. La función exponencial de base *e* en el graficador "Funcions i gràfics"

Applets[2]

Figura 8. La función exponencial de base *e* en un applet "Descartes"

Cuestionario

En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

a) Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$

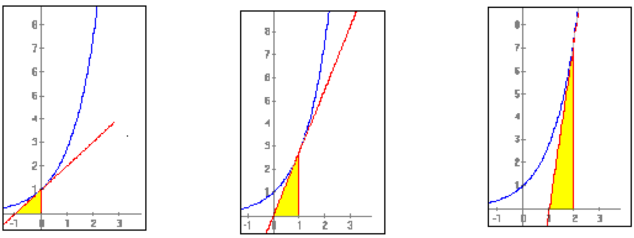

Figura 9. Tangentes a $f(x) = e^x$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$

---

[2] Applet elaborado por Eduardo Tellechea Armenta con el applet DESCARTES. Recuperable en: http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/Descartes/ActividadesProyecto/deriexponenciales.htm

b) Calcula $f\,'(a)$

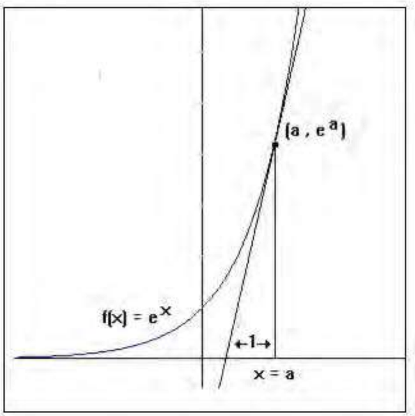

Figura 10. Tangentes a $f(x) = e^x$ en $x = a$

c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f\,'(x) = e^x$.

Para calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$ los alumnos han de aplicar una serie de acciones (una técnica) que consiste en considerar, de entrada, un punto particular con la tangente dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, no se consideran variables). A continuación, a partir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, se halla primero una condición que cumplen todas las rectas tangentes (en este caso que la subtangente siempre es un segmento de longitud 1). Esta condición después se simboliza, aplicando la interpretación geométrica de la derivada, lo que permite calcular la derivada en $x = a$. Por último, los alumnos han de tener claro que la condición que han hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella se deriva, es válido para cualquier punto, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera. De esta manera se obtiene la expresión simbólica de la función derivada.

Esta técnica relaciona las siguientes representaciones:

Gráfica de $f(x)$ y Expresión simbólica de $f(x) \Rightarrow$ Expresión simbólica de $f'(x)$

El punto de partida para hallar una condición que cumplen todas las tangentes es la gráfica de $f(x)$. La expresión simbólica de $f(x)$ es necesaria para simbolizar la condición que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, la cual nos permite deducir la expresión simbólica de $f'(x)$. Esta técnica sólo es posible si se introduce la representación gráfica y la simbólica conjuntamente de la función exponencial de base e ya que si no se contempla la representación gráfica, la técnica no es viable. Contemplar la representación gráfica, además de la simbólica, permite realizar determinadas prácticas que con sólo la representación simbólica no serían posibles.

El cálculo de la derivada de la función exponencial de base *e,* en el cuestionario que estamos considerando, está a mitad de camino entre lo que se conoce históricamente como el problema de la tangente y su inverso —no es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya se tiene construida; ni es el problema inverso, ya que se conoce la expresión simbólica de la función—. Este método fue sugerido por los procedimientos utilizados para construir la tangente y la normal en el periodo que va de Descartes a Barrow. Esta técnica tiene un campo de aplicación limitado, pero se puede aplicar, entre otras, a la familia de las funciones que tienen por gráfica una recta y a las funciones exponenciales y logarítmicas.

Llegados a este punto podemos caer en la "ingenuidad" de que en esta tarea en la que se usan las TIC todo son ventajas. Por ejemplo, se puede argumentar que es una actividad que permite que los alumnos descubran propiedades (todas las subtangentes tienen una longitud igual a 1) y que la emergencia de esta propiedad es el resultado de una abstracción diferente a la empírica, a saber, de una abstracción "reflexiva" (en términos de Piaget). En efecto, se trata de un proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, llega a encontrar relaciones invariantes y las describe simbólicamente. Ahora bien, hay que ser conscientes de que el uso de este software dinámico, además de permitir la generalización que se pretende, produce otros efectos, uno de los más importantes es que estructura implícitamente las gráficas funcionales en términos de la metáfora siguiente: "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino (la gráfica)" (Font y Acevedo, 2003). Dicho de otra manera, al utilizar los graficadores dinámicos estamos conectados con esquemas muy básicos que se forman en las primeras edades de las personas, y esta conexión produce un determinado "tipo" de comprensión de las gráficas del cual muchas veces los profesores no son conscientes.

El uso de graficadores dinámicos que conllevan metáforas dinámicas tiene sus ventajas (por ejemplo, en este caso permite la abstracción reflexiva), pero también sus inconvenientes ya que, entre otros, pueden generar procesos metafóricos no controlados como se muestra en la investigación explicada en Font (1999). En dicha investigación se describe una situación de enseñanza-aprendizaje en la que alumnos de 17 años utilizan software dinámico con el objetivo de ayudarles a entender que la recta tangente es la recta a la cual se aproximan las rectas secantes.

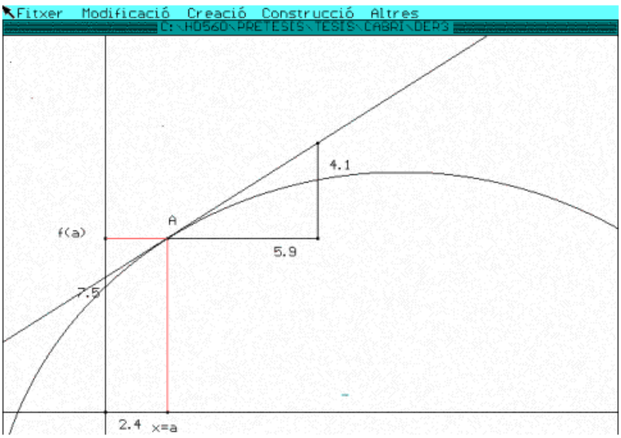

Figura 11. Aproximación de las secantes a la tangente con el programa Cabri

En este contexto, (Font, 1999, pág. 122) se observó que el hecho de que el profesor utilizara de manera inconsciente un discurso dinámico producía la siguiente dificultad en los alumnos:

> *(...) observamos que había alumnos que, cuando movían el punto A, pensaban que el nuevo punto continuaba siendo el punto A y que la nueva recta tangente era la misma que antes pero con diferente inclinación. De hecho, es como si estructurasen la situación en términos de una persona que se mueve (punto A) con un saco en la espalda (recta tangente) por una carretera que primero sube y después baja (gráfica) y considerasen que la persona y el saco siempre son los mismos a pesar de estar en diferentes lugares y tener diferente inclinación.".*

Este fenómeno también está documentado en otras investigaciones, por ejemplo en Bolite Frant et altres (2004).

Las metáforas dinámicas se pueden rastrear en la historia de las matemáticas ya que fueron las dominantes en el período anterior a la aritmetización del análisis. Por ejemplo, Newton en el siguiente párrafo se posiciona a favor de las metáforas dinámicas y en contra de las estáticas (formadas por partes):

> *No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que éstas sean, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas no son descritas y engendradas por la yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de las líneas; los sólidos por el movimiento de las superficies; los ángulos por la rotación de los lados; los tiempos por un flujo continuo. Considerando, pues, que las magnitudes que crecen en tiempos iguales son mayores o menores según que lo hagan con mayor o menor velocidad, busqué un*

> *método para determinar las magnitudes partiendo de las velocidades de los movimientos o aumentos que las engendran. Llamando fluxiones a las magnitudes engendradas, di, hacia los años 1665-1666, con el método de fluxiones, del que haré uso en la cuadratura de curvas.* (extraído de Lacasta y Pascual, 1998, pp. 28-29),

Hay que tener en cuenta que Leibnitz, a diferencia de Newton, consideraba la gráfica de una función como un agregado de segmentos infinitesimales más que como la trayectoria de un punto que se mueve. Para Newton, las gráficas de funciones eran consideradas no como un agregado estático de infinitesimales, sino como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la cual se puede expresar mediante una fórmula (generalmente en forma implícita). Esta manera de entender las gráficas de funciones es muy evidente en la obra de Newton, en la cual podemos hallar constantes referencias a un punto que es mueve sobre una parábola, una hipérbola, etc. Además de considerar que la grafica se puede interpretar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica, considera que el punto que genera la gráfica viene determinado por dos segmentos (abscisa y ordenada), cada un de los cuales es generado por un punto que se mueve en función del tiempo.

El uso de determinados graficadores informáticos y de calculadoras gráficas facilita la recuperación, aunque sea de forma inconsciente, de las metáforas dinámicas del tipo “La gráfica es un camino”. Se trata de una metáfora de tipo grounding[3] cuyo dominio de partida es el esquema de imagen

---

[3] Lakoff y Núñez (2000) distinguen dos tipos de metáforas conceptuales: 1) “Conectadas a tierra” (grounding): Son las que relacionan un dominio (de llegada) dentro de las matemáticas con un dominio (de partida) fuera de ellas. Por ejemplo: “Las clases son contenedores”, “los puntos son objetos”, “una función es una máquina”, etc. Estas metáforas sirven para organizar un dominio de llegada matemático (por ejemplo las clases) a partir de lo que

"camino". Este esquema de imagen, según Acevedo (2008) es subsidiario del esquema orientacional egocéntrico y se genera en las primeras edades:

Figura 12. Esquema de imagen "camino"

---

sabemos sobre un dominio de partida que está fuera de ellas (lo que sabemos sobre los contenedores) y 2) De enlace (linking): Tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas. Por ejemplo, "los números reales son los puntos de una recta", las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen de coordenadas", etc. Las metáforas de enlace proyectan un campo de conocimientos matemáticos sobre otro distinto.

La metáfora conceptual[4] "La gráfica es un camino" permite la proyección del esquema de imágenes "camino" sobre las gráficas. Dicha proyección se puede ilustrar por medio de la siguiente figura (Font, Acevedo, Castells y Bolite, 2008):

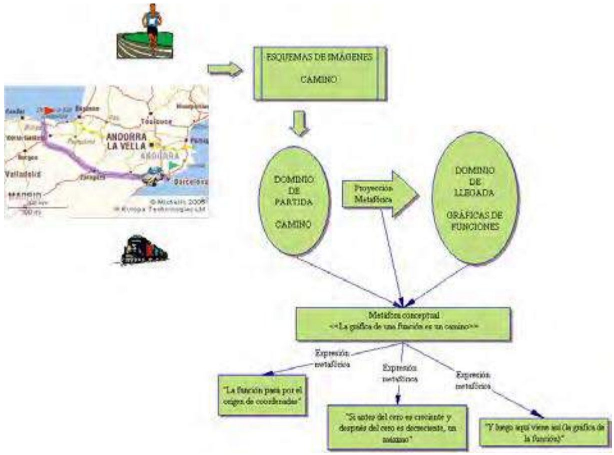

Figura 13. Proyección metafórica del esquema "camino"

[4] La distinción entre *expresiones metafóricas* y *metáforas conceptuales* sirve para establecer generalizaciones que de otro modo quedarían ocultas. Las *metáforas conceptuales* permiten agrupar expresiones metafóricas. Una *expresión metafórica*, en cambio, es un caso individual de una metáfora conceptual. Por ejemplo, la metáfora conceptual "La gráfica de una función es un camino" agrupa, entre otras, expresiones metafóricas como "la función pasa por el origen de coordenadas" o "Y luego aquí viene así (la gráfica de la función)", etc.

Metáfora dinámica: "La gráfica es un camino"

Dominio de partida **Esquema del camino**	Dominio de llegada **Gráficas de funciones**
Camino	Gráfica
Una localización en el camino	Punto de la gráfica
Estar sobre el camino	La relación de pertenencia (ser un punto de la gráfica)
Origen del camino	Origen de la gráfica (por ejemplo, menos infinito)
Final del camino	Final de la gráfica (por ejemplo más infinito)
Estar fuera del camino	Puntos que no pertenecen a la gráfica

Tabla 1. Proyección metafórica del esquema camino

Una variante de esta metáfora conceptual es "La gráfica es la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones". La diferencia con la anterior es que, en este caso, el camino no está dado previamente, sino que es la traza que resulta del movimiento del punto. Esta última se pone en funcionamiento cuando se traza la gráfica de una función, mientras que en la primera la gráfica ya está dada previamente.

8. Séptima reflexión: Tendencia a considerar que saber matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extra-matemáticos

Actualmente hay una tendencia a considerar que "saber matemáticas" incluye la competencia para aplicarlas a situaciones no matemáticas de la vida real. Esta tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículums basados en competencias. Esta tendencia también tiene que ver con la importancia que se da, en los estudios internacionales de evaluación del sistema educativo, a la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a los contextos extra matemáticos de la vida real (p.e. el estudio Pisa 2003). En dicho informe se consideran las siguientes competencias:

- *Pensar y razonar.* Incluye plantear preguntas características de las matemáticas ("¿Cuántas … hay?", "¿Cómo encontrar …?"); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.

- *Argumentar.* Se refiere a saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos matemáticos.

- *Comunicar*. Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.

- *Modelar*. Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la "realidad" a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.

- *Plantear y resolver problemas*. Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.

- *Representar.* Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.

- *Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.* Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.

- *Utilizar ayudas y herramientas.* Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática, y comprender las imitaciones de estas ayudas y herramientas.

9. Octava reflexión: Tendencia a aceptar el principio de Equidad en la Educación Matemática Obligatoria.

Los diferentes países tienen tendencia a aumentar la edad en la que finaliza la enseñanza obligatoria (p. e. en España ahora es 16 años). Este aumento de la etapa de enseñanza obligatoria conlleva (1) que el sistema educativo tarda más a seleccionar al alumnado y (2) la diversidad propia de una etapa obligatoria está presente en edades en las que antes los grupos de alumnos eran más homogéneos. Por otra parte, el proceso de globalización en el que estamos inmersos produce, en muchos países, un aumento de la diversidad cultural. Hay, pues, una tendencia a aumentar tanto la diversidad en el ritmo de aprendizaje como la diversidad cultural. Esta *diversidad* es la causa de un cierto desconcierto en los profesores de la enseñanza obligatoria ante los problemas que tienen para explicar matemáticas en esta etapa

Ante esta diversidad, hay una tendencia a buscar la equidad en la educación matemática. Hay cierto acuerdo en que los programas de instrucción matemática deben alcanzar a todos los estudiantes cualquiera que sea el género, lengua, grupo étnico o sus diversas capacidades. Se considera que cada estudiante tiene derecho al acceso a ideas matemáticas relevantes, a pensar de manera efectiva con estas ideas, y a aplicar sus conocimientos matemáticos más allá de los muros de la clase. Para ello es necesario que los estudiantes vean la relevancia y utilidad de las matemáticas relacionando su estudio en la escuela con el mundo exterior y empleando estrategias de enseñanza que comprometan a los estudiantes, les planteen desafíos matemáticos y mostrándoles aprecio a sus propias ideas matemáticas.

De acuerdo con este principio de equidad hay un interés en conocer las dificultades que tienen les personas que aprenden matemáticas en situaciones de conflicto cultural, es decir, en las situaciones donde la cultura propia difiere marcadamente de la cultura de la escuela. Por ejemplo, poblaciones indígenas que se hallan en situación minoritaria o bien, como es el caso de los inmigrantes recientes en sociedades occidentales europeas.

Para conseguir esta equidad hay que presentar a los alumnos tareas matemáticas que, por una parte, permitan una actividad matemática rica y, por otra parte, permitan la inclusión de todos los alumnos. Se trata de conseguir la inclusión y no la exclusión de los alumnos con más dificultades sin renunciar por ello a presentar tareas que sean relevantes desde el punto de vista matemático. El objetivo no es fácil, pero no imposible como muestra las siguientes secuencias de actividades para alumnos de 12 años (Font, 2005b).

ACTIVIDAD 1: Los hexaminos son figuras formadas por seis cuadrados. A continuación tienes dibujados todos los hexaminós posibles. Entre los 35 hexaminós has de encontrar los 11 que permiten construir un cubo. Puedes dibujar el hexamino en papel cuadriculado para poderlo recortar con unas tijeras.

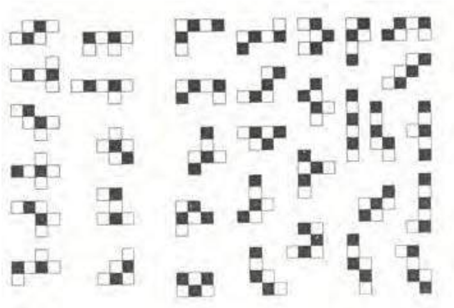

Figura 14. Hexaminos

En la actividad 1, se propone que investiguen cuáles de los 35 hexaminos son desarrollos planos de un cubo. Para contestar a esta pregunta, se les facilitó plantillas en las que pudiesen dibujar los hexaminos y, si lo consideraban conveniente, los pudiesen recortar para ver si era posible construir el cubo a partir de ellos.

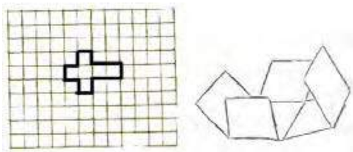

Figura 15. Construcción de un cubo a partir de un hexamino

Esta actividad resulta muy atractiva para los alumnos y casi todos terminaron integrándose en ella. En las experiencias realizadas, todos los grupos llegaron a descubrir todos los hexaminos que son desarrollos planos del cubo.

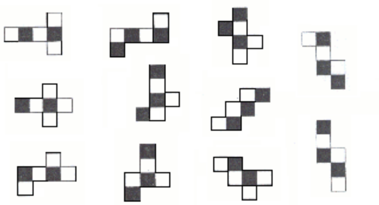

Figura 16. Los 11 hexaminos que son desarrollos planos de un cubo

Actividad **2**: Un cubo tiene caras, aristas y vértices:a) Dibuja un cubo y señala un vértice, una cara y una arista.

b) ¿Cuántas caras tiene un cubo? ¿Cuántas son laterales? ¿Y cuántas son bases?c) ¿Cuántas aristas tiene un cubo?d) ¿Cuántas caras concurren en un vértice?

En la actividad 2 se recuerdan los conceptos de “cara”, “vértice” y “arista”. También se distingue entre cara lateral y base. Los alumnos han de contar el número de aristas y de caras, el número de caras laterales y el número de bases. También tienen que observar que en un vértice concurren sólo tres caras.

Actividad **3**: Fíjate en los hexaminos que no son “recortables” de un cubo:

a) Teniendo en cuenta el número de caras que concurren en un vértice, ¿cuáles de los hexaminos quedan descartados como “recortables”?

b) ¿Has observado alguna otra característica?

En la actividad 3 se pretende que los alumnos formulen argumentaciones explicando la causa por la que determinados hexaminos no son desarrollos del cubo. Como resultado de los comentarios, normalmente se acuerdan las siguientes causas:

1) Cuando en un hexamino hay un vértice en el que concurren cuatro cuadrados, no es el recortable de un cubo. Por ejemplo:

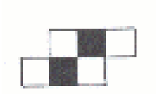

Figura 17. Ejemplo de hexamino que no es desarrollo plano de un cubo

2) Cuando en un hexamino hay una tira de más de 4 cuadrados seguidos, no es recortable del cubo. Por ejemplo:

Figura 18. Ejemplo de hexamino que no es desarrollo plano de un cubo

3) Cuando en un hexamino tenemos una tira de 4 y los otros dos cuadrados están en el mismo lado, no es recortable del cubo. Por ejemplo:

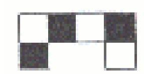

Figura 19. Ejemplo de hexamino que no es desarrollo plano de un cubo

Esta secuencia de tareas es una propuesta de trabajo colaborativo en la que todos los alumnos pueden participar. En ella se presenta una situación que implica una actividad manipulativa con material muy simple (tijeras y plantillas cuadriculadas). Se trata de una tarea que permite que los alumnos realicen por una parte una actividad matemática "rica" y, por otra parte, son actividades *inclusivas* y no *exclusivas*.

10. Novena reflexión: Tendencias en la formación inicial de profesores de enseñanza no universitaria

Hay un cierto consenso en que las competencias profesionales que la formación inicial de profesores de enseñanza no universitaria tendría que intentar desarrollar son las siguientes (Font, 2005c):

a) Competencia en el domino de los contenidos matemáticos correspondientes al currículum de la enseñanza no universitaria.

   Para ello, las matemáticas que debe saber el futuro profesor no se pueden limitar a recibir la transmisión de contenidos formales y descontextualizados organizados de manera deductiva. El futuro profesor necesita saber también cuáles son las aplicaciones de las matemáticas al mundo real, cuáles fueron los problemas que originaron los objetos matemáticos que tendrá que enseñar, etc.

   Los conocimientos matemáticos que ha de recibir en su formación inicial el futuro profesor no pueden ser exactamente los mismos que reciben los estudiantes que se van a dedicar, por ejemplo, a la industria, a la empresa o a la investigación básica.

b) Competencia en la planificación y diseño de secuencias didácticas.

   Con relación a esta competencia en la formación inicial sólo se pueden dar algunas indicaciones, ya que aprender a diseñar unidades didácticas es un objetivo muy ambicioso que sólo se puede alcanzar a partir de la experiencia que se obtiene al impartir clases reales.

   El diseño de unidades didácticas implica la toma de decisiones en distintos ámbitos de concreción hasta culminar en un documento en el que el profesor concreta los objetivos, contenidos, actividades, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y selección de estrategias metodológicas.

Parece evidente que el diseño de las unidades didácticas se ha de basar, como mínimo, en los seis aspectos que se describen a continuación.

- La información disponible sobre los objetivos y contenidos del currículo y del proyecto de centro correspondiente.
- Los tipos de problemas que son el campo de aplicación de los contenidos matemáticos seleccionados.
- El conjunto organizado de prácticas institucionales, operativas y discursivas, que proporcionan la solución a los tipos de problemas seleccionados (contenidos procedimentales, conceptuales y formas de representación).
- Materiales y recursos disponibles para el estudio del tema, incluyendo los libros de texto y experiencias didácticas descritas en las publicaciones accesibles.
- El conocimiento de los errores y dificultades recurrentes en el estudio del tema que la investigación didáctica ha documentado
- Los criterios metodológicos y de evaluación incluidos en las orientaciones curriculares, así como las recomendaciones aportadas por la investigación didáctica descritas en publicaciones accesibles.

Las consideraciones anteriores se refieren a la fase de la planificación de la unidad didáctica. Pero en el diseño de una unidad didáctica, hay que contemplar una primera fase de planificación y una segunda fase propiamente de diseño. Una vez se ha recogido información sobre los aspectos anteriores, se pueden empezar a tomar decisiones que permiten el diseño efectivo de la unidad. Esto es, concretar en actividades de aula las tomas de posición sobre los aspectos anteriores.

Con relación a las actividades diseñadas hay que tener presente que la naturaleza de la actividad de los alumnos en clase de matemáticas es una cuestión central en su enseñanza puesto que el aprendizaje es siempre el producto de la actividad, y si esta se reduce, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas esto es lo que se aprende y lo que queda en los alumnos. Por lo tanto, hay que procurar incorporar en la unidad actividades "ricas" en el sentido de que permitan superar el aprendizaje pasivo, gracias a la incorporación al proceso de enseñanza-aprendizaje, entre otros, de algunos de los siguientes aspectos: la actividad del alumno, el uso de materiales y recursos informáticos, problemas contextualizados, grupos de trabajo, uso de diferentes representaciones, etc. En la fase de diseño, también se han de contemplar actividades de evaluación inicial, formativa y sumativa.

c) La capacidad de gestión de las secuencias didácticas en el aula.

En el diseño de una unidad se ha previsto, muchas veces de manera implícita, una determinada gestión de aula. Por ejemplo, si la unidad incorpora una actividad en la que los alumnos han de descubrir una fórmula para hallar el número de diagonales de un polígono, el profesor en la situación de acción de los alumnos tendrá una actuación muy diferente que en la situación de validación o en la de institucionalización de los resultados obtenidos.

La gestión de la unidad puede llegar a ser más importante que las propias actividades que la componen ya que una actividad "rica", mal gestionada, normalmente termina siendo una actividad "pobre", mientras que una actividad mal diseñada, bien gestionada, se puede llegar a convertir en una actividad "rica".

A pesar de que en la planificación y el diseño de la unidad ya se ha previsto a priori una determinada gestión de aula y un determinado tratamiento de la diversidad, el profesor ha de ser competente para analizar la gestión efectiva de aula que permite la unidad diseñada. Hay que tener en cuenta que esta unidad se va a utilizar con unos alumnos determinados sobre los cuales seguramente se tendrá mucha información de los cursos anteriores. Esta información, junto con la evaluación inicial de los alumnos y la evaluación formativa permiten adaptar la unidad a la diversidad de los alumnos. Esto es, la unidad didáctica se ha de adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos.

En la fase de gestión de la unidad, el profesor ha de ser competente en el análisis de las características de las situaciones que pueden ser modificadas por él (variables didácticas), así como los fenómenos del contrato didáctico. Por otra parte, hay que ser conscientes de que el profesor se va a encontrar con determinados alumnos que necesitarán una adaptación curricular individual.

Para ser competente en la planificación, diseño y gestión de secuencias didácticas tal como se ha formulado en los párrafos anteriores es necesario que el futuro profesor sea competente en:

d) El análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos a través de sus actuaciones y producciones matemáticas.

Estas cuatro competencias profesionales de los profesores de matemáticas de enseñanza no universitaria tienen implicaciones importantes para su formación inicial. Las más importantes son:

- Hay que incorporar un itinerario educativo en la formación inicial de profesores de matemáticas. Este itinerario se debe articular en torno a la Didáctica de la Matemática.
- Hay que asegurar una formación adecuada en matemáticas. Ahora bien, una formación matemática que tenga en cuenta las aplicaciones de las matemáticas al mundo real, su historia, etc.
- La práctica docente debe formar parte esencial de la formación inicial de los profesores. La reflexión sobre

la propia práctica es necesaria para comprender la complejidad del proceso educativo. Ahora bien, es necesario articular el análisis de la propia práctica con las aportaciones de la investigación y la innovación desde la didáctica de la matemática y, en este sentido, es necesaria la coordinación entre el futuro profesor, el profesor de didáctica de la matemática y el profesor tutor de matemáticas en el centro escolar.

11. Décima reflexión: Una agenda de investigación

Las tendencias que se han comentado anteriormente dan pie a una sugerente agenda de investigación para la Didáctica de las Matemáticas. Algunas de las cuestiones relevantes de dicha agenda que merecen ser investigadas son, entre otras, las siguientes: 1) ¿Cómo se puede conseguir la emergencia de los objetos matemáticos a partir de los contextos extra-matemáticos? 2) ¿Qué características han de cumplir los problemas contextualizados? ¿Cómo se pueden clasificar? 3) ¿Es posible en las instituciones de secundaria implementar matemáticas contextualizadas que permitan una actividad de modelización "rica"? 4) ¿Cómo conseguir que los alumnos sean competentes en la aplicación de las matemáticas a contextos no matemáticos? 5) ¿Cómo podemos evaluar la medida en que los estudiantes tienen acceso a las ideas matemáticas relevantes y sus capacidades para hacer un uso efectivo de dichas ideas? 6) ¿Qué competencias necesitan los profesores para diseñar e implementar cursos de matemáticas que tengan en cuenta algunas de las tendencias comentadas? Etc.

Referencias

Acevedo, J. I. (2008). Fenómenos relacionados con el con el uso de metáforas en el discurso del Profesor. El caso de las gráficas de funciones. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Bolite Frant, J. et al. (2004). Reclaiming visualization: when seeing does not imply looking. TSG 28, ICME 10, Denmark [http://www.icme-organisers.dk/tsg28/]

Civil, M. (1992), Entering Students Households: Bridging the gap between out-of-school and in-school mathematics, en A. Weinzweigh y A. Cirulis (eds.), *Proceedings of the 44th International Meeting of ICSIMT* , Chicago, ICSIMT, pp. 90-109.

D'Amore B.y Fandiño Pinilla M. I. (2001). Matemática de la cotidianidad. *Paradigma*, XXII, 1, 59-72.

Díez, J. (2004), *L'ensenyament de les matemàtiques en l'educació de persones adultes. Un model dialògic*, tesis doctoral no publicada, Barcelona, Universitat de Barcelona.

Evans, J. (1998), Problems of transfer of classroom mathematical knowledge to practical situations, en F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom*, New York, Cambridge University Press, pp. 269-289.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

Font, V. (2005a) Funciones y derivadas. Actas del *XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Bogotá. Colombia, tomo II, pp. 5-54.

Font, V. (2005b). Reflexión en la clase de Didáctica de las Matemáticas sobre una "situación rica", en Badillo, E. Couso, D., Perafrán, G., Adúriz-Bravo, A. (eds) *Unidades didácticas en Ciencias y Matemáticas* (pp. 59-91). Magisterio: Bogotá.

Font, V. (2005c) Matemáticas y su Didáctica en la Formación Inicial. Actas del *XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Bogotá. Colombia, tomo I, pp. 9-58.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *10*(2), 419–434.

Font, V. (en prensa). Representaciones activadas en el cálculo de f '(x). Actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Granada 2007. Granada: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Font, V.; Acevedo, J. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21,3, 405-418.

Font, V., Acevedo, J. I., Castells, M. y Bolite, J. (2008). Metáforas y ontosemiótica. El caso de la representación gráfica de funciones en el discurso escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21 (en prensa).

Font, V. y Contreras A. (2008) The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* (en prensa)

Font, V., Rubio, N. y Contreras, A. (2008). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21 (en prensa).

Freudenthal, H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht, Riedel-Kluwer A.P.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. *Mathematics Education Library, 9,* 41-42.

Geertz C. (2002), *Reflexiones antropológicas sobre temas filosóficos*, Barcelona, Paidós Studio.

Goddijn, A., Kindt, M & Reuter, W. (2004), *Geometry with applications and proofs*. Freudenthal Institute, Utrecht: The Netherlands.

González, N., Andrade, R. y Carson, C. (2001), Creating links between home and school mathematics practices, en E. McIntyre, A. Rosebery y N. González (eds.), *Classroom diversity: Connecting curriculum to students' lives*, Portsmouth, NH: Heinemann, pp. 100-114.

Gravemeijer, K.P.E. (1994), *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-ß. Press / Freudenthal Institute.

Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19-58.

Jurdak, M. (2006). Real World, Situated, and School Contexts, *Educational Studies in Mathematics*, 63 (3), 283-301.

Jurdak, M. y Shahin I. (1999), An ethnographic study of the computational strategies of a group of young street vendors in Beirut, *Educational Studies in Mathematics Education*, 40, 2, 155-172.

Jurdak, M. y Shahin I. (2001), Problem solving activity in the workplace and the school: the case of constructing solids, *Educational Studies in Mathematics Education*, 47, 3, 297-315.

Lacasta, E. y Pascual, J.R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Síntesis.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lange, J. de: (1996), Using and applying mathematics in education, en Bishop et al, *International handbook of mathematics education*, Dordrecht, Kluwer A.P., pp. 49-97.

Lave, J. (1988), *Cognition in practice*. New York, Cambridge University.

Nunes, T., Schliemann, A.D., y Carraher, D.W. (1993), *Street mathematics and school mathematics*, New York, Cambridge University Press.

OCDE (2004), *Learning for Tomorrow's World – First Results from PISA 2003,* París, OCDE.

Pozzi, S., Noss, R., y Hoyles, C. (1998). Tools in practice, mathematics in use, *Educational Studies in Mathematics Education*, 36, 2, 105-122.

Reed, H. J. y Lave, J. (1981), Arithmetic as a tool for investigating between culture and Cognition, in R. Casson (eds.), *Language, Culture and Cognition: Anthropological perspectives*, New York, macmillan, pp.437-455.

Scribner, S. (1984), "Studing working intelligence", en J. Lave y B. Rogoff (eds.), *Evereday cognition: its development in social context*. Cambridge MA, Harvard University Press, pp. 9-40.

Scribner, S. (1986), "Thinking in action: Some characteristics of practical thought", en R. Sternberg y R.Wagner (eds.), *Practical intelligence nature and origins of competence in the everyday world*, New York, Cambridge University Press, pp.13- 30.