Marcos de referencia para la investigación en Didáctica de las Matemáticas

Cecilia Gaita Iparraguirre
Pontificia Universidad Católica del Perú

Resumen

A través del curso, los participantes reflexionaron sobre el objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática y sobre los principios en los que se basan algunas de las aproximaciones teóricas actuales de esta disciplina. Esto, con la finalidad, de ofrecer un panorama para el desarrollo de futuras investigaciones relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas. Se trataron específicamente los siguientes marcos de referencia: Registros de Representación Semiótica, la teoría APOE, la teoría de Situaciones Didácticas, la teoría Socioepistemológica y se comentó sobre el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática**.** Para ello se revisaron investigaciones que fueron realizadas teniendo, como soporte teórico, algunos de los enfoques señalados.

Palabras clave: Marcos de referencia, Didáctica de la matemática.

La Didáctica de la Matemática es una disciplina científica emergente y cuenta con un gran número de seguidores interesados en distintos aspectos propios de esta disciplina. Como resultado de estos trabajos, se han desarrollado diversos grupos de investigación que apoyan sus trabajos en marcos teóricos distintos. Sin embargo, pocos autores se han dedicado a estudiar el estado actual de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica y a organizar los distintos paradigmas de investigación existentes. En esta línea, son relevantes los trabajos realizados por Godino (2003), Font (2002) y D’Amore (2006).

Dado que los participantes no habían tenido contacto con enfoques propios de la Didáctica de la Matemática sino solamente con teorías generales sobre el aprendizaje, se consideró necesario seleccionar algunos de los principales paradigmas de investigación de este campo en desarrollo y presentar ejemplos basados en investigaciones para ilustrar los principios en los que se basan así como ejemplos para su aplicación.

Previo a este trabajo, se reflexionó sobre el campo de interés de la Didáctica de la Matemática. Para ello, se citó a Godino (2003) quien propone que los diversos trabajos que se han realizado buscando una mejora del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas se pueden agrupar en los siguientes campos:

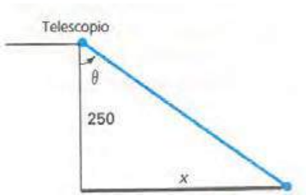
i. Aquellos que resultan de la experiencia y de la reflexión sobre esta práctica por parte del docente de matemáticas. Estos trabajos pueden derivar en propuestas didácticas que tienen un sustento empírico.

ii. Aquellos que se producen teniendo en cuenta los conocimientos científicos disponibles, es decir, materiales y recursos que han sido elaborados bajo el sustento de algún marco de referencia en la Didáctica de la Matemática.

iii. Aquellos que se dedican a comprender el funcionamiento de la enseñanza de las matemáticas en su conjunto, así como el de los sistemas didácticos específicos (formados por el profesor, los estudiantes y el conocimiento matemático). Estos corresponden al grupo que se denomina de *investigación científica*.

Estos tres campos se interesan por el funcionamiento de los sistemas didácticos; sin embargo, tienen características que los diferencian. Mientras que en el primero se realizará una aplicación inmediata de las propuestas, en el segundo caso se requerirá una revisión cuidadosa de los resultados obtenidos en el tercero y estos se adaptarán para convertirse en tecnología didáctica. Godino plantea que el foco de atención de la investigación en Didáctica de la Matemática son únicamente los trabajos descritos en ii) y iii).

Esta clasificación se ilustró con algunos ejemplos. El siguiente problema fue tomado del texto de Purcell (1992) y corresponde al capítulo 3, *La derivada*, en la sección *Razones afines*.



Una mujer, de pie en un acantilado, observa con un telescopio un bote de motor, cuando el bote se aproxima a la playa que está directamente debajo de ella. Si el telescopio está 250 pies arriba del nivel del agua y si el bote se acerca a 20 pies por segundo, ¿con qué rapidez cambia el ángulo del telescopio con respecto al bote cuando éste se encuentra a 250 pies de la playa?

Luego de revisar el texto de Purcell, se observó que previamente al problema señalado se habían resuelto otras situaciones contextualizadas que involucraban la noción de razón de cambio y luego se había dado un algoritmo para abordar problemas de este tipo. Es decir, hubo una intención de contextualizar la matemática con la finalidad de motivar al estudiante y de mostrar la utilidad de esta disciplina. Esta misma finalidad puede ser la perseguida por un docente que incorpora actividades como ésta en clase. Sin embargo, nuestra experiencia nos ha mostrado que al proponer a los estudiantes problemas de razón de cambio contextualizados, estos presentan grandes dificultades en la comprensión de los enunciados y en el tránsito entre los diversos tipos de registros que están involucrados en su solución. Consideramos que este último aspecto no ha sido contemplado por quienes han diseñado este capítulo del texto. Las investigaciones teóricas en el campo de los Registros de Representación podrían reorientar la propuesta del texto de modo que en un trabajo previo se ponga énfasis en el tránsito del registro verbal al gráfico y luego al algebraico.

De esta manera, de una propuesta didáctica que no toma en cuenta las dificultades en el aspecto cognitivo, se puede elaborar una que sí contemple los obstáculos que se producen al cambiar de registro y que, apoyada en los resultados de la investigación científica, regrese nuevamente al aula para evaluar su eficiencia.

Como ejemplo de esta situación, se revisó el documento presentado por Cortez (2 008) en el que, teniendo como base los resultados del conocimiento científico, se realiza una propuesta para el diseño de un software que ayude a comprender el concepto de derivada. En el trabajo se hace referencia a estudios realizados por Duval (1993), quien define un Registro semiótico de representación como: "*un sistema de representación semiótico que permite tres actividades cognitivas fundamentales que son: La formación de una representación identificable, la transformación interna de una representación (tratamiento) y la transformación de una representación semiótica a otra representación semiótica (conversión)*" . Se menciona también el trabajo de Hitt (1995 p.63) en donde se comprueba que la conversión de un registro semiótico de representación a otro, causa un conflicto que no es trivial.

Estos resultados han sido empleados para la construcción de un software educativo en el que se presentan diferentes registros semióticos de representación. En particular, en la propuesta se enfatiza en el tratamiento numérico y gráfico del concepto de razón de cambio, ya que era este tipo de representaciones las que eran poco atendidas en los textos y en el aula. La influencia de la investigación científica en este trabajo también se observa en la propuesta de la secuencia de actividades; así, mientras que en los textos tradicionales este tema es una aplicación dentro del capítulo de derivadas, en el artículo señalado, se le ubica como un tema previo cuyo tratamiento motivará la formalización del concepto de derivada.

En el ejemplo presentado, se hizo referencia a uno de los marcos teóricos en Didáctica de la Matemática que enfatiza el aspecto cognitivo, la teoría de Registros de representación. Siguiendo en esta misma línea, se discutieron los principios básicos de la teoría APOE.

Otro marco teórico de corte cognitivo

La teoría APOE parte de la premisa que una persona aprende matemáticas a través de la construcción, reconstrucción y organización de procesos y objetos mentales. Tiene su origen en la teoría psicogenética de Piaget. Concibe el conocimiento matemático como la tendencia de un individuo a responder ante cierta clase de situaciones problema.

Esta teoría afirma que es posible clasificar las construcciones mentales que se realizan en el aprendizaje de un determinado concepto matemático; en esta clasificación se proponen los siguientes niveles: acción, proceso, objeto y esquema[1]; incluso en algunas investigaciones se ha considerado necesario definir un nivel previo al que se ha denominado pre-acción. Para la identificación del nivel en el que se encuentra un individuo respecto a un determinado objeto matemático se deben fijar previamente las tareas que debe ser capaz de resolver.

Para ilustrar este enfoque se recurrió a la investigación realizada por Barbosa (2003) que hace referencia al aprendizaje de inecuaciones. A continuación se presentan algunas conclusiones de este estudio. Como se mencionó, es necesario asociar a los distintos niveles, tareas que den cuenta de haber alcanzado dicho estatus. Así, se señala que un individuo se encuentra en el nivel de:

- Pre acción si resuelve una inecuación como si fuera una ecuación.
- Acción si puede evaluar una expresión algebraica en determinado valor, si puede dar valores específicos a la

[1] Información tomada del Glosario APOS.

variable para determinar si satisface la inecuación, si puede resolver una inecuación que requiere aplicar la fórmula cuadrática, por ejemplo. En general, si realiza una manipulación repetible, física o mentalmente, que transforma objetos para obtener objetos.

- Proceso si puede señalar los pasos que seguiría para resolver una inecuación con radicales, sin tener que realizarlos; si puede reconocer que la expresión $x^2 + 1$ siempre será positiva. Es decir, si puede repetir una acción y reflexionar sobre ella.
- Objeto si analiza competentemente cuando dos inecuaciones distintas son equivalentes, cuando visualiza las inecuaciones desde el enfoque de las funciones o cuando distingue qué propiedades de los números reales pueden ser aplicadas a una ecuación pero no a una inecuación. En general, se encuentra en el nivel de objeto si reflexiona sobre las acciones aplicadas a un proceso específico y adquiere una conciencia de su totalidad, se perciben qué transformaciones pueden actuar sobre él y se es capaz realmente de construirlas. Esto se expresa también diciendo que se encapsuló o reconstruyó ese proceso como un objeto.
- Esquema si puede interpretar y relacionar los conceptos de variable real, conjunto solución, funciones, gráficas de funciones, etc. Y también se puede resolver inecuaciones señalando por qué se reescriben de otra manera, cómo y porqué se pueden aplicar ciertas propiedades de los números reales, etc. Como se observa, el nivel de esquema abarca una colección individual de acciones, objetos y procesos a los que se pueden añadir otros esquemas previamente construidos. Hay conexión en la mente del individuo entre las diversas estructuras involucradas.

Es importante notar que esta clasificación de tareas no es única y dependerá del investigador, quien teniendo como base los supuestos de la teoría APOE, hará la descomposición genética del concepto en estudio. Este es el primer paso en la metodología RUMEC, establecer en términos de las construcciones mentales lo que un aprendiz puede hacer en orden a desarrollar la comprensión del concepto. Al resultado de este análisis netamente teórico se le denomina descomposición genética para ese concepto.

Una aproximación sistémica

Como se puede observar, las dos teorías comentadas hasta el momento, la teoría de Registros de representación y la teoría APOE, centran su atención en el estudiante y en los procesos mentales que intervienen cuando estos aprenden matemáticas. Sin embargo, no es este el único foco de atención en el que se puede centrar un investigador en Didáctica de la Matemática. Para ilustrar mejor esta afirmación, se presentó un marco de investigación que aborda el problema del aprendizaje de la matemática desde una perspectiva sistémica; este marco centra su atención en la triada alumno-saber-profesor.

La teoría de Situaciones, desarrollada por Guy Brousseau, parte de la premisa que "el estudiante aprende adaptándose a un medio que tiene dificultades, contradicciones y desequilibrios, interactuando con una problemática y con el docente; y produciendo nuevas relaciones entre los conocimientos", Brousseau (1997). En este proceso de aprendizaje cumple un papel fundamental la situación didáctica, entendida como un conjunto de relaciones establecidas entre el alumno, el profesor y el entorno para aprender algún conocimiento. Así, como resultado del planteamiento de una situación problema (situación fundamental), seleccionada adecuadamente por el profesor para dar origen al concepto que se espera estudiar, se producirán diversas situaciones didácticas: situaciones de acción, de formulación, de validación y de institucionalización.

Brousseau plantea como ejemplo, para ilustrar estas distintas situaciones didácticas, un juego al que denomina la carrera al 20. Consiste en lo siguiente:

El juego se juega en parejas. Cada jugador tratará de decir "20" añadiendo 1 ó 2 unidades al número dado por el otro jugador. Se empieza diciendo 1 ó 2. Gana el primer jugador que dice 20.

El desarrollo de la actividad es el siguiente: Se propone a los estudiantes que jueguen (situación de acción) y que luego, en grupos, identifiquen si existen estrategias ganadoras (situación de formulación). Se pide a la clase que enuncien afirmaciones relacionadas con las estrategias ganadoras identificadas, que traten de demostrarlas y que si consideran que alguno de los grupos realiza una afirmación incorrecta, la refuten (situación de validación). Como cierre de la actividad, el maestro institucionalizará, en este caso, el concepto de estrategia ganadora. La finalidad de trabajos como este será que los estudiantes puedan enfrentarse a situaciones adidácticas, es decir, a problemas que deban resolver exitosamente de manera autónoma, sin la guía del maestro.

Una aproximación desde las prácticas sociales

A diferencia de los posicionamientos teóricos descritos que centran su atención en el aspecto cognitivo o en la triada alumno-saber-profesor, a fines de la década de los ochenta surgió una aproximación teórica que, sin descuidar al objeto matemático como foco de atención, centró su interés en la producción de dicho conocimiento y, sobre todo, en el papel que juegan en este proceso las prácticas sociales. Esta aproximación recibió el nombre de Socioepistemología y se plantea el examen del conocimiento matemático social, histórica y culturalmente situado, poniendo especial atención a las circunstancias que propiciaron su construcción y su posterior difusión (Cantoral et al., 2006).

Luego, adoptar esta postura implica reformular las preguntas de investigación en los aspectos cognitivo, didáctico y epistemológico, teniendo como base la componente social. Así, el aspecto cognitivo deberá ahora ser guiado por la pregunta *cómo los estudiantes y el profesor, interactivamente, construyen identidades, significados, sus realidades y su propia cognición*. El aspecto didáctico abordará cuestiones relativas a *los contextos argumentativos que se proponen a los estudiantes y las formas y mecanismos para argumentar y llegar a consensos*. Finalmente, la dimensión epistemológica se centrará en *analizar la naturaleza social de la construcción del conocimiento matemático, su conformación cultural y el papel esencial que desempeña en la acción humana* (Arrieta, 2003).

En el curso se eligió un trabajo realizado por Cantoral (2003), referido a la derivada, para ilustrar cómo se pueden emplear los instrumentos teóricos que proporciona este marco. En esta investigación se reflexiona sobre el tratamiento que se da a este objeto matemático en el contexto escolar[2]. Así, se señala que la derivada se presenta como una medida de inclinación de la recta tangente a una curva. Ello supone que la noción de pendiente, que fue introducida en la geometría (tangente a una circunferencia), ha adquirido cierta estabilidad. Luego se inicia un tratamiento algorítmico y teórico que consiste en enseñar a derivar funciones y a demostrar algunos resultados.

Al analizar los argumentos respecto a este concepto que emplean los estudiantes que cursaron cursos de cálculo, se observó que, pese al trabajo realizado en las clases, estos conservan la idea de tangente que proporciona la matemática griega de la antigüedad. Esta concepción es un obstáculo cuando se quiere tratar localmente la condición de tangencia, así como la necesidad de considerar a la tangente en movimiento y no estática, como en la geometría griega.

Luego, desde el enfoque socioepistemológico, se cuestiona cómo es que la noción de derivada como pendiente de una recta tangente ha logrado estabilizarse en la comunidad de profesores y estudiantes, si es que ha traído consigo una serie de conflictos entre los que destaca la comprensión del concepto de límite. Es fundamental entonces analizar las circunstancias sociales, históricas y culturales que propiciaron la construcción de este conocimiento

[2] Por *contexto escolar* se entiende no solo el que se presenta en la escuela sino también en centros de formación de educación superior.

matemático; para ello se recurrió a los orígenes de la noción de tangente.

Tras una investigación más profunda sobre la construcción de la derivada, se encontró que ésta tuvo dos significaciones epistemológicas distintas. Mientras que en el sentido de Cauchy se entendió como el límite del cociente incremental, en el de Lagrange se entendió como el coeficiente lineal del desarrollo en series de potencias de una función en torno de un punto dado.

Para Cauchy: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Para Lagrange:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + ...$$

Así por ejemplo, si se considera la función $f(x) = x^3$, se tendrá:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

en el sentido de Cauchy.

Y en el sentido de Lagrange,

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

e identificando los coeficientes, $f'(x) = 3x^2$.

En la investigación de Cantoral (2 003) se comenta que esta distinción va más allá de una cuestión de forma; el **uso** que se le da al objeto derivada es distinto. Desde esta perspectiva, sirve para estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o decrecimiento. Así, se propone cambiar el estatus de la noción de derivada al seno del cuerpo teórico, acompañándola de una reconstrucción racional apoyada en un paradigma distinto al que domina en la enseñanza contemporánea. Esto se lograría abandonando el paradigma basado en la postura Cauchy, que asume a los objetos matemáticos centrales del cálculo, la derivada y la integral como el resultado de una operación de límite aplicada a una cierta clase de funciones, y tendría repercusiones en el discurso matemático escolar. Esta visión del desarrollo del concepto es la que le da a la investigación un corte socioepistemológico.

Hacia un marco unificador

Por la complejidad que encierran los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se requiere contar con un cuerpo teórico lo suficientemente completo para poder abordar los diversos problemas de investigación que pueden plantearse. También es necesario contar con un marco metodológico que permita un análisis profundo de los fenómenos de estudio. Con esta intención, se ha desarrollado el paradigma de investigación denominado Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, pero teniendo en cuenta además la dimensión cognitiva individual. (Godino, 2008). Este modelo teórico contempla las diversas dimensiones presentes en un proceso de instrucción matemática de un determinado contenido matemático. Así, se consideran las siguientes dimensiones y sus respectivas trayectorias *epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y emocional (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc.de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas),* (Godino et al, 2008). El aprendizaje matemático se concibe como el resultado de los patrones de interacción entre los distintos componentes de dichas trayectorias.

Adicionalmente, y siendo coherente con la definición que manejan respecto a la actividad matemática, el EOS centra su atención en identificar estas dimensiones en las prácticas matemáticas, lugar del que emergen los objetos matemáticos con sus respectivos atributos.

Sin embargo, no son estos los únicos niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático. El EOS también ha desarrollado herramientas para la identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa) y para la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio, tal como lo señala D'Amore (2007).

Este modelo teórico se muestra lo suficientemente completo para poder abordar la mayoría de problemas que un investigador en didáctica de la Matemática pueda plantearse.

Conclusiones

Como puede observarse luego de esta síntesis, los diversos programas de investigación proveen al investigador de herramientas teóricas y metodológicas para estudiar las diversas dimensiones o facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Algunas de ellas centran su atención en aspectos cognitivos, otras en aspectos epistemológicos, otras en la componente social y hay algunas que tratan de abordar el problema de manera sistémica. Es necesario conocer los principios en los que se sustentan y cuáles son sus limitaciones para poder entender que hay vacíos que cubrir y que es necesario seguir en este largo camino de construir una teoría unificada de la cognición e instrucción matemática en beneficio del desarrollo de la comunidad científica y finalmente de los estudiantes de esta disciplina. El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática se presenta así como la mejor alternativa.

Referencias

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Barbosa Alvarenga, Karly.(2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, 6, 003, 199-219.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques. Dordrecht: Kluwer.

Cantoral, R. Enseñanza y aprendizaje en ambientes tecnológicos: El caso de la matemática escolar. En *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Capítulo 9. Tratamiento matemático y calculadoras gráficas. 169 – 184. Editorial Trillas. 1ª reimpresión 2003.

Cortez, J., García, J. y Nuñez, G. Software para la enseñanza de la derivada. *UMSNH. Extraído el 8 de mayo de 2008.* (En línea. Documento disponible en: http://www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-4.doc)

D'Amore, B. (2 006). *Didáctica de la Matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá-Colombia.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007).La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigm*a, Vol. XXVIII, Nº 2, 49-77.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Font, V. *Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las matemáticas* Revista EMA 2002 Vol 7, No 2, 127-170.

Glosario APOS
Disponible en:
http://www.personal.us.es/gavilan/alicante/glosario.htm#Descomposición
Tradución de Cooperative learning: Differences between group and individual processes of construction of the concept of inverse function, by D. Vidakovic. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, 1993.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. [Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm]

Godino, J. D. (2003).Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (En línea. Documento disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01_PerspectivaDM.pdf)

Hitt F. (1995) Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. *Revista Educación Matemática*, Vol. 7, No. 1, pp. 63-75.

Purcell, E. (1992) Cálculo con geometría analítica. Prentice Hall Hispanoamericana, S. A. pág. 152.