Enfoque geométrico del análisis real en varias variables

Mariano González Ulloa
Pontificia Universidad Católica del Perú

Roy Sánchez Gutiérrez
Pontificia Universidad Católica del Perú

Introducción

En los cursos de cálculo en varias variables que se desarrollan en los programas de nivel superior se estudian las funciones diferenciables poniendo mayor énfasis en la parte algebraica y dejando a un segundo plano el aspecto geométrico. Sin embargo este último enfoque es de gran importancia debido a que ayuda a visualizar e intuir los resultados algebraicos. Desde este punto de vista propusimos un taller en el cual se estudió la naturaleza geométrica de curvas y superficies en el espacio de tres dimensiones (P^3) que se desarrollará con la ayuda de una computadora y software apropiado para cristalizar la riqueza geométrica de los temas mencionados.

Por ello pensamos que a través de este taller se podía contribuir, de alguna manera, al desarrollo del pensamiento geométrico de los participantes. Con esta finalidad se hizo una breve exposición de los conceptos y resultados teóricos independientes del cálculo diferencial y integral para luego aplicarlos en ejemplos concretos. Cada participante disponía de una computadora en la que desarrolló las actividades propuestas.

Advertimos, sin embargo, que los tópicos que se abordaron no fueron tratados en forma exhaustiva, pues el objetivo del taller fue el tratamiento geométrico de curvas y superficies en el espacio tridimensional con el apoyo de los software Cabri 3D, Derive y Mathematica.

Al final del taller resolvimos, como aplicaciones, algunos problemas de optimización con restricciones, los cuales se desarrollaron usando geometría dinámica y las propiedades de la media aritmética y media geométrica.

Resumen

Realizamos el estudio de curvas y superficies en el espacio tridimensional como parte fundamental del análisis real en varias variables, enfatizando en el aspecto geométrico de las mismas y aprovechando las bondades de los software Cabri 3D, Derive y Mathematica los que usamos, también, para resolver algunos problemas de optimización con restricciones.

Palabras claves

Curvas, superficies, optimización, geometría dinámica, Cabri 3D, Derive, Mathematica.

Objetivos

Los principales objetivos del taller fueron:

- Representar gráficamente curvas y superficies en una computadora usando Cabri 3D, Derive y Mathematica.
- Graficar curvas que resultan de la intersección de dos superficies y también aquellas que están dadas mediante sus ecuaciones paramétricas.
- Resolver algunos problemas de optimización con restricciones usando geometría dinámica y sin el uso del cálculo diferencial.
- Mostrar la utilidad de la computadora en el estudio de temas del análisis en varias variables.

Desarrollo

1. Rectas, planos en P^3

1.1. Rectas

Una recta en P^3 queda determinada mediante un vector y un punto de paso. El vector se denomina *vector dirección* de la recta. Si P es un punto de paso y **V** es el vector dirección de una cierta recta L, el conjunto de puntos

$$\{Q \in P^3;\ Q = P + t\,V,\ t \in P\}$$

constituye la recta L.

De esta representación se obtienen otras representaciones denominadas ecuaciones *paramétricas* o ecuaciones *cartesianas* de la recta.

Ejemplo

Sean $P = (1;1;1)$ un punto de paso y $V = (3;4;-5)$ el vector dirección de la recta L. Su ecuación vectorial está dada por $(x; y; z) = (1;1;1) + t\ (3;4;-5)\ ;\ \ t \in P$, donde $(x; y; z)$ es un punto genérico de L.

Sus ecuaciones paramétricas (t como parámetro), se obtienen descomponiendo la ecuación vectorial en la forma

$$\begin{cases} x = 1 + 3\,t \\ y = 1 + 4\,t \quad ; \quad t \in P. \\ z = 1 - 5\,t \end{cases}$$

Despejando la variable *t,* de las ecuaciones anteriores, se obtienen las ecuaciones cartesianas de L:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}.$$

1.2. Planos

Para representar un plano es suficiente conocer un vector perpendicular al plano y un punto del plano. Si **N** es el vector normal y P_0 un punto conocido del plano, su ecuación vectorial está dada por:

$$\boldsymbol{N} \cdot (P - P_0) = 0$$

donde P es un punto genérico del plano y $\cdot$ significa producto interno de vectores.

Ejemplo

Denotemos con π el plano que pasa por $Q = (1;1;1)$ y tiene vector normal **N**= $(3;4;-5)$. Sea $P(x; y; z)$ un punto arbitrario del plano π, su ecuación vectorial está dada por:

$$N \cdot (P - Q) = 0 .$$

Reemplazando las componentes de ***N*** y las coordenadas de Q y P se obtiene $(3; 4; -5) \cdot (x-1; y-1; z-1) = 0$ de donde resulta la ecuación cartesiana del plano $3x + 4y - 5z - 2 = 0$.

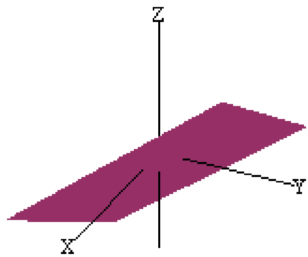

Figura 1. Plano

Observación.- Si una recta es la intersección de dos planos diferentes entonces las ecuaciones de los planos constituyen la forma general de la ecuación de la recta.

2. Superficies

En matemática, una **superficie** es un objeto que, intuitivamente hablando, es localmente "parecido" a una parte conexa de P^2. Eso significa que para cada punto de una superficie hay una pequeña región que la rodea y que es homeomorfa[1] a un disco abierto de P^2.

De manera informal, una superficie en P^3 se puede pensar como un objeto "bidimensional" que vive en el espacio P^3. Podemos pensar en una superficie como "una sábana que en el instante de tenderla se va volando por los aires de nuestra habitación". Si inicialmente la sábana se encuentra sobre una cama (está en el espacio P^2), entonces al levantarla "cobra vida" en el espacio P^3. Para un instante de tiempo muy pequeño (el que se demora para tomar una fotografía) se tiene una superficie en P^3.

Como casos especiales de superficies se tienen:

2.1. Superficies de revolución

Una superficie de revolución es aquella que se genera mediante la rotación de una curva plana, denominada *generatriz*, alrededor de una recta fija llamada *eje de rotación*, la cual se halla en el mismo plano de la curva.

Cualquier posición de la generatriz se denomina *meridiano* y cada circunferencia descrita por un punto de la generatriz al rotar alrededor del eje de rotación se denomina *paralelo* de la superficie. Los nombres de meridiano y paralelo son referidos respecto al eje de rotación elegido.

Puesto que una superficie es de dimensión dos (inmerso en P^3) las coordenadas de cualquier punto de la superficie pueden describirse en función de dos parámetros.

Ejemplos

1. Si hacemos rotar la parábola de la figura 2,

---

[1] ver [4] Pag 131.

C: $\begin{cases} x^2 + 2z = 6 \\ y = 0 \end{cases}$

que se encuentra en el plano XZ, alrededor del eje Z, entonces la superficie generada, S, tiene por ecuación $x^2 + y^2 = -2(z-3)$ y se denominada *paraboloide circular* (figura 3).

En efecto:
Sea P(x; y; z) un punto genérico de la superficie S. Como P(x; y; z) pertenece a la circunferencia con centro en C(0; 0; z) y que pasa por el punto Q(x_1; 0; z) perteneciente a la curva, entonces la distancia del punto P al punto C es igual a la distancia del punto C al punto Q, es decir que

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x_1^2}$$

Pero $x_1^2 = 6 - 2z$, entonces $x^2 + y^2 = -2(z-3)$ es la ecuación del paraboloide.

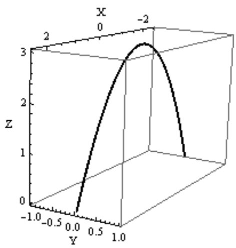

Figura 2. Curva C

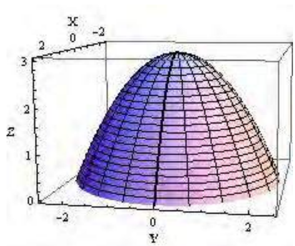

Figura 3. Superficie generada por C

En esta superficie los meridianos son parábolas y los paralelos son circunferencia como se muestra en la figura 3.

2. Si la curva

$$\Gamma: \begin{cases} z = \dfrac{1}{y^3} \\ x = 0 \end{cases}$$

que se encuentra en el plano YZ, la rotamos alrededor del eje *Y* origina la superficie de revolución que se muestra en la Figura 4 la cual se describe mediante los parámetros *u* y *v* a través de la función vectorial

$$\vec{r}(u,v) = (u\,Cos(v);\ \frac{1}{\sqrt[3]{u}};\ u\,Sen(v))\ ;\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi\ .$$

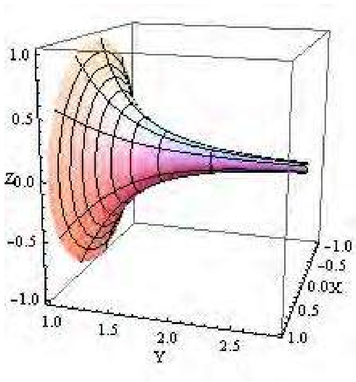

Figura 4. Superficie de revolución

2.2. Cilindro circular recto

Construya dos rectas paralelas. Gire una de ellas alrededor de la otra. La recta fija constituye el eje del cilindro y la que rota, la generatriz. La distancia entre ambas rectas es el radio del cilindro circular recto.

Otra alternativa para construir un cilindro circular recto, en Cabri 3D, es la siguiente:

Construya una circunferencia, C, y la recta, E, que pase por el centro de C y sea perpendicular al plano que contiene a C. Elija un punto, P, en C y construya por dicho punto la recta L paralela a E. El cilindro circular recto con directriz C, generatriz L y eje E se obtiene activando la opción *Trayectoria* en L y la opción *Animación* en el punto P.

2.3. Cono circular recto

Construya dos rectas no perpendiculares que se intersecan. Rote una de ellas alrededor de la otra. El punto de intersección de las rectas es el vértice, la recta fija es el eje del cono y la recta que gira la generatriz.

Otra alternativa para construir un cono circular recto es la siguiente:

Usando Cabri 3D construya una circunferencia, C, y la recta, E, que pase por el centro de C y sea perpendicular al plano que contiene a la circunferencia. Fije un punto, V, en la recta E. Elija un punto, P, en C y construya la recta L que pasa por P y por V. Active la opción *Trayectoria* sobre L y active la opción *Animación* en el punto P.

El punto V es el vértice, la recta E es el eje, la circunferencia C es la directriz y la recta L es la generatriz del cono.

3. Curvas

De manera intuitiva, una curva se piensa como un objeto unidimensional. Por ejemplo la trayectoria de una partícula en movimiento o el resultado de doblar (sin romper) un trozo de alambre muy delgado. De manera más formal una curva en P^3 es un objeto unidimensional formado por el conjunto de puntos *P(x; y; z)* donde tanto *x, y* y *z* dependen de un cierto parámetro *t*. Es decir,

$$x=f(t); \; y=g(t); \; z=h(t)$$

donde t varía en algún intervalo de los números reales. Como caso particular, una curva se puede representar mediante dos ecuaciones independientes (las ecuaciones de dos superficies diferentes cuya intersección es la curva). La totalidad de los puntos y solamente de aquellos, cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones es una curva en el espacio.

Ejemplos

1. Si en la parábola $x+1=(y-2)^2$ hacemos la sustitución y=t+1 entonces

   $x=t^2-2t$, con lo cual se obtienen las ecuaciones paramétricas de la parábola:

   $$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t+1 \quad ; t \in R \end{cases}$$

   Cuyo gráfico se muestra en la figura 5.

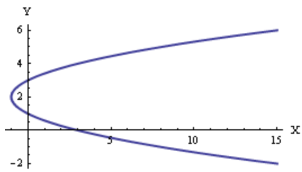

Figura 5. Parábola

2. La curva descrita vectorialmente mediante

   $$\vec{\alpha}(t) = (\cos(t); sen(t); \frac{t}{10}) \; ; \; 0 \le t \le 4\pi$$

   se denomina hélice circular. Intuitivamente esta curva se envuelve sobre un cilindro circular recto de radio 1, debido a que si $x=cos(t)$, $y=sen(t)$, entonces $x^2+y^2=1$.

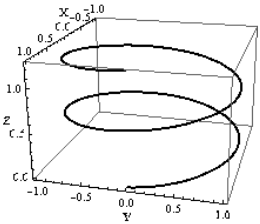

Figura 6. Hélice circular

3. **Curva como intersección de dos superficies** Cuando el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y+z=2$ se intersecan resulta una elipse que se puede generar mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = sen(t) \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = 2 - sen(t) \end{cases},$$

ecuaciones que se pueden obtener visualizando la proyección de la curva en el plano XY, o en forma vectorial

$$\vec{\alpha}(t) = (Cos(t);\ Sen(t); 2 - Sen(t))\ ;\ 0 \le t \le 2\pi\ .$$

En la figura 7 se representan el cilindro y el plano, mientras que en la figura 8 se muestra la elipse.

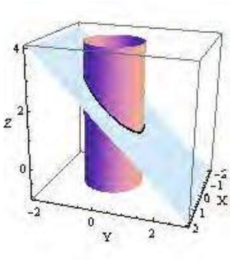

Figura 7. Cilindro y plano

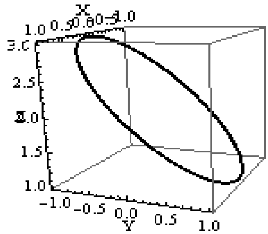

Figura 8. Elipse

4. Las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = (4 + sen(20t))\cos t \\ y = (4 + sen(20t))\, sen t \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = \cos(20t) \end{cases}$$

generan la espiral toroidal, nombre debido a que la curva se envuelve alrededor de un toro como se muestra en las figuras 9 y 10.

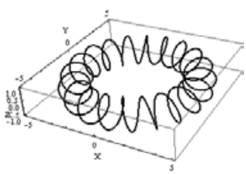

Figura 9. Espiral toroidal

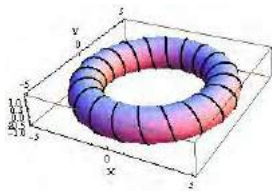

Figura 10. Toro

4. Problemas de optimización con restricciones

Un problema de optimización matemática se puede modelar considerando una función objetivo dependiendo de una o varias variables y un conjunto de restricciones expresadas en términos de la o las variables que intervienen en el problema. En un problema de optimización se trata de tomar la mejor decisión, es decir, la decisión óptima, la cual debe elegirse respetando todas las restricciones impuestas. Los problemas de optimización aparecen en todas las áreas donde se deben tomar decisiones, incluso en los quehaceres cotidianos.

En este taller propusimos algunos problemas de optimización con ciertas restricciones, problemas que usualmente se resuelven recurriendo al cálculo diferencial, determinando el valor máximo o mínimo de una función real. Aquí los resolvimos recurriendo a la geometría dinámica y usando media aritmética y media geométrica solamente.

Ejemplos

1. Encontrar el volumen de la mayor caja rectangular situada en el primer octante, con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$.

   Solución

   Sea P(x; y; z) un punto del plano $x + 2y + 3z = 6$ ubicado en el primer octante. Llamemos S al paralelepípedo que tiene tres aristas en los ejes coordenados, uno de sus vértices en el origen y el vértice diagonalmente opuesto en el punto P (figura 11).

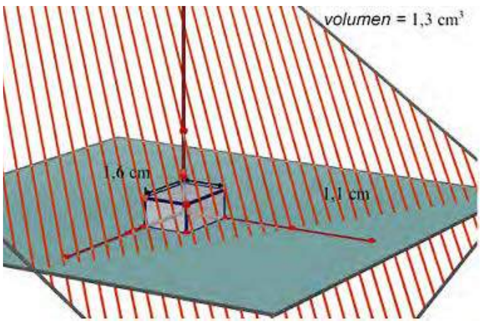

Figura 11. Caja y plano

Sea $v(x;y) = x\,y\,\dfrac{(6-x-2y)}{3}$ el volumen del sólido S.

Luego, usando la relación entre la media aritmética y la media geométrica se tiene

A
s
í
e
l
m
á

$$
\begin{aligned}
v(x;y) &= x\,y\,\frac{(6-x-2y)}{3} \\
&= \frac{1}{6}x(2y)(6-x-2y) \\
&\le \frac{1}{6}\left(\frac{x+2y+6-x-2y}{3}\right)^3 \\
&= \frac{1}{6}2^3 = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Así el máximo volumen de la caja rectangular es $\frac{4}{3}$ que se alcanza cuando x = 2y = 6 –x- 2y es decir cuando x = 2 e y = 1.

2. De todas las cajas tridimensionales con una superficie total dada, pruebe que el cubo es la de mayor volumen.

Solución

Sean x, y, z, respectivamente, el largo, el ancho y la altura de la caja con área de superficie total fija *S*. Si *V (x; y; z)* es el volumen de dicha caja entonces *V (x; y; z) = x y z* y *S = 2(xy + xz + yz)*.

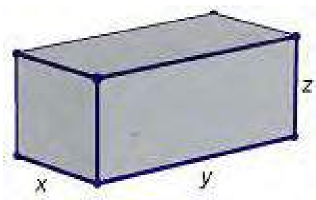

Figura 12: Caja tridimensional

Usando la relación entre la media aritmética y geométrica se tiene

$$\begin{aligned} (V(x;y;z))^2 &= (x\,y\,z)(x\,y\,z) \\ &= (x\,y)(x\,z)(y\,z) \\ &\le \left(\frac{xy+xz+yz}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{S}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

De donde resulta

$$V(x;y;z) \le \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$$

La igualdad se cumple cuando $xy = xz = yz$, es decir cuando $x = y = z$, con lo cual se tiene que la caja es un cubo.

5. Actividades

5.1 Rectas y planos

Las siguientes actividades se desarrollaron usando el software Cabri 3D.

1. Construya un vector no perpendicular al plano base.
2. Construya el vector que tiene como punto inicial A(2;-1;4) y como punto final B(2;3;4).
3. Construya la recta que pasa por el punto P(1;1;1) y es paralela al vector V(-2;1;2).
4. Construya el plano con normal **N**(1;1;1) y que pasa por el punto P(2;2;2).
5. Construya el plano que pasa por los puntos A(1;0;3), B(0;2;4) y C(2;2;0).
6. Construya el plano cuya ecuación es $3x-2y+z=1$.

5.2. Superficies de revolución:

La siguiente actividad se realizó usando Cabri 3D. Considere la curva (hipérbola en el plano XY)

$$C: \begin{cases} y^2 - 4x^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

a. Si se hace girar C alrededor del eje Y se forma la superficie S denominada **Hiperboloide de revolución de 2 hojas**, cuya ecuación cartesiana es $y^2 - 4x^2 - 4z^2 = 4$.

b. Si se hace girar C, en este caso, alrededor del eje X, se obtiene la superficie denominada **Hiperboloide de revolución de una hoja**.

Escriba las ecuaciones paramétricas y construya las gráficas en ambos casos.

5.3. Superficies

Las siguientes actividades se desarrollaron usando Derive y Mathematica.

1. Construya la superficie cuya representación vectorial es $\vec{r}(u,v) = (u\,v;\, u^2 + v;\, u + v^2)$ donde $-2 \leq u \leq 2$, $-2 \leq v \leq 2$.

2. Construya la superficie generada por $\vec{r}(u,v) = (u\,v;\, u\,Cos(v);\, u\ Sen(v))$ donde $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

3. Construya la superficie generada por $\vec{r}(u,v) = (u + \ v;\ u\ Cos(v);\ u\ Sen(v))$ donde $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

4. Dadas dos circunferencias C_R y C_r de radios R y r (R>r>0), respectivamente. Coloque el centro de C_r en C_R de manera que los planos que las

contienen se corten ortogonalmente y el plano que contiene a C_r pase por el centro de C_R. Desplazando el centro de la circunferencia C_r en la circunferencia C_R, se genera una superficie. Construya tal superficie. Identifique dicha superficie. Deduzca sus ecuaciones paramétricas.

5. Dada la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$; $y = 0$ rotarla
   a) Alrededor del eje Y.
   b) Alrededor del eje X.

5.4. Curvas

Las siguientes actividades se desarrollaron usando Derive.

1. Construya la intersección de un cilindro y un plano. Por ejemplo el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $x + y - z - 3 = 0$
2. Construya la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con:
   a) el plano *z=3*
   b) el plano *2x+z=1*
   c) el plano *y=0*
3. Construya la intersección del cono circular recto $(y-4)^2 = (x-2)^2 + z^2$ con un plano en diferentes posiciones. Identifique la curva en cada caso.

5.5. Problemas de optimización

Resuelva los siguientes problemas de optimización bajo las restricciones dadas:

a) De un pedazo de cartón de forma rectangular y de área conocida, S, construya una caja rectangular sin tapa cuyo volumen sea máximo. Halle las dimensiones de la caja.

b) Se desea construir un envase de forma cilíndrica de 1 litro de capacidad. Halle las dimensiones del envase para que se use la menor área del material en su construcción.

c) Halle los puntos de la esfera, con centro en el origen de coordenadas y radio 2, más cercanos y más alejados del punto A(3, 1, -1)

d) El plano $x+y+2z=2$ interseca al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse. Encuentre los puntos en dicha elipse más próximos y más alejados del origen.

Conclusiones

1. El uso de software ayudó a:
   a) Visualizar la forma de las superficies y curvas en P^3.
   b) Deducir la ecuación de una superficie de revolución.
   c) Manipular los objetos construidos y visualizarlos desde distintos ángulos.
   d) Hacer conjeturas para imaginar la forma de las curvas y superficies a partir de sus ecuaciones.
2. En el desarrollo del taller se puso énfasis en la parte geométrica adecuando los conceptos del análisis en varias variables al nivel de los profesores de educación secundaria.
3. Los problemas de optimización constituyen una alternativa para introducir algunos conceptos geométricos.

Referencias

Barbolla, R.; Cerdá, E. y Sanz, P.(200) "Optimización: Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía". Ed. Prentice Hall. Madrid.

Cabri 3D. http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html

Derive. http://derive.uptodown.com/

Do Carmo, Manfredo. (1976) Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. IMPA.

Stewart, James. (2000) *Cálculo Trascendentes Tempranas*. Internacional Thomson Editores, S.A. 4ta edición.

Taylor Angus E., Mann W. Robert. (1989) *Fundamentos de Cálculo Avanzado.* Editorial Limusa S. A. México D. F.