

# Manipulación simbólica de funciones B-splines con Mathematica versión 6.0

Andrés Iglesias Prieto  
Universidad de Cantabria

Robert Ipanaqué Chero  
Universidad Nacional de Piura

Yesenia Saavedra Navarro  
Universidad Alas Peruanas

## Resumen

Las curvas y superficies B-spline son las más comunes y más importantes entidades geométricas en muchos campos, como el diseño y la fabricación computarizada (CAD / CAM) y gráficos por ordenador. Sin embargo, hasta donde conocemos no hay sistema de cálculo simbólico especializado que incluya rutinas para tratar con Bsplines en forma simbólica hasta el momento. En el presente trabajo se describe un nuevo programa en Mathematica para calcular las funciones Bspline simbólicamente. Además, con este paquete, también es posible calcular las curvas Bsplines y Bsplines racionales simbólicamente. El rendimiento del código, junto con la descripción de los principales comandos, se examina utilizando algunos ejemplos ilustrativos.

## Definición de funciones Bspline.

Sea  $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+k}\}$  una sucesión no decreciente de números reales llamados *nodos*.  $\xi$  es llamado el *vector nodo*. La  $i$ -ésima función base *B-spline*  $N_{i,k}(t)$  de orden

$k$  (o equivalentemente, grado  $k-1$ ) esta definida por las relaciones recursivas

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \leq t < x_{i+1}, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t-x_i}{x_{i+k-1}-x_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{x_{i+k}-t}{x_{i+k}-x_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t), \\ i = 1, \dots, n-(k-1).$$

## Metodología

Se hace uso de la definición recursiva de Carl de Boor para funciones Bspline. En base a esta definición se implementa un algoritmo para obtener las expresiones simbólicas de las funciones Bspline y posteriormente de las curvas Bspline y Bspline racionales. Los códigos de los programas se implementan en el sistema de cálculo simbólico (SCS) Mathematica v6.0. Además la interpretación geométrica de las pruebas obtenidas se efectúa aprovechando la potencia gráfica del referido SCS.

*Un paquete en Mathematica para manipular simbólicamente las funciones Bspline.*

El paquete de comandos implementado se llama SymbolicBsplines y se inicializa mediante:

`<<SymbolicBsplines``

Este paquete incorpora el comando: `N`.

## Funciones Bspline

---

```
: Uniform $, 3 |  
: | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 |
```

---

Definición de un vector nodo uniforme.

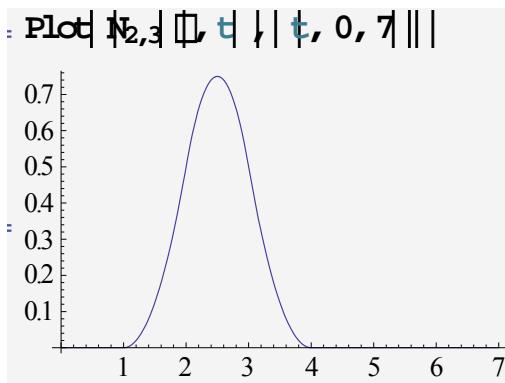
---

```
N2,3 ⊥ t |
```

$$\left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \square t \square 1 \\ 1 \square t \square 2 \\ 2 \square t \square 3 \\ 3 \square t \square 4 \\ 4 \square t \square 5 \\ 5 \square t \square 6 \\ 6 \square t \square 7 \\ \text{True} \end{array} \right]$$


---

Función Bspline de orden 3, simbólica.

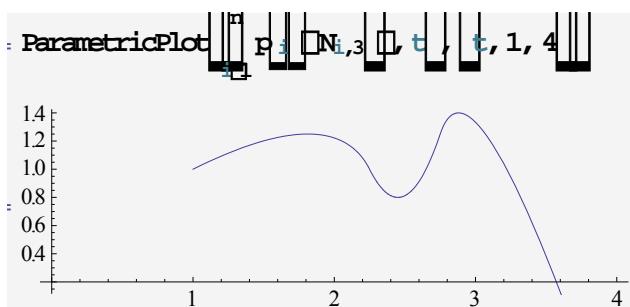


Gráfica de la función Bspline de orden 3.

### Curvas Bspline

```
: p[[1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 0],  
  Length[p];  
  {1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4};  
  n, P, i, Ni, 3, t]  
  [1/4 t^14, 1/4 t^13, 3 t^2, 1/4 t^3, 3 t^2, 1/4 t^2, 1/4 t^1, 1/4 t^0];  
  2 t^5, 32 t^24, 5 t^2, 32 t^16, 1/4 t^32, 1/4 t^96, 1/4 t^15, 1/4 t^0];  
  1, 2, 3, 4, True]
```

Curva Bspline simbólica.

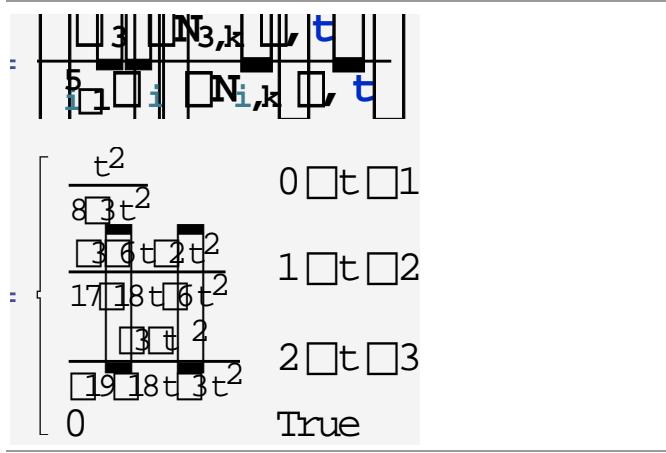


Gráfica de la curva Bspline.

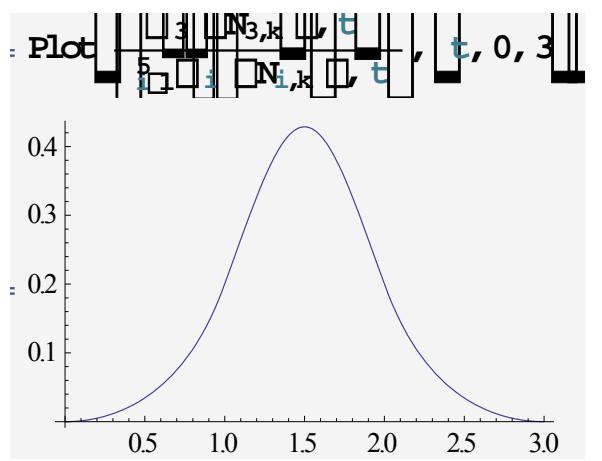
### Funciones Bspline racionales

```
: {{1, 1, 1, 4, 1, 1},  
  Open, 5, k, 3};  
  | 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3|
```

Definición de vectores nodo y homogéneo.



Función Bspline racional simbólica.

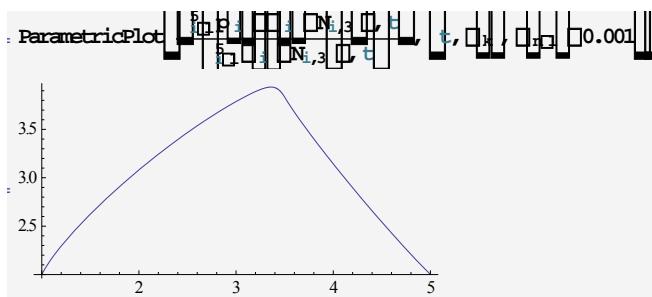


Gráfica de la función Bspline racional.

### Curvas Bspline racionales

```
p[[1, 2], [1.5, 3], [3.4, 4], [4, 3], [5, 2]];
n[Length p];
k[3];
t[[1, 1, 5, 1, 1]];
Open[n, k];
5[[1, 3, 3, N[3, 3], t];
5[[1, 3, 3, N[3, 3], t];
1.1. t[7.25 t2], 44.15 t2];
12 t2];
212 t2];
20.544. t[4.25 t2], 35.102 t[34 t2];
12 t[4 t2];
66.543. t[7.5 t2], 15.194 t[15 t2];
19 t[2 t2];
0, 0];
0 <= t <= 1;
1 <= t <= 2;
2 <= t <= 3;
True
```

Curva Bspline racional simbólica.



Gráfica de la curva Bspline racional.

En este trabajo se presenta un nuevo paquete en Mathematica v6.0 para manipular las funciones Bspline en forma simbólica. Esta manipulación permite obtener curvas Bspline

y curvas Bspline racionales. Este paquete ha sido utilizado con éxito por nuestros alumnos durante el octavo semestre en el curso de introducción al diseño geométrico en el nivel universitario. Sin embargo, el paquete también se puede aplicar en los cursos de Postgrado.

### Referencias

- Choi, B.K., Jerard, R.B. (1998). Sculptured Surface Machining. Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
- Echevarría, G., Iglesias, A., Gálvez, A. (2002). Extending neural networks for B-spline surface reconstruction. *Lectures Notes in Computer Science*, 2330, 305-314
- Iglesias, A., Echevarría, G., Gálvez, A. (2004). Functional networks for B-spline surface reconstruction. *Future Generation Computer Systems*, 20(8), 1337-1353
- Maeder, R. (1991). Programming in Mathematica, Second Edition, Addison-Wesley, Redwood City, CA.
- Patrikalakis, N.M., Maekawa, T. (2002). Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing. Springer Verlag.
- Piegl, L., Tiller, W. (1997). The NURBS Book (Second Edition). Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- Rogers, D.F. (2001). An Introduction to NURBS. With Historical Perspective. Morgan Kaufmann, San Francisco.
- Wolfram, S. (1999). The Mathematica Book, Fourth Edition, Wolfram Media, Champaign, IL & Cambridge University Press, Cambridge.