Intuición y rigor en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú

Resumen

Se muestra que en el desarrollo de la matemática está presente la intuición interrelacionada con el rigor y se destaca su importancia en la educación matemática, como tema presente en la agenda de investigación contemporánea. Se propone encajar la intuición en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) usando una metáfora vectorial en la que el proceso intuitivo se considera un vector con tres componentes que son tres de los 16 procesos primarios del EOS: idealización, generalización y argumentación. Finalmente, se enfatiza y se ilustra con ejemplos la importancia de hacer interactuar la intuición y el rigor en la resolución de problemas.

Introducción

La relación de la matemática con la realidad es muy estrecha. Es un proceso dinámico que se da ante la necesidad de resolver problemas de la realidad, los aportes de la matemática para encontrar las soluciones, la construcción de modelos matemáticos con ese propósito, la verificación o nuevas aplicaciones de tales modelos en la realidad, la aparición de nuevos problemas, y así sucesivamente. La intuición juega un papel importante en este proceso y va acompañada o complementada con el rigor, también en una relación de mutua retroalimentación, pues lo que se intuye se formaliza para examinarlo con rigor y esto a su vez permite intuir nuevos resultados, que nuevamente se analizan con rigor, y así sucesivamente.

Es fundamental que estas relaciones dinámicas se tengan muy presentes y se evidencien en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en los diversos niveles educativos. En particular, es muy importante estimular el desarrollo de la intuición y su interacción con el análisis riguroso, en las sesiones de resolución de problemas.

Intuición y rigor en la historia de las matemáticas

En la historia de las matemáticas hay casos notables en los que lo intuitivo antecedió a lo riguroso. Uno de los más destacables es el del cálculo infinitesimal, cuya formalización y presentación rigurosa se hizo en el siglo XIX, con Cauchy, Weierstrass y Dedekind, luego de una larga historia de aproximaciones y desarrollos intuitivos, como los de Eudoxo y Arquímedes (a.C.), Cavalieri, Torricelli, Fermat, Kepler, Huygens y Barrow, y los más difundidos – y más formalizados – de Newton en 1653 y de Leibinitz en 1684.

Es particularmente destacable el aporte de Fermat a la solución de los problemas de optimización, años antes de que se conozcan los métodos ahora tan difundidos del cálculo diferencial. Fermat, en el año 1637, publicó su *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (Método para investigar máximos y mínimos), basado en las siguientes reglas, en las que se puede ver claramente que no hay el nivel de formalización y rigor actual, pero que las ideas son esencialmente las mismas y es fácil deducir su origen intuitivo:

- *Sea A un término relacionado con el problema.*
- *La cantidad máxima o mínima está expresada en términos que contienen sólo potencias de A;*
- *Se sustituye A por A+E , y el máximo o mínimo queda entonces expresado en términos de potencias de A y E;*
- *Las dos expresiones del máximo o mínimo se hacen "adiguales", lo que significa algo así como "tan aproximadamente iguales como sea posible";*
- *Los términos comunes se eliminan;*

- *Se dividen todos los términos por una misma potencia de E de manera que al menos uno de los términos resultantes no contenga a E;*
- *Se ignoran los términos que aún contienen E;*
- *Los restos se hacen iguales.*

(Andersen, 1984, p. 38)

También cabe mencionar que Jean Baptiste-Joseph Fourier en 1826 mostró métodos muy relacionados con los que se usan al resolver problemas de la programación lineal, que fue desarrollada a mediados del siglo XX.

> *The theoretical insight given by this method is demonstrated as well as its clear geometrical interpretation. By considering the dual of a linear programming model it is shown how the method gives rise to a dual method. This dual method generates all extreme solutions (including the optimal solution) to a linear programme. Therefore if a polytope is defined in terms of its facets the dual of Fourier's method provides a method of obtaining all vertices (Williams, 1986, p. 681)*

Ciertamente, es natural atribuir a la intuición y al talento matemático la formulación de métodos que años – o siglos – más tarde aparecen como parte del desarrollo de una teoría rigurosamente formalizada.

Hechos como estos nos muestran la relación estrecha entre intuición y rigor, y han llevado a destacados personajes de la matemática a tomar posición respecto a este asunto. Baste mencionar a Félix Klein (Alemania, 1849 – 1925), destacado geómetra, autor del famoso programa de Erlangen, quien afirmó que "*En cierto sentido, las matemáticas han progresado más gracias a las personas que se han distinguido por la intuición, no por los métodos rigurosos de demostración*" (Perero, 1994, p. 101) y a L. E. J. Brouwer (Holanda, 1881 – 1966), matemático famoso, conocido ampliamente por su teorema del punto fijo y con significativos aportes a la topología, que es considerado creador de la corriente matemática del intuicionismo. H. Poincaré (1932), ocupándose de la lógica y la intuición en las matemáticas, da una visión interesante al considerar dos tipos de espíritus matemáticos: *el lógico* y *el intuitivo*. Nos dice:

> "Unos están preocupados ante todo por la lógica; al leer sus obras, se está tentado a creer que han avanzado paso a paso, con el método de un Vauban que dirige trabajos de aproximación contra una plaza fuerte sin abandonar nada al azar. Los otros se dejan guiar por la intuición y hacen desde el primer asalto conquistas rápidas, pero a veces precarias, como intrépidos guerreros" (p. 11)

Intuición y rigor en la educación matemática

Si con intuición y rigor se va desarrollando la matemática, resulta obvio que la intuición y el rigor deben estar presentes en la formación matemática de nuestros estudiantes. Quizás lo más difundido es la importancia del rigor en la formación matemática, aunque no siempre las acciones concretas se orientan de la manera más adecuada y – seguramente con muy buenas intenciones – se han dado extremos enfatizando la formalización y el rigor en la educación básica, que no han contribuido realmente a lo que se pretendía y han sido ampliamente comentados por matemáticos y educadores. Ciertamente, no tiene sentido la matemática sin el rigor, pero éste debe ser cuidadosamente cultivado, sin quemar etapas e interactuando con la intuición. Es importante tener en cuenta que Mosterín (1980, p.16) considera tres niveles diferentes de precisión y rigor en el concepto de prueba: el intuitivo o ingenuo, el axiomático y el formalizado. Consideramos que el nivel de rigor exigible en la educación básica es fundamentalmente el primero y no pretender llegar al segundo sin haber puesto énfasis en el primero.

El rigor y la intuición están presentes en la discusión de temas actuales de la educación matemática, como lo demuestra la conferencia de David Tall (2005) en Bélgica: "A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof', en la cual plantea como una interrogante fundamental

> *What are the respective roles of intuition and rigor? How could the requirements concerning both aspects be modulated?*

También, D. Tirosh y P. Tsamir se ocuparon del tema en su conferencia plenaria "Intuition and rigor in mathematics education" en el *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI* (Roma, marzo del 2008).

Hay numerosas experiencias didácticas y estudios de psicólogos y educadores que muestran la presencia de la intuición en el aprendizaje de las matemáticas y en particular en la resolución de problemas. Hay aportes muy valiosos de Piaget y Fischbein y últimamente de D. Tirosh, P. Tsamir y R. Stavy.

Piaget

En diversos escritos, en particular en su famosa obra "Seis estudios de psicología" (1992), Piaget distingue entre intuición primaria y articulada y las relaciona, sobre todo, con el paso de la etapa preoperatoria a la operatoria. La intuición juega un papel fundamental en su teoría de las etapas; en concreto, la intuición resulta básica para convertir las acciones en operaciones (acciones interiorizadas, reversibles). En la etapa preoperatoria, el niño suple la lógica por la intuición, simple interiorización de las percepciones y los movimientos en forma de imágenes representativas y de "experiencias mentales", que por tanto prolongan los esquemas senso-motrices sin coordinación propiamente racional. La intuición se basa más en lo perceptible que en la lógica: por ejemplo, para un niño de este periodo, una hilera de 10 fichas rojas y una hilera de 12 fichas azules, ambas de la misma longitud, tienen la misma cantidad de fichas, porque atiende al efecto óptico global, no a las distancias de las fichas entre sí.

En un estudio más extenso sobre la intuición (Piaget y Beth, 1980), Piaget reflexiona sobre las relaciones entre evidencia, intuición e invención. En su capítulo 9, en un amplio estudio, considera que existen intuiciones empíricas (como el peso) e intuiciones operatorias (el orden, la correspondencia término a término), que para él son las que tienen verdadero interés desde el punto de vista matemático. Este tipo de intuición la subdivide a su vez en intuiciones simbolizantes (por imágenes) y operatorias en sentido estricto y afirma que la primera se subordina a la segunda y que ésta se desarrolla ilimitadamente por el mecanismo de la "abstracción reflexiva".

Fischbein

Efraim Fischbein es uno de los psicólogos que más estudió aspectos de la educación matemática y en el libro "Intuition in science and mathematics" que publicó en 1987 esboza una "teoría de la intuición" que constituye para la comunidad de investigadores una herramienta muy útil para la interpretación de fenómenos en educación. En él, el término "intuición" es usado como equivalente a *conocimiento intuitivo*; es decir, no como una fuente o un método, sino como un tipo de cognición. Fischbein aclara que no debe confundirse intuir con percibir. Lo segundo es una cognición inmediata. Intuir va más lejos de los hechos dados, implica una extrapolación más allá de la información directamente accesible. En una definición preliminar, establece que

> "*…intuitive cognition is characterized by self evidence, extrapolativeness, coerciveness and globality*."
> (Fischbein, 1994, p. 14)

Al clasificar las intuiciones según su origen, considera como *primarias* aquellas que se desarrollan en cada individuo como consecuencia de sus propias experiencias personales, independientemente de cualquier instrucción sistemática y como *secundarias* las que no tienen un origen natural, en la experiencia normal de una persona cualquiera, sino que surgen por influencia de instrucciones sistemáticas, del aprendizaje de conceptos, propiedades o resultados y de razonamientos más avanzados. Fischbein afirma que "la categoría de intuiciones secundarias implica asumir que se pueden desarrollar nuevas intuiciones con raíces no naturales" (Fischbein, 1994, p. 68) y más adelante cita a Patrick Suppes, refiriéndose a la importancia de desarrollar intuiciones para encontrar y dar demostraciones matemáticas:

> *Put in another way, what I am saying is that I consider it just as necessary to train the intuition for finding and writing mathematical proofs as to teach intuitive knowledge of geometry or of real number system* (Suppes, 1966, p. 70)

Reglas intuitivas

Es importante tener en cuenta que la intuición también puede conducir a conclusiones incorrectas y que hay investigaciones al respecto. Algunas de ellas las podemos encontrar en Stavy, Babai, Tsamir, Tirosh, Fou-Lai Lin y Macrobbie, 2006. Estos investigadores están desarrollando una teoría sobre reglas intuitivas. Basados en sus observaciones a las respuestas de niños, de diversas edades y lugares, a tareas de física, química, biología, y matemáticas han identificado tres reglas intuitivas que las denominan:

- más A – más B,
- misma A – misma B, y
- todo puede ser dividido inacabablemente

y afirman que muchas respuestas incorrectas están relacionadas con ellas.

A modo de ilustración sobre la primera regla, resumimos un ejemplo que los autores comentan en el citado artículo:

Cuando a niños de 14 a 15 años se les presenta un gráfico como el que se muestra en la figura 1a, un altísimo porcentaje sostiene que los ángulos α y β son iguales; sin embargo, cuando se les presenta un gráfico como el que se muestra en la figura 1b, un alto porcentaje afirma que β es mayor que α, influenciado por la mayor longitud de los segmentos que forman β

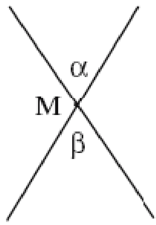


Figura 1ª

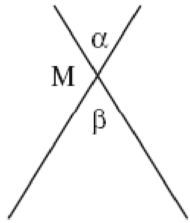


Figura 1b

Enfoque ontosemiótico

El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (conocido como EOS), desarrollado por investigadores contemporáneos de la educación matemática como Juan D. Godino, Vicenç Font y Carmen Batanero, entre otros, es un valioso marco teórico de tipo holístico que también permite investigar integradamente el rigor y la intuición. El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática: como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida; como lenguaje simbólico; y como sistema conceptual lógicamente organizado. Algunos constructos del EOS son los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos, las configuraciones epistémicas y las cognitivas, las facetas duales, los procesos matemáticos, los criterios de idoneidad y la metodología. Hay amplios desarrollos de este enfoque en Godino Batanero y Font (2007); Font (2007); Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006); y D'Amore y Godino (2007); y un resumen en Malaspina (2008).

En el EOS, una de las maneras de estudiar la relación entre un determinado proceso, con otros procesos, consiste en situar el proceso que nos interesa – en este caso los procesos intuitivos – en el centro de una figura con un hexágono y dos decágonos (figura 2), para relacionarlo con los procesos de problematización, comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización, y los procesos relacionados con las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales (institucionalización / personalización; generalización / particularización; descomposición / reificación; materialización / idealización; representación / significación). Esta es una técnica que ya se ha seguido para estudiar los procesos metafóricos en el marco del EOS (Acevedo, 2008) o el proceso de resolución de problemas (Gusmao, 2006).

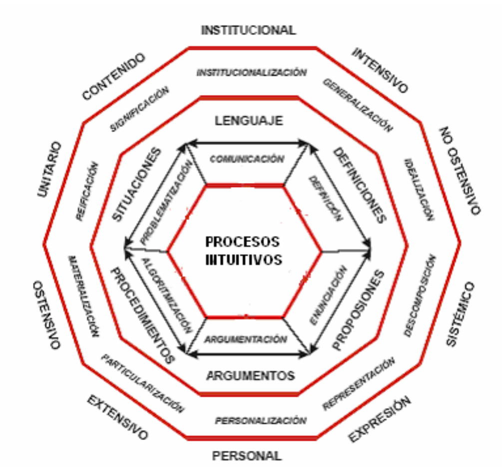


Figura 2. Los procesos intuitivos en el EOS

En este gran marco, y observando la figura 3, podemos ver aspectos de la intuición presentes en tres procesos fundamentales considerados en el EOS: la *idealización*, cuando un ostensivo extensivo (por ejemplo un par de trazos rectilíneos que se intersecan en un punto; que es ostensivo por ser percibido claramente y es extensivo por ser un caso específico) pasa a ser un no ostensivo extensivo, al considerar los trazos como segmentos de recta o como rectas, manteniendo su carácter de específico; la *generalización*, cuando el no ostensivo extensivo pasa a ser un no ostensivo intensivo, al considerar que

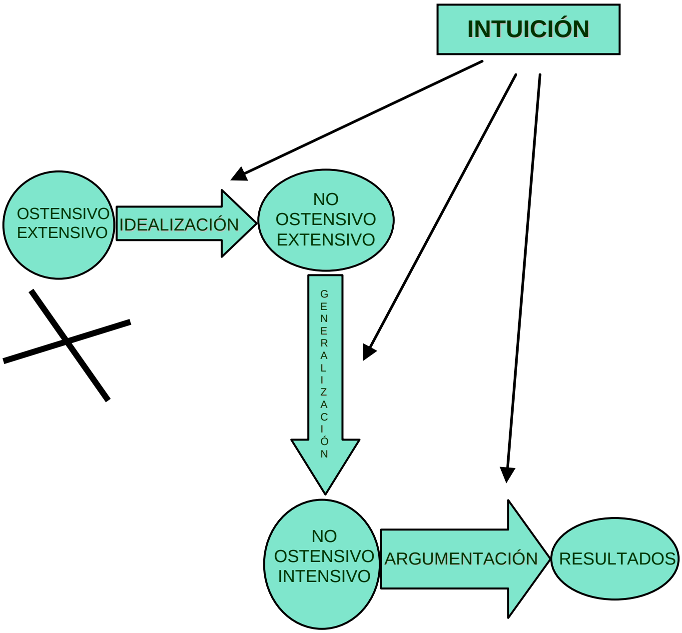


Figura 3

los trazos representan a cualquier par de rectas con un punto de intersección (la intuición permite ver lo general en lo particular); y la *argumentación*, al obtener como resultado, que cuando dos rectas cualesquiera se intersecan en un punto, quedan determinados dos pares de ángulos opuestos y que los ángulos de cada par tienen la misma medida.

De lo observado, podemos afirmar que, en nuestra opinión, la manera de encajar la intuición en el EOS consiste en utilizar una metáfora vectorial en la que el proceso intuitivo se considera un vector con tres componentes (alguno de ellos podría ser “cero” en algunos casos), los cuales serían tres de los 16 procesos primarios del EOS: idealización, generalización y argumentación:

Intuición = (*idealización, generalización, argumentación*)

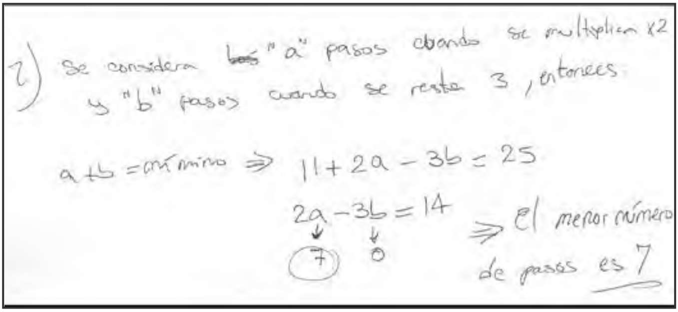
Intuición y rigor al resolver problemas

Siendo la resolución de problemas un aspecto esencial de la matemática, la intuición y el rigor deben estar presentes al resolver problemas. Es tarea de los docentes estimular la interacción entre intuición y rigor, de modo que haya una retroalimentación positiva. Una primera aproximación intuitiva puede ser potenciada con un adecuado nivel de formalización y la búsqueda del rigor en las afirmaciones; y éstas, a su vez, pueden inducir a intuir la solución de otras partes del problema, de otras formas de resolverlo, o llevar al convencimiento de que la conjetura inicial, basada en una mirada intuitiva, no es la correcta. Y así es la actividad matemática. Reducir la resolución de problemas a la aplicación de ciertas reglas o rutinas, es recortar la creatividad, el desarrollo de la intuición y el pensamiento matemático. Es, pues, muy importante un adecuado equilibrio entre intuición y rigor. Mostraremos algunos casos para ilustrar que la preocupación por la formalización, el rigor y la intuición no siempre es adecuadamente orientada, desfavoreciendo el estímulo a la intuición.

Problema 1

> Llamamos “paso” aplicado a un número, cuando se le multiplica por 2 ó cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.

Mostramos la solución de un alumno que cursaba el segundo ciclo de estudios de ingeniería


2) Se considera ~~los~~ "a" pasos cuando se multiplica x2
y "b" pasos cuando se resta 3, entonces

$a+b=$ mínimo $\Rightarrow 11+2a-3b=25$

$\underbrace{2a}_{7}-\underbrace{3b}_{0}=14$ $\Rightarrow$ el menor número de pasos es 7

Se percibe que hay uso de lenguaje formalizado y una intención de ser riguroso, quizás por influencia de los cursos universitarios de matemática ya aprobados, pero que tal actitud no está complementando una reacción natural ante este problema, de ubicarlo en un contexto aritmético y tantear algunas posibilidades calculando alguna secuencia de pasos. Así, no llega a percibir que su formalización no está reflejando o modelizando la situación planteada. Si bien es cierto que cuando a y b son no negativos y cumplen que $2a - 3b = 14$, entonces el mínimo valor de $a + b$ es 7, con $a = 7$ y $b = 0$, al aplicar 7 veces el paso "multiplicar por 2", partiendo del número 11, no se llega a 25. Esta "solución formal" estaría alejando al estudiante de una proposición fácilmente intuible, según la cual es imposible llegar a 25 partiendo de 11 y aplicando varias veces solo uno de los pasos descritos.

Esto nos hace ver lo importante que es comprender bien el problema y dejar que la intuición intervenga desde esta fase indispensable para resolverlo. En las experiencias tenidas, ha sido más productiva la formalización acompañada de la intuición.

Problema 2

A continuación reproducimos una página que aparece en un texto de tercer grado de secundaria[1] y en otro texto de cuarto grado de secundaria[2] con una situación-problema contextualizada. El propósito es ilustrar que tal situación se modeliza y se resuelve con una función cuadrática y que es importante la obtención de un valor maximizante. Ciertamente la intención es buena, pero ya la situación planteada no es muy motivadora – en la perspectiva del estudiante – pues se pide encontrar “la cantidad de estudiantes que debe ir a una excursión para que la empresa de turismo realice el mejor negocio”, lo cual, cuando se organiza una excursión, normalmente, no es algo que tenga especial interés para los estudiantes.

Luego de la página reproducida hacemos algunos comentarios.

---

[1] Veiga, A. et al (2004). CL@VES.COM 3 Matemática 3º de secundaria. Lima: Santillana, p. 291

[2] Mina, D. et al (2005). Matemática 4. Lima: Santillana, p. 24

Análisis de problemas sobre funciones cuadráticas

Muchas situaciones requieren de la aplicación de las funciones cuadráticas para poder solucionarlas. Frecuentemente es necesario averiguar en qué condiciones estas funciones alcanzan un valor **máximo** o un valor **mínimo**.

Ejemplo 19

Los alumnos de un colegio quieren ir de excursión. Una empresa de turismo les cobra S/. 70 por persona si van 40 alumnos y les rebaja S/. 1 por persona por cada alumno adicional. Además, acepta que viajen 65 alumnos como máximo y no la organiza si viajan menos de 40. Determinamos la cantidad de alumnos que deben ir de excursión para que la empresa de turismo realice el mejor negocio.

- Elaboramos una tabla para obtener una expresión que nos permita hallar el precio total que cobra la empresa de turismo según la cantidad de alumnos que van de excursión.

Cantidad total de alumnos		Precio por alumno (S/.)	Precio total (S/.) = $f(x)$
Si van 40 alumnos:	40	70	$40 \cdot 70$
Si va 1 alumno más:	40 + 1	70 − 1	(40 + 1)(70 − 1)
Si van 2 alumnos más:	40 + 2	70 − 2	(40 + 2)(70 − 2)
Si van 3 alumnos más:	40 + 3	70 − 3	(40 + 3)(70 − 3)
Si van x alumnos más:	$40 + x$	$70 - x$	$(40 + x)(70 - x)$

Observamos que el precio total depende de la cantidad de alumnos x que vayan.

- Resolvemos $f(x) = (40 + x)(70 - x)$ y obtenemos $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 30x + 2\,800}$.
- Como queremos averiguar el mayor precio total que puede cobrar la empresa de turismo por la excursión, buscamos el **máximo** de la función.
- Como la cantidad total de alumnos no puede ser mayor que 65, averiguamos la cantidad de alumnos x que podrían ir:

  $40 + x \leq 65 \rightarrow x \leq 25 \rightarrow D(f) = [0; 25]$ alumnos
- Hallamos los puntos de intersección de la parábola con el eje X:

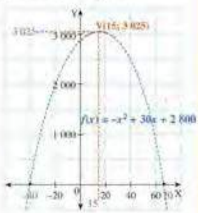
  $$x = \frac{-(30) \pm \sqrt{(30)^2 - 4(-1)(2\,800)}}{2(-1)}$$

  $$x = \frac{-30 \pm 110}{-2} \rightarrow x_1 = -40 \text{ y } x_2 = 70$$
- Hallamos la abscisa del vértice:

  $$x = \frac{-40 + 70}{2} = 15$$
- Hallamos la ordenada del vértice:

  $f(15) = -(15)^2 + 30(15) + 2\,800 = 3\,025$

  Entonces el punto máximo de la función es V(15; 3 025), vértice de la parábola.

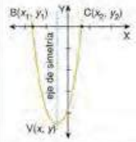


- Interpretamos: El mayor precio total (S/. 3 025) se puede cobrar cuando viajan 15 alumnos más.

Para que la empresa de turismo realice el mejor negocio, deberán ir de excursión 40 + 15 = 55 alumnos. En este caso, obtendrían S/. 3 025.

Sean $B(x_1, y_1)$ y $C(x_2, y_2)$ los puntos de intersección de la parábola con el eje X. La abscisa del vértice es la semisuma de los valores x_1 y x_2, ya que la parábola es simétrica con respecto a su eje.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



Unidad 9 / FUNCIONES 291

Comentarios:

1. En general se percibe un procedimiento formal y rígido.
2. La inducción que se hace para obtener la expresión general de la función cuadrática correspondiente, la consideramos adecuada.

3. La descripción de la variable x no corresponde con el uso que se hace de esta variable en la tabla para inducir la función. La variable x no representa "la cantidad de alumnos que vayan", como se dice a continuación del cuadro, sino la cantidad adicional de alumnos, sobre 40, que podrían ir a la excursión. (Como se dice respecto al valor maximizante, 15, en los párrafos finales).

4. El valor maximizante de la variable se obtiene usando la propiedad de ser semisuma de las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con el eje X. Propiedad cierta pero innecesaria en este caso (se enuncia al margen, sin argumento alguno). Para hallar tales puntos de intersección se resuelve la ecuación cuadrática empleando la fórmula general, a pesar de que la forma original de la función es un producto de dos binomios de primer grado, lo cual permite obtener inmediatamente las raíces de la ecuación cuadrática.

5. Consideramos que para ilustrar que la función alcanza un valor máximo para un determinado valor de la variable, es más adecuado expresar la función cuadrática completando un binomio al cuadrado:

$$f(x) = -x^2 + 30x + 2800 = 3025 - (x - 15)^2$$

Así, siendo $(x - 15)^2 \geq 0$, a 3025 "siempre se le quita algo" salvo que $(x - 15)^2$ tenga el valor cero; es decir, cuando $x = 15$, que es, entonces, el valor maximizante de la variable. De este modo, se observa que el valor máximo alcanzable por $f(x)$ es 3025 y se usa un razonamiento que favorece la intuición.

6. Antes de hacer un desarrollo formal para la obtención del valor máximo, sería ilustrativo y estimulante de la intuición optimizadora, hacer conjeturas sobre la existencia de un valor maximizante o minimizante de la variable. Observar

> en el contexto del problema, mostrando tablas y haciendo gráficas, por ejemplo, que al dar valores crecientes a la variable los valores crecen y luego decrecen, lo cual hace intuir un valor maximizante que se puede conjeturar e ir aproximando. Así se brindaría oportunidades para usar el ensayo y error, el cálculo mental y la calculadora, y para mostrar las ventajas de la modelización y de los recursos algebraicos.

Estas son dos muestras del poco cuidado que se pone en la resolución de problemas a la intervención y al estímulo de la intuición. Es, pues, muy importante que los profesores tengan experiencias de sesiones de resolución de problemas en las que se convenzan de lo mucho que se puede aprender – matemática y didácticamente – si las dificultades se van proponiendo gradualmente y con preguntas adecuadas; si se deja tiempo para pensar, conjeturar y desarrollar diferentes maneras de resolver un problema; si se resuelven problemas en grupos; si a partir de un problema se crean nuevos problemas intuyendo generalizaciones o considerando casos particulares; en fin, estimulando que la creatividad y la intuición fluyan y se complementen con la formalización y el rigor. Con estas perspectivas y con problemas concretos para diversos niveles educativos, se muestran y desarrollan ejemplos en Malaspina, U., 2005, 2006, 2007 y 2008b.

Referencias

Acevedo, J. I. (2008). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona. España.

Andersen, K. (1984). *Las técnicas del cálculo, 1630-1660. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Grattan-Guinness (comp.). Madrid: Alianza Universidad.

D´Amore, B. y Godino, J.D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10(2), 191-218.

Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics*. Holland: Reidel Publishing Company. Second printing.

Godino, J. D., Batanero, C y Font, V. (2007). The Onto Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, vol. 39, núms. 1-2, pp. 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M.R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(1), 117-150.

Gusmao, T.R.S. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica*. Tesis doctoral, Universidade de Santiago de Compostela. España.

Malaspina, U. (2005) El rincón de los problemas. *Unión. Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática.* España: Números del 1 al 4. http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Malaspina, U. (2006) El rincón de los problemas. *Unión. Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática.* España: Números del 5 al 8. http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Malaspina, U. (2007) El rincón de los problemas. *Unión. Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática.* España: Números del 9 al 12. http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Malaspina, U. (2008) *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Malaspina, U. (2008b) El rincón de los problemas. *Unión. Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática.* España: Números del 13 al 15. http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Mosterin, J. (1980). *Teoría axiomática de conjuntos*. Barcelona: Ariel.

Perero, M. (1994) *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Piaget, J.(1992). *Seis estudios de psicología*. Labor: Barcelona

Piaget, J. y Beth, E.W. (1980). *Epistemología matemática y psicología*. Barcelona: Crítica, Grupo Editorial Grijalbo.

Poincaré, H. (1932). *La valeur de la science*. París: Flammarion.

Stavy, R. et al (2006). Are intuitive rules universal? *International Journal of Science and Mathematics Education* 4: p. 417 – 436

Tall, D. O. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Irem de Strasbourg. 11, 195–215.

Williams, H. (1986). Fourier's Method of Linear Programming and its Dual. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 93, No. 9, pp. 681-695.