Desarrollo de la idea intuitiva del concepto de límite de una función real

Luis Masgo Lara
Universidad Católica Sedes Sapientiae

Resumen

La siguiente experiencia ha sido realizado con los alumnos del curso de Análisis I, correspondiente al tercer ciclo de la UCSS en las horas que práctica que están designadas para dicho curso; y que surge luego de haber llegado al convencimiento de la poca efectividad de las propuestas tradicionales para la enseñanza y aprendizaje del cálculo en general, lo que a su vez trae como consecuencia, la dificultad de los alumnos para la adquisición de los diferentes conceptos matemáticos. En esta experiencia se busca que los alumnos introduzcan el concepto matemático límite de una función real, de una manera intuitiva, buscando a su vez, caracterizar los factores que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho concepto, para que por medio de él se puede formular una metodología que permita interiorizar el concepto y lograr así, un aprendizaje significativo. El trabajo tiene como sustento teórico lo desarrollado por Godino Y Batanero (1994) en cuanto al significado personal e institucional de los objetos matemáticos, la teoría de la transposición didáctica desarrollado por Chevallard (1985), la teoría del constructivismo, la heurística, la resolución de problemas; el papel de los errores en la construcción del conocimiento, las nuevas tecnologías y el trabajo colaborativo. Esta experiencia, consiste en dos actividades de aprendizaje que contienen situaciones problemáticas para ser desarrolladas en aula individualmente y grupalmente por los alumnos, que les permitirán descubrir el concepto de límite de una función real de una manera intuitiva, siendo ellos los verdaderos

participes de su propio aprendizaje dejando al profesor en un rol de guía y facilitador.

Problemática

Los profesores de matemáticas de enseñanza superior (universidad) al presentar el concepto de límites generalmente siguen la forma tradicional y en otros casos al buscar simplificar las dificultades del aprendizaje del concepto, cometen errores que muchas veces son difíciles de erradicar en los alumnos. Entre las principales dificultades de aprendizaje que tienen los alumnos podemos mencionar:

a) Los alumnos ven el concepto de límite como una barrera, llegar a un máximo valor

b) Los alumnos creen que el concepto de límites es una simple sustitución

c) Los alumnos piensan que el signo = en el concepto de limites es porque el límite es alcanzado.

d) Los alumnos realizan una mala lectura de gráficas con respecto al límite.

e) Los alumnos creen que las funciones discontinuas no tienen límite.

Justificación

El concepto de límites es uno de los primeros conceptos del cálculo que involucra **procesos infinitos** y que sirve de base para otros conceptos como derivadas e Integrales, por lo tanto los conflictos de aprendizaje en los alumnos se presentan inmediatamente al inicio del Cálculo, por lo tanto el aprender el concepto de LÍMITES es importante porque:

- Permite describir funciones con propiedades específicas, como su comportamiento a determinados valores que se le da a la variable independiente.

- Es la noción fundamental del Cálculo, ya que los límites aparecen en la definición de casi todos los conceptos importantes del cálculo, desde la continuidad, hasta las derivadas, las integrales definidas, las sucesiones, las series.

- Es un tema que se encuentra en todos los silabo de Análisis I de las universidades peruanas.
- Forma parte del currículo de la enseñanza del bachillerato internacional.

Marco teórico

El marco teórico que da soporte a mi trabajo esta basado en:

A) El significado personal e institucional se los objetos matemáticos

En este trabajo trato de aplicar las nociones teóricas desarrolladas en los artículos de **Godino y Batanero (1994; 1998a, en prensa)** sobre el significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Godino y Batanero plantean una reflexión sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, adoptándose un punto de vista pragmático en el que el significado de los objetos matemáticos depende del contexto en que se usan, es así que ellos han encontrado que la práctica realizada por las instituciones en el manejo de un concepto determina el aprendizaje del mismo. Los autores no reducen el significado de un objeto matemático a su definición, sino que además se debe tener en cuenta las situaciones–problemas en las cuales interviene como herramienta de resolución y los medios de expresión correspondientes.

B) El Objeto Matemático y la Teoría de la Trasposición Didáctica

La teoría de la transposición didáctica fue introducida por **Chevallard (1991)**, él introdujo el término para referirse a los cambios que experimenta el conocimiento matemático especializado; es decir, cuando este conocimiento es adaptado para pasar a ser objeto de enseñanza por medio de un contenido curricular al alcance de los aprendices. La noción de transposición didáctica puede interpretarse **como proceso,** ya que es visto como el conjunto de transformaciones que experimenta un conocimiento para que pueda ser introducido en un sistema de enseñanza ó puede ser interpretado **como resultado,** en donde la transposición didáctica se refiere a las diferencias que podemos observar entre un conocimiento matemático dentro de la institución matemática y este mismo conocimiento dentro de una institución educativa dada.

C) La teoría Constructivista

Esta teoría parte de los estudios elaborados por Piaget y se basa en que el conocimiento es una construcción que realiza el individuo a partir de su experiencia previa y mediante su interacción con el medio circundante. Los puntos centrales del constructivismo son las siguientes:

1. El aprendizaje es un proceso de **construcción del conocimiento** (no es una copia o absorción de la realidad).
2. El aprendizaje **depende del conocimiento previo** (la gente usa su conocimiento para construir nuevos conocimientos).
3. El aprendizaje está fuertemente **influenciado por la situación en la que tiene lugar** (qué aprendemos, depende del contexto en que lo hacemos).

   Las teorías del aprendizaje desarrolladas bajo la influencia del psicólogo soviético Lev Vygotsky (1896-1934), conocidas como **corrientes socioculturales**, agregan a estas tres puntos, una cuarta:

4. El aprendizaje tiene lugar, primordialmente, en la **interacción social.**

A diferencia de la enseñanza tradicional la perspectiva constructivista reivindica el papel activo del alumno y su responsabilidad en el aprendizaje, pero no despojando al maestro de su papel central en este proceso. Si bien el alumno construye su propio saber, el maestro tiene la misión de guiarlo hacia el conocimiento socialmente aceptado [el conocimiento científico], poniéndolo en contacto con situaciones y problemas interesantes que le permitan desarrollar distintos medios para elaborar los conceptos científicos.

D) La heurística y la resolución de problemas

La heurística se identifica como el arte o la ciencia del descubrimiento. En matemáticas el pionero fue **George Poyla** quien desarrollo una teoría heurística para la resolución de problemas en matemáticas y dar descripciones detalladas de varios métodos heurísticos. La investigación educativa actual ha mostrado que las llamadas **situaciones problemáticas**, constituidas por problemas no rutinarios, son capaces de movilizar los conocimientos previos del estudiante y le resultan tan atractivos que los considera un reto intelectual, por lo tanto son importantes para el aprendizaje de las matemáticas. Estas situaciones problemáticas pone al alumno a prueba sus saberes previos, establece sus límites y alcances y elabora modificaciones encaminadas hacia el aprendizaje del muevo concepto.

E) El trabajo colaborativo

El aprendizaje colaborativo se refiere a la actividad que pequeños grupos desarrollan en clase, es así como los alumnos forman “pequeños equipos” después de haber recibido instrucciones del profesor. Dentro de cada equipo los estudiantes intercambian la información y trabajan una tarea hasta que todos sus miembros la han entendido y terminado, aprendiendo a través de la colaboración. Este método logra un mejor resultado de aprendizaje que el modelo tradicional pues recuerdan por más tiempo el tema desarrollado en clase. Además desarrolla en los alumnos habilidades de razonamiento superior al de la enseñanza tradicional, habilidades de pensamiento crítico y finalmente los alumnos se sienten más confiados y aceptados por ellos mismos y por los demás.

F) El papel de los errores en la construción del conocimiento

Si aceptamos que el alumno trata siempre de aplicar sus conocimientos previos a nuevas situaciones, extendiéndolos, generalizándolos y modificándolos cuando sea necesario, tendremos que aceptar que estos intentos pueden llevarlos por caminos infructuosos; el resultado será lo que tradicionalmente se conoce como un “error”. Sin embargo, estos errores son justamente, el medio para que el alumno confronte sus conocimientos, los modifique y elabore nuevos conceptos que de ninguna manera deben ser considerados como fracasos. “Aprender de sus errores” es la máxima constructivista.

G) Uso de las nuevas tecnologías

Las nuevas tecnologías son mejor aprovechadas por niños y jóvenes; computadoras, calculadoras y la televisión, pueden convertirse en "sustitutos tecnológicos" de las relaciones personales por la forma en que la familia evoluciona en este siglo XXI. No cabe duda que la tecnología ha acompañado a la enseñanza desde siempre, aunque no siempre coinciden en la en su ritmo. Sin olvidar la escritura y los libros... en la actualidad las herramientas novedosas son las herramientas multimedia; estas bien utilizadas pueden llamar la atención de estos jóvenes y niños que ya están acostumbrados a relacionarse por estos medios y proporcionar así un medio para un mejor aprendizaje. En el presente trabajo se hace uso del “**sketchpad” ,** para facilitar el aprendizaje del concepto de límite de una función.

Propuesta de intervención didáctica

Objetivos

- Mejorar la propuesta docente en la enseñanza aprendizaje del concepto de Límites.
- Implementar como estrategia de aprendizaje el trabajo colaborativo.
- Lograr un manejo adecuado del paquete "**sketchpad**" para la enseñanza del concepto de Límites.
- Favorecer la motivación del alumno hacia las matemáticas.

Acciones

El aula cuenta con 40 alumnos por lo que se formarán 8 grupos de 5 alumnos cada uno. Se programaron 2 actividades, la primera de ellas (ACTIVIDAD N° 1) tiene como propósito reforzar los conocimientos previos (FUNCIONES) por medio de un trabajo colaborativo (trabajo en grupos). Los alumnos ya han recibido la clase de funciones en los ciclos anteriores, por lo tanto esta actividad es importante porque reactivará los conocimientos con las que llega el alumno al curso de ANÁLISIS I. En esta actividad N°1, cada grupo recibirá 3 ejercicios que buscan revisar dos aspectos fundamentales de una función de variable real que son: Dominio y Rango de una función real y su gráfica. La idea es que los alumnos de cada grupo se dividan el trabajo de manera que en base a sus saberes previos puedan enfrentarse a la situación problemática de los ejercicios propuestos (los dos primeros ejercicios) para luego exponer sus descubrimientos con el resto de alumnos del grupo y confrontar sus ideas con los demás, teniendo al profesor como guía y facilitador del aprendizaje. Luego el grupo se enfrenta a una nueva situación problemática (3er ejercicio), en donde los conocimientos adquiridos individualmente por los integrantes y sus conclusiones en grupo les permitirán discutir, debatir, plantear y proponer una solución al nuevo problema, todo esto contara con la asesoría permanente del profesor. Finalmente los alumnos deben exponer al resto de compañeros haciendo uso de papelógrafos que previamente el profesor les ha proporcionado. Esta exposición con la colaboración del profesor se aclararan los puntos que sean necesarios. En esta 1era actividad, hay dos grupos que recibirán el mismo material, y tiene una duración aproximada de 1 hora académica. A continuación doy una muestra de lo que harían el grupo 1 y 5.

ACTIVIDAD Nro 1

Grupo 1 y 5

1. ***Halle el dominio y rango de las siguientes funciones:***

   a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

2. ***Haga el gráfico de las siguientes funciones:***

   a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ ***b)*** $f(x) = 3\sqrt{x-1} + 2$

3. ***Haga el gráfico de la siguiente función***

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 \ , & si \ -8 < x < -2 \\ x^2 - 4 \ , & si \ -2 \le x \le 4 \\ |x+3| \ , & si \ \ 4 < x \end{cases}$$

,e indique su dominio y rango

Con respecto a la segunda actividad (ACTIVIDAD Nro 2), en ella se introduce la noción del concepto de límite de una función real. Esta actividad también será realizada en grupo, y esta vez se formaran 10 grupos de 4 alumnos cada uno en donde cada grupo tendrá como reto analizar un problema diferente. Cada alumno en su respectivo grupo debe enfrentarse a una situación problemática, tomando como base sus saberes previos, estos serán apoyados por la participación del docente en la guía del mismo. Los alumnos exponen a sus compañeros de grupo sus descubrimientos, que podrían estar errados o no y se confrontan con los conocimientos de los demás. En este punto el grupo contara con una herramienta que es un paquete matemático llamado SKETCHPAD que les permitirá dilucidar ciertas dudas, básicamente en el comportamiento geométrico de las funciones. Finalmente para comprobar el aprendizaje del concepto a todos los grupos se les proporciona el ejercicio que dice PARA

*TODOS, de manera que en unos 10 a 15 minutos puedan dar respuesta a las preguntas de dicho ejercicio. Para esta 2da actividad hay dos grupos que recibirán el mismo material, tal como se mostrara mas adelante. Esta segunda actividad tiene una duración aproximada de 3 horas académicas***.**

ACTIVIDAD Nro 2

*GRUPO 1 y 6***:** **Dada la función:** $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4 + x}$

a) *Determine su dominio y rango.*

b) *Complete el cuadro:*

x	**f(x)**
-7	
-6	
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	

¿Ha encontrado usted dificultad para llenar el cuadro?, si es así, ¿A que crees que se deba?

c) *El equivalente de f(x) es g(x) = 4-x, ¿Si? , ¿No? ¿Porque?*

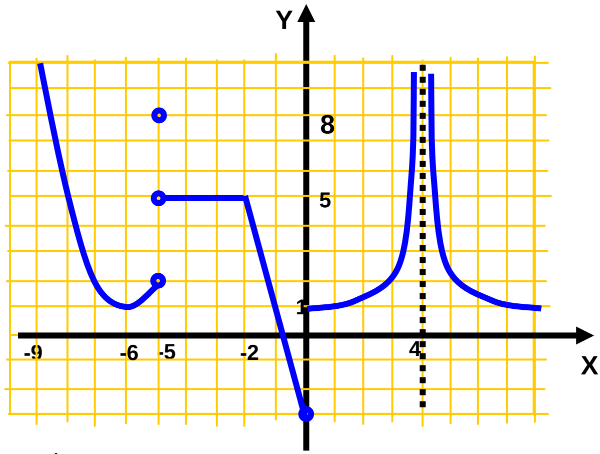
d) *Si usted da valores a x cercanos a -4 , a que valor se aproxima f(x)*
Sugerencia: aproxímese con valores cercanos a –4 por la izquierda y derecha

e) *De acuerdo a lo calculado anteriormente ¿Puede Usted concluir en algo?*

f) *Realice su grafica*

g) Exprese con sus palabras que sucede con $f(x)$ cuando "x" se acerca a -4.

PARA TODOS: Dada la siguiente gráfica de la función f



Determine:

a) El dominio y rango de f

b) Complete la tabla siguiente:

Valor de a	$f(a)$	Cuando x se aproxima al valor de a por la izquierda, f(x) se aproxima a	Se denota por	Cuando x se aproxima al valor de a por la derecha, f(x) se aproxima a	Se denota por	¿Existe el límite en a?
-6						
-5						
-4						
-2						
0						
4						

Conclusiones

En cuanto a la experiencia que he tenido como docente (asesoría de prácticas de Análisis I) y basado en el desarrollo de estas dos actividades descritas anteriormente, he podido apreciar las diferentes concepciones que tienen los alumnos con respecto al concepto de límites, muchas de ellas erróneas, pero también que al culminarla se ha logrado de los alumnos una respuesta satisfactoria en varios aspectos como:

- Que la mayoría de alumnos han aprendido el concepto de límites de una función al presentarlos de una manera más intuitiva.
- Que la mayoría de los alumnos aprenden a trabajar colaborativamente, respetando la opinión de sus demás compañeros.
- Que la mayoría de los alumnos empiezan a desarrollar capacidades de análisis y síntesis.
- Que la mayoría de los alumnos empiezan a abordar los problemas matemáticos por medio de diferentes estrategias.

Por lo tanto este trabajo tiene como principal e intención que sirva a los docentes de Análisis una alternativa de cómo explicar o introducir el concepto de límites basado en un aprendizaje donde el alumno sea partícipe de la construcción de su propio conocimiento.

Recomendaciones

- Preparar guías de aprendizaje que relacionen el nuevo concepto con los conocimientos previos del alumno. (modelo constructivista)
- Que se realicen en aula trabajos colaborativos.
- Usar correctamente las nuevas tecnologías y en el momento adecuado.

- Apoyar la intuición como medio de razonamiento y reflexión del concepto.
- Tener conciencia de la importancia de los aspectos afectivos y motivacionales.

Referencias

Ayala, Francisco; Campos, Gerardo. (1998). Estrategias y técnicas didácticas en el rediseño. México: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

Díaz, Marcos. (2006). Didáctica de la Matemática. Lima: Pontificia Universidad católica del Perú. Facultad de Educación.

Farfán, Rosa María. El curso de precálculo: Un enfoque gráfico. Publicaciones Latinoamericanas en Matemática Educativa 5(1), 206-211.

Ingeniería didáctica en precálculo. Publicaciones Latinoamericanas en Matemática Educativa 8(1), pp. 457-462.

Garbin, Sabrina. (2005) ¿Como piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol8, num 002, pp. 169-193.

Godino, Juan. (1994) Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática - Perspectiva de la didáctica de la matemáticas como disciplina científica.

Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol 9, num 001, pp. 117-2150.

El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol 10, num 002, pp. 191-218.

Blazquez, Sonsoles. (2006) Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol 9, num 002, pp. 189-209.

Stewart, James. (1999) Cálculo, Conceptos y Contextos. México: Editorial Thomson.