

# Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOE

Cerapio Quintanilla Córdor  
Universidad de Huancavelica

## Resumen

En la década de los 90, se inicia en los Estados Unidos un fenómeno ligado a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, ampliamente investigado y reportado por investigadores como: Dubinsky, Harel (1992); Yerushalmy y Schwars (1993); David Tall, Mercedes McGowen y Phil DeMarois (1996); Daniel Breidenbach, et al., (1992) quienes ilustraron en el campo matemático para llevar adelante investigaciones en el proceso educativo desde la óptica epistemológica de una función. Al respecto, Daniel Breidenbach, et al (1992, 247) manifiesta, pese a que los estudiantes universitarios llevan varios cursos de matemáticas, aun no tienen una comprensión adecuada del concepto de función.

El trabajo de investigación consiste en el *estudio de la concepción de las funciones* en los estudiantes del nivel universitario de la especialidad de Matemática y Física bajo la perspectiva de la Teoría APOE. Los estudiantes que participan en el trabajo de investigación cursan el VIII y X ciclo, equivalente al 4to y 5to año de Facultad, en la Facultad de Educación de la Universidad Nacional de Huancavelica. La principal problemática que atiende este proyecto consiste en la ausencia de significados del concepto de función, en las clases de matemática básica y análisis matemático. En la actualidad, la enseñanza y el aprendizaje de concepto de función se centra en los aspectos formales y algebraicos, dejando de lado aspectos epistemológicos desde una visión más amplia.

Consideramos relevante el tema de funciones porque es el eje central en los procesos de aprendizaje de las matemáticas (análisis matemático o cálculo), por lo que se requiere crear situaciones que equilibren los diferentes acercamientos teóricos y metodológicos.

### **Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte**

La investigación es cualitativa y permite realizar **un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOE**, en los estudiantes de la Universidad Nacional de Huancavelica. La teoría APOE desarrollada por el Dr. Ed Dubinsky y RUMEC permite ver las construcciones mentales (acción proceso, objeto y esquema) llamados abstracciones reflexivas (desde un punto de vista cognitivo). Por otra parte, dentro de la teoría APOE Asiala, et al (2004, 5) considera un aspecto importante la descomposición genética “una descomposición genética de un concepto es un conjunto estructurado de constructos mentales, el cual podría describirse como el concepto que puede desarrollarse en la mente de un individuo”, para el desarrollo de la investigación se ha desarrollado la descomposición genética del concepto de función. Finalmente, se ha presentado situaciones a priori (examen de entrada) para verificar en qué condiciones se encuentran los estudiantes, para luego pasar al ciclo ACE expuesto en la metodología.

### **Metodología empleada**

De acuerdo al tipo de investigación emprendida, la investigación es cualitativa pues pretende investigar la comprensión por parte de los estudiantes sobre la noción de función. Su desarrollo comprende tres etapas: la primera es realizar una presentación a priori, un conjunto de 33 situaciones a 20 estudiantes; la segunda (en ejecución), una actividad desarrollada de conceptualización denominado **ACE** (actividad, discusión en clases y ejercicios) por Dubinsky; y tercero, será una presentación de resignificación.

Para el proceso del trabajo de investigación se ha tomado el lenguaje de programación **ISETLW** (Interactive Set Language window), programa que permite desarrollar la conceptualización del concepto de función. El tratamiento educacional se basa en la teoría constructivista del aprendizaje desarrollado con trabajos en el laboratorio de computación orientado al desarrollo de la concepción de función por parte de los estudiantes. Se realizará varias observaciones a los estudiantes, antes, durante y después del desarrollo del tratamiento educacional para verificar la aparente comprensión del concepto de función.

### **Implementación Didáctica**

Dubinsky (1996) afirma que el método pedagógico que sustenta sus investigaciones, con el fin de alcanzar sus objetivos, está conformado por tres grandes principios: el primer componente es el análisis teórico desde la perspectiva de la teoría APOE; el segundo componente describe el tratamiento instruccional incluyendo el ciclo de enseñanza ACE (actividades con ordenador, discusiones en clases y ejercicios de afianzamiento), aprendizaje cooperativo y el uso del lenguaje de programación ISETLW y finalmente la recolección de datos.

El diseño del ciclo ACE hará que los estudiantes logren reflexionar sobre su trabajo y sobre los conceptos de función. Las sesiones de trabajo se realizarán por semanas y se alternará con el trabajo de laboratorio de cómputo con el trabajo en el aula, así como el trabajo fuera de clase; la naturaleza del trabajo será de pequeños grupos, de dos y tres estudiantes. El ciclo de enseñanza se realiza a través de tres componentes:

- i. **Actividades.** Este componente el estudiante podrá desarrollar sus actividades en equipo (grupos de dos), el equipo tendrá que discutir sobre las actividades propuestas y cuando el caso lo requiera utilizando el lenguaje de programación ISETLW sobre el concepto de función. Las actividades están diseñadas con la

finalidad de inducir a los estudiantes a efectuar las construcciones mentales específicas de acciones, proceso, objeto y el nivel de esquema.

- ii. **Discusiones en Clases.** En esta etapa los estudiantes trabajarán la parte teórica en grupos de tres, bajo el principio de cooperación y la dirección del profesor que, en algún momento, deberá de puntualizar cuando sea necesario, además de resumir los temas puntuales con el fin de llegar al consenso de conclusiones sobre el concepto de función.
- iii. **Ejercicios Complementarios.** El estudiante podrá desarrollar de manera individual o grupal los ejercicios complementarios dejados como tarea, tanto los aspectos teóricos como los de taller en el laboratorio de cómputo. El propósito de los ejercicios es reforzar las ideas que tienen construido y aprendido en matemática por los estudiantes acerca de situaciones.

### Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados

- i. Se tiene el análisis respectivo de Yiersey sobre la situación 1

$$S_{01}: f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = x + 2$$

quien considera que  $f(x)$  y  $g(x)$  son iguales, cuando realmente no son iguales. Desde la teoría APOE significa que el estudiante tiene una construcción mental de *prefunción*. Es decir, que el estudiante no tiene casi nada de conocimiento acerca del concepto de función, por lo que no identifica la discontinuidad de la función.

*Situación 1*

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} \quad \left. \begin{array}{l} y(x) = x+2 \\ x+2=0 \\ x=-2 \end{array} \right\}$$

$$f(x) = (x+2)$$

$$x+2=0$$

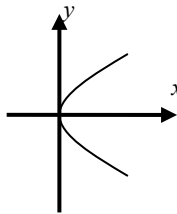
$$x=-2$$

Son iguales.

Figura 1.

ii. El estudiante William en la situación 2

S<sub>02</sub>:



afirma que no es una función, porque indica que un valor  $x$  que pertenece al dominio tiene dos imágenes  $y$  y  $y_1$ . En este caso el estudiante, para la situación, tiene una construcción mental *acción* porque conoce la definición de función de variable real; sin embargo el estudiante no va más allá de dicha definición.

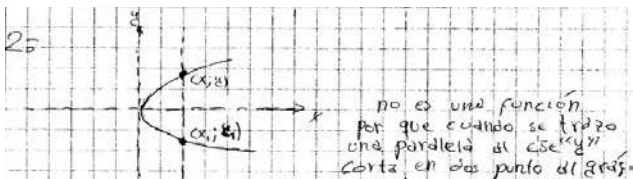


Figura 2

iii. El estudiante Fredy en la situación 10

$$S_{10}: f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x^2 - 2x + 1 > 0. \\ 0, & \text{si } x^2 - 2x + 1 = 0 \\ -1, & \text{si } x^2 - 2x + 1 < 0 \end{cases}$$

considera que no es una función, aduciendo que en el dominio la función tiene agujeros, es decir que la intersección de los intervalos es vacío. En este caso el estudiante tiene una prefunción con respecto al contexto real del dominio.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow (x-1)^2 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 0, & \text{si } x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ -1, & \text{si } x^2 - 2x + 1 < 0 \Rightarrow (x-1)^2 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

Tampoco es una función en vista de que  $x > 1 \cap x < 1 = \emptyset$

Figura 3.

iv. En la situación 12,  $S_{12}$ : “REMDTJKFMAWO” el estudiante Miguel tiene una idea de función de variable real y relaciona ésta que para que sea una función necesariamente tiene que estar en un plano o estar en el espacio.

12a - no es una función para que sea función debe estar en el plano o el espacio

Figura 4

Para la situación 12, el estudiante Edison también trata de relacionar con el orden alfabético del abecedario, sin embargo no tiene no noción de acción, porque

inicialmente debería de haber evaluado por lo menos el orden de las letras.

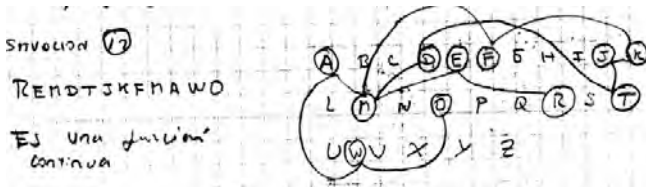


Figura 5

v. El estudiante Edison a la situación 16

$$S_{16}: \{ 2^n > n^2 + 3n : n \text{ en } [1, 2, 3, \dots, 20] \}$$

trata de evaluar en algunos valores de  $n$ , en esta situación ha intentado y no logró relacionar dicho resultado para expresar cual es el dominio y cual es el rango. El estudiante se encuentra en la construcción mental de acción.

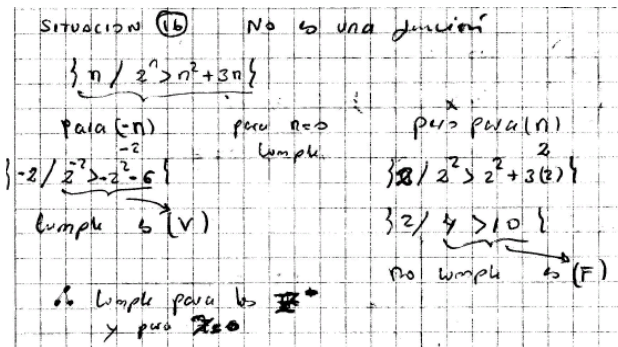


Figura 6

## Referencias

Gerd Unterstenhöfer. (2001). Revista Calidad y Excelencia. Lima, Perú. pp. 16.

Orellana Manrique, Oswaldo. Revista Pedagógico Cultural Palabra de Maestro, Lima 2002; 11(34): 17.

Orellana Manrique, Oswaldo. (2002). Revista Pedagógico Cultural Palabra de Maestro, Lima. 11(34): 22.

Valdez Coiro, Eréndira. (2000). Rendimiento escolar y actitudes hacia las matemáticas. Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A.

André Antibi. (2005). La constante macabra o Cómo se desalienta a generaciones de alumnos. Perú: Fondo Editorial PUCP Lima.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (2000). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education*. II, 1-32.

Daniel Breindenbach, E. Dubinsky, Julie Hawks y Devilyna Nichols. (1992). "Development of the conception of function" *Educational Studies in Mathematics*. 23.. pp. 249.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (2004). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education*. pp.5.

Youschkevitch, AP. (1976). The concept or function up to the middle of the 19th century (traducción: Dra Rosa María Farfan). *Srie: Antologías I* Mexico: Cinvestav IPN (Programa Editorial, Area de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa). pp. 99 – 145.

Carl B. Boyer. (1986). Historia de la Matemática. Alianza editorial S.A. Madrid España.



Daniel Breindenbach, E. Dubinsky, Julie Hawks y Devilyna Nichols. (1992). "Development of the conception of function" Educational Studies in Mathematics. 23. pp. 247 – 285.

Acyline Coelho Costa. (2004). Conhecimentos de Estudantes Universitários sobre el Concepto de Função Matemática. Tesis de Maestría publicado. PUC/SP . Sao Paulo. Brasil.

Ignacio Domínguez García. (2003). La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica. Tesis de Maestría. México.

William E. Fenton, Ed Dubinsky. (19996). Introduction to Discrete Mathematics with ISETL. USA: Springer – Verlag New York.