La Geometría vectorial como herramienta para formalizar la noción intuitiva de superficie

Francisco Ugarte Guerra
Pontificia Universidad Católica del Perú

Resumen

El taller ejemplificó cómo la matemática puede ser utilizada como una herramienta para precisar ideas y construir conceptos. Así, a partir de la idea intuitiva de cono y de algunas herramientas básicas de la geometría vectorial (conceptos de punto, vector, recta y plano), mostramos que es posible *construir* superficies, tanto en un sentido matemático (ecuación) como en un sentido concreto (gráficos, modelos tridimensionales, animaciones).

Palabras claves

Geometría vectorial, superficies, conos.

Enfoque

Partimos de la premisa que educar geométricamente tiene como finalidad facilitar el conocimiento del espacio tridimensional (Alsina 2000) y, entendemos como una tarea del docente de matemáticas la enseñanza de la visualización, que va más allá de educar en el conocimiento de la estructura formal y lógica de cualquiera de sus campos, tal y como señala Miguel de Guzmán (1996).

Metodología

Durante las tres sesiones de dos horas que duró el taller se propusieron una serie de cuestiones cuya finalidad era que los participantes aportaran ideas y se pusiera en evidencia conceptos previos sobre superficies, conos y geometría vectorial. En términos del constructivismo social de

Vigotsky, nuestras preguntas estuvieron en la zona de desarrollo próximo y ayudaron a que los alumnos construyeran nuevos conceptos.

Sesión 1

Siguiendo la metodología arriba explicada pretendemos que los alumnos

1. Escriban, grafiquen y den ejemplos sobre sus conceptos de superficies y conos. Para ello planteamos preguntas cómo las siguientes: ¿Qué entiende por superficie (cono)? Escriba algunos ejemplos de superficies (conos). Grafique algunas superficies (conos).

2. A partir de sus ideas, gráficos, ejemplos y de la socialización de las mismas con sus compañeros descubran la necesidad de precisar sus conceptos.

   Para ello planteamos los siguientes ejercicios:

   Escriba una definición de superficie (cono) y verifique que la cumplan sus ejemplos, caso contrario modifique su propuesta de definición hasta que cada uno de sus ejemplos la verifique.

   Si es posible identifique tipos de conos a partir de los gráficos realizados por usted y sus compañeros.

   Identifique las características comunes de cada uno de los tipos de conos que han encontrado.

3. Utilizando argumentaciones inductivas sean capaces de escribir una definición de superficie y una definición de cono. Para ello se propusieron las siguientes actividades:

   Considerando las características comunes de los distintos “tipos” de conos, pruebe a reescribir su definición de cono.

Compruebe que los diferentes tipos de cono satisfacen su definición, caso contrario modifique su definición.

4. A partir de la definición construida de cono sean capaces de aplicarla en la construcción de nuevas superficies. Para ello se les propusieron dibujos donde aparecían una curva plana y un punto fuera de dicho plano, a continuación se les pedía que a partir de esos elementos y, usando su definición, construyeran el cono correspondiente. Para finalizar se les presentaba una animación multimedia donde podía verse en tiempo real la construcción de los conos propuestos.

Sesión 2

1. Usando la misma metodología introducimos dos formas de representación para los vectores: la gráfica (flechas) y la formal (coordenadas). Para ello se les pidió a los participantes explicar qué entendían por vector, se les pidió dar ejemplos y una representación gráfica.
2. Se introdujeron el mínimo número de propiedades de vectores, solo las necesarias para garantizar la comprensión y la construcción formal de la definición de cono: igualdad, suma y multiplicación por un escalar.

Sesión 3

Se introduce la definición matemática (cartesiana y vectorial) de un cono y se proponen actividades que requieren que los estudiantes transiten por las representaciones gráfica y formal del concepto de cono, ello con la finalidad de enriquecer su comprensión mostrando las ventajas de una y otra representación.

Definiciones y problemas

A continuación presentamos y comentamos, a manera de ejemplo, la definición de cono utilizada y uno de los problemas trabajados durante el taller.

Se puede observar que para la definición de cono solo se hacen uso de los conceptos de vector, suma de vectores, multiplicación por un escalar y de las relaciones de pertenencia y paralelismo.

Definición

Sea C el cono de curva base Γ y vértice V, entonces $P(x;y;z) \in$ C si y solo si

- $P = V + t\vec{v}, \quad t \in$ lR y $\vec{v} \mathbin{//} \overrightarrow{P_0V}$
- $P_0(x_0;y_0;z_0) \in \Gamma$

Puede comprobarse que en el siguiente problema, para el item a., se requiere aplicar de manera correcta la definición de cono y demostrar un manejo del álgebra elemental.

En el item b. en cambio, se resalta la correspondencia entre la expresión algebraica y geométrica del cono. Los ítems c. y d. muestran como el álgebra (vectorial) y la geometría (noción de cono) se complementan.

Problema

a. Escriba la ecuación cartesiana del cono C de curva base $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$ y vértice $(0;5;5)$.
b. ¿El punto $(0;5;5)$ pertenece al cono *C*?
c. Escriba la ecuación vectorial de una recta L que esté contenida en el cono C.
d. Determine si es posible o no hallar una recta L tal que
   i. Corte en un único punto al cono *C*.
   ii. Corte en dos puntos al cono *C*.
   iii. Corte en tres puntos al cono *C*.

Comentarios Finales

El taller permitió que los participantes, profesores de secundaria:

1. Reconocieran que para precisar una idea no basta con hacer un dibujo, o dar ejemplos,
2. Comprobaran que para escribir una definición correcta, es necesario tener presente diferentes puntos de vista, reconocer patrones, desechar particularidades pero sobretodo evitar las ambigüedades
3. Concluyeran de forma natural que, para precisar la idea de cono, el lenguaje matemático es la herramienta ideal, pues entre otras cosas, el usarlo implica dejar a un lado las ambigüedades del lenguaje natural.
4. Experimentaran como una "buena" definición permite comprender mejor y ampliar nuestro entendimiento acerca de los objetos matemáticos.

Referencias

Alsina, C. (2000) *Geometría y Realidad*. Universidad Politécnica de Cataluña.

De Guzmán, M. (1996) *El Rincón de la Pizarra*. Madrid: Pirámide.