RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

1. MATEMÁTICAS EN LA EDAD MEDIA

El papel que juega la historia de las matemáticas en la Edad Media ya sea árabe o latina, es principalmente el de la transferencia. Recopilaron y transmitieron los conocimientos adquiridos en India, Grecia o Bizancio (donde los libros antiguos ya no se estudian como curiosidades sin una gran aplicación fuera de la astrología u "ocultismo"). Esto permitirá que las matemáticas, desde el Renacimiento, encuentren su camino. Se han realizado progresos durante este largo período, pero hay que admitir que no han sido significativos: más importantes son la reelaboración de los viejos conceptos que los avances obtenidos con los nuevos resultados.

1.1. Algún comentario sobre la tradición de la matemática oriental.

a) Sobre China.

Yijing (Yi-king o Y-king), una antigua obra de filosofía china, contiene nociones matemáticas bastante esquemáticas: se manipula, con los trigramas, la noción de permutación, pero sin teorizarla explícitamente. También hay una forma de numeración binaria (basada en el yin y en el yang), pero también es igualmente muy implícita.

El Zhoubi Suanjing (Rey Chou Pei Suan), de gran antigüedad (ya que el anterior es difícil de fechar, pero probablemente fue compuesto en el transcurso del primer milenio antes de Cristo), está especialmente dedicado a la cálculos aritméticos y astronómicos. Se describen las propiedades de los triángulos rectángulos (con una demostración ilustrada por una gráfica del teorema de Pitágoras), y se usan las fracciones.

Suan Shu Shu (Escritos sobre Computación) y Jiuzhang Suanshu (Las Nueve Secciones - o Nueve Capítulos - sobre Procedimientos Matemáticos) que incluyen trabajos más recientes (el último se completó hacia el comienzo de nuestra era). En el primero, encontramos un método para calcular raíces cuadradas. En cuanto al segundo, aborda de manera más sistemática (y pedagógica) todas las áreas donde intervienen las matemáticas. Se trata, en particular, de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, o la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Desde el siglo III, conocemos varios nombres de matemáticos. Podemos mencionar: Liu Hui (Liou Houi), comentarista de las Nueve Secciones, y quien, alrededor de 263, deduce del estudio de un polígono de 172 lados, y da una aproximación del núero π aproximadamente a 3.14159; Zu Chongzhi (Tsu Ch'ung-Chih, 430-501), quien aproxima a π en el intervalo [3.141592, 3.1415927] y especialmente Zhu Shijie (Chou Chi-kie, 1280-1303), con su segundo libro conservado titulado *El precioso espejo de los cuatro elementos* del año 1303, es su trabajo más importante. Con este libro Zhu Shijie llevó el álgebra china al más alto nivel. Incluye una introducción de su método de los cuatro elementos, que se usa para hablar de cuatro cantidades indeterminadas en una ecuación algebraica. Zhu aclaró también como encontrar raíces cuadradas y desarrolló el conocimiento de las series y las progresiones. El prefacio del libro explica como Zhu viajó por China enseñando matemáticas durante 20 años.

Los contactos muy antiguos de los chinos con los griegos, y aquellos más cercanos y más continuos con los indios, hacen posible pensar que la influencia de las matemáticas chinas en los griegos podría haber existido, y que podría haber jugado un papel notable en la evolución de las matemáticas indias. De todos modos, desde el siglo XV, las influencias externas, comenzando con la de Occidente, jugaron masivamente en la dirección opuesta, y las matemáticas chinas terminaron perdiendo su propio carácter.

b) Sobre los Árabes.

Tomaron prestados el álgebra y las cifras de la India. Y es probable que en Oriente hayan tomado prestados los gérmenes del conocimiento mostrado por sus matemáticos. De hecho, las matemáticas de China e India ya tienen una larga historia. Los árabes, y los pueblos unidos una vez o de forma duradera a su imperio, conocieron el Siddhânta (que llaman Sindhind) a finales del siglo VIII por las traducciones hechas por Ibn Tariq y Al-Fazari. Llaman a la geometría handasa (o kendes-séh, según las transcripciones), es decir, arte indio. Toman prestada de los indios su numeración escrita, que ya no se debe perfeccionar, y en trigonometría el uso del seno (en lugar de la cuerda) y quizás la tangente.

Desde el reinado de Al-Mammoun (813-834), gracias al trabajo de su bibliotecario, Abu-'Abdallah el-Khârizmî, la herencia matemática de los griegos comienza a ser verdaderamente conocida y enriquecida por el conocimiento adquirido por el Matemáticos indios. Estudia sánscrito Siddhanta, revisa las tablas de Ptolomeo y escribe sobre el álgebra de los tratados que la Edad Media iba a traducir al latín.

Es para el-Khârizmî (cuyo nombre deriva la palabra algoritmo), que el término "álgebra", cuya fortuna era singular, se remonta al principio y que, además, tenía un significado limitado al principio. ; El nombre completo del que deriva esta palabra (al-djebr wa'l moukabala, restitución y oposición) designa originalmente en al-Khwarizmi dos operaciones claramente descritas en Diophantus como las primeras en ser sometidas a las ecuaciones. Una (restitución) consiste en pasar las cantidades negativas de un miembro a otro, de modo que solo queden términos positivos; el otro (oposición), para reducir términos similares en ambos lados.

La composición matemática de Ptolomeo (Almagest) es traducida por El-Ferghani (Alfraganus), en el primer tercio del siglo IX; también construyó un nuevo nilómetro en Egipto y compuso un libro de texto de astronomía; asimismo Abu-Ma'char (Albumaser), de Balkh, las antiguas Bactres.

Al-Hajjaj traduce casi al mismo tiempo que los Elementos de Euclides, y pronto, Thâbit ben Qorra (836-901), cambiador de divisas en Harrân el viejo Carrhae, famoso por la derrota de Craso) llegó a la corte de los califas. , traduce el libro de las secciones cónicas de Apolonio de Pergé y escribe libros de texto para la enseñanza; su hijo y su nieto seguirán sus pasos.

Las traducciones continuaron en el siglo X, pero las primeras obras originales comenzaron a aparecer: El-Battani (Albategnius) erigió mesas astronómicas en Raqqa en el Éufrates, que Lalande todavía apreciaba mucho; impone además, en trigonometría, el uso de senos (inaugurado como hemos visto en India) en lugar de cuerdas, y también produce algunos resultados notables en trigonometría esférica.

Ibn al-Haitham (Alhazen), quien murió en 1038 en El Cairo, por trisección del ángulo y por investigación sobre los dos promedios proporcionales para la duplicación del cubo, resuelve problemas insolubles ante él.

Toûsî, nacido en 1201 en Toûs (Mèchehed, Persa Khorasan), astrólogo de Houlagou, guarda una gran cantidad de manuscritos durante la captura de Bagdad. Él hace que la trigonometría sea una ciencia separada y traduce Euclides.

El poeta persa Omar Khayyam contribuye a la reforma del calendario ordenado por el sultán selyúcida Malak-Châh, apodado Djelâl-ed-dîn, de ahí el nombre de la era de Djelalean; Compuso un tratado sobre álgebra.

Avicenne nos ha dejado un libro sobre cálculo, en el que analiza las operaciones matemáticas y cómo probarlas, especialmente la llamada prueba de nueve.

c)Los latinos.

En el Occidente latino, a comienzos de la Antigüedad y la Edad Media hay que mencionar a Ancio Manlio Torcuato Severino (*Boecio*) (480-524), político, filósofo y poeta, autor de *De la consolación de la filosofía*, *De consolatione philosophiae*, obra en la que ahonda sobre el ser humano, la tristeza, la fortuna y la importancia de Dios en la vida del hombre, asimismo, trata temas como la existencia de la maldad.

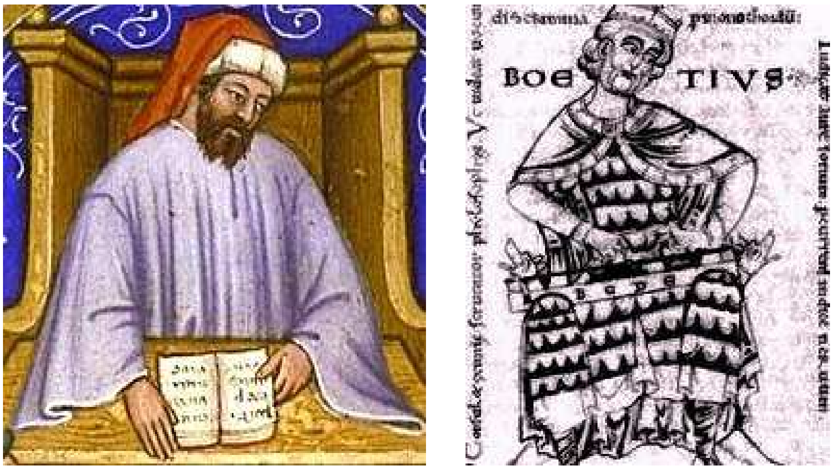

Fig. 1. Boecio
http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm

Fig. 2. Página de Ars geometriae, atribuida a Boecio.
http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm

Representa al neoplatonismo, se inclinó por el estoicismo y las ciencias exactas, y se erigió en uno de los fundadores de la filosofía cristiana de Occidente. También hay bajo su nombre (pero la atribución está en disputa) un *Ars Geometriae*, que contiene en particular una traducción literal de los primeros cuatro libros de Euclides, pero se omitieron las demostraciones. Aproximadamente un siglo después, Isidoro, obispo visigodo de Sevilla, en sus Etimologías, explica que "la geometría tiene el carácter de multiplicación", lo que la distingue de la aritmética "cuyo fundamento es la suma".

Boecio está en el origen de la larga y trascendental peripecia que fue la recuperación por Occidente del pensamiento aristotélico, pero las traducciones y los comentarios boecianos durmieron en el sueño de los justos en las bibliotecas altomedievales durante más de trescientos años, hasta la época de Gerberto de Aurillac, quién sería el principal agente de su revitalización. Gerberto de Aurillac (futuro Silvestre II) nació en Auvernia, sur de Francia,en el año 940. Estudió el ***Trivium*** (*Gramática, Lógica y Retórica*) en el monasterio benedictino de su ciudad y allí se sintió llamado a abrazar el estilo de vida que propusiera San Benito cinco siglos antes. Ya siendo monje pudo viajar a la Ciudad Condal para completar su formación. Estudió el ***Quadrivium*** (*Aritmética, Geometría, Astronomía y Música)* bajo la tutela del conde Borrell II, que a su vez nombró a Atón, el Obispo de Vic, su preceptor.

Fig.3. Gerberto de Aurillac (Silvestre II)
https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/tag/gerberto-de-aurillac

Después de un largo período de oscuridad la enseñanza de las matemáticas reaparece en el cuadrivio de las artes liberales de las universidades, siguiendo el modelo pitagórico. Roger Bacon declaró que las matemáticas son el instrumento más poderoso para penetrar en las ciencias, que precede a todas las demás y nos dispone a comprenderlas. Pero muy pocos siguen siendo los que piensan como él. Hildebert du Mans, un poeta de gran renombre en este momento, está más cerca del estado de ánimo del momento, componiendo un poema en quince canciones, llamado el matemático,

para ridiculizar la astronomía y los astrónomos. Fue obispo de Le Mans entre 1097 y 1125 y arzobispo de Tours desde 1125 hasta su muerte, el 18 de diciembre 1133. Brillante erudito que comenzó su carrera eclesiástica como ecónomo y canónigo de su catedral.
En el siglo XII, los árabes, fundadores de las universidades de Granada y Córdoba, dieron a conocer en Occidente los Elementos de Euclides. Han recibido de Siria los tesoros de la ciencia griega e india: los transmiten a Europa latina; gracias a las traducciones realizadas especialmente en España. Hermann el Dálmata da a conocer el planisferio de Ptolomeo (1183), Gerard de Cremona traduce el Almagesto (1173). Por su parte, Campano, que vive después del año 1200, comenta Euclides y estudia la teoría de los planetas y la cuadratura del círculo.

Pero es sobre todo las necesidades prácticas del comercio que se están desarrollando, especialmente en Italia, lo que está llegando a un nuevo impulso. Se dice que Leonardo da Pisa, conocido como Fibonacci,

Fig. 4. Fibonacci
http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm

en un tratado sobre aritmética (*Liber abaci*) publicado en 1202, incluido el álgebra como se le conocía, propagó el uso de números arábigos e indica el valor relativo o la posición. (Gerbert, alrededor del año 1000, y un poco más tarde Adélard de Bath, ya conocía los números y la aritmética basados en el sistema árabe, pero su introducción en Occidente tuvo un impacto muy limitado). Empleado en la aduana de Bejaia (actual Argelia). Fibonacci recopiló todo lo que se sabía sobre aritmética en Egipto, Grecia, Siria, Sicilia, y redactó un tratado. A partir de ese momento, la ciencia parece haber sido estudiada con cierta asiduidad en Italia, donde podemos mencionar notablemente a Paul dall'Abaco, un matemático inteligente, que representa, con la "ayuda de máquinas", todos los movimientos de las estrellas. De apodo Paul Dagomari, nacido en Florencia a principios del siglo XIV, fallecido en 1375. Es especialmente famoso por la invención de la brújula en Europa, descubrimiento que favoreció los audaces intentos de los navegantes de siglos siguientes. Dall´Ábaco debe ser contado entre los científicos de la época, cuyo trabajo fue muy útil ya que preparó el progreso que no tardó mucho en llevarse a cabo en el vasto dominio del conocimiento matemático.

Contemporáneo de Dante y Petrarca, algunos biógrafos, sin colocarlo en el mismo rango que esos grandes poetas, ensalzaron algunas de sus producciones literarias que, a pesar de su incorrección, reveló un talento notable. Pero Paul debía su fama sobre todo a su conocimiento, prodigioso para su tiempo, en aritmética y geometría: Merecía el apodo de Abaco porque Paolo dall 'Abaco significa literalmente Paul de aritmética. Los viejos biógrafos no dudaron en considerarlo como uno de los primeros matemáticos que practicaron el álgebra.

Uno de los libros más antiguos impreso fue compuesto por Luca Paciuolo o Lucas de Borgo (1445-1526) que apareció en 1470. Contiene un tratado bastante completo para su tiempo en álgebra (Luca Paciuolo fue inicialmente tutor en Venecia, Roma y Florencia, ingresó en la orden franciscana y, bajo el nombre Fray Luca Sancti Sepulchri, enseñó sucesivamente matemáticas en las distintas universidades de Italia.

Sus primeras obras se pierden, pero tenemos su Somma de Arithmetica, Geometria, Proportioni y Proportionalita (Venecia, 1494), una edición de Euclides (1509) y la Divina Proportione (1509). El primero de los trabajos tuvo una influencia considerable en la enseñanza matemática en el siglo XVI, prueba de que satisfacía las necesidades de la época, y es indispensable estudiarlo, si se quiere formar una idea exacta del estado de la ciencia en este momento. Paciuolo no es, de ninguna manera, un creador, pero la aportación que hizo a los escritos inéditos de Leonardo da Pisa (Fibonacci) fueron, en muchos aspectos, una revelación) pero se puede considerar que *la ciencia seguía casi en el mismo estado en que Diophantus la había dejado* (lo cual, además, no parece ser conocido por el autor, que solo se ha inspirado en los árabes). Su aplicación se limitaba a preguntas bastante poco importantes sobre números, y solo podía resolver las ecuaciones de primer y segundo grado.

Fig. 5. Luca Paciuolo(1445-1514)
http://www.cosmovisions.com/Paciuolo.htm

Fig. 6. Nicolas Oresme (1320-1382)
http://www.cosmovisions.com/Oresme.htm

El resto de Europa pronto volverá a las matemáticas. Pero hay, en el período final de la Edad Media, mentes más curiosas que sabios. Nicolas Oresme dibuja la notación de los expositores. Es un físico y escritor nacido en Normandía, ¿quizás cerca de Caen?, alrededor de 1320 y murió en 1382. Estudió en el Colegio de Navarra y, después de haber recibido un doctorado en teología, obtuvo el título de Gran Maestro en esta casa real en 1355 o 1356. Fue entonces archidiácono de Bayeux, tesorero de la Sainte-Chapelle y decano del capítulo de Rouen. Desde el año 1360, el rey Juan lo había dado como tutor de su hijo (futuro Carlos V). Su alumno lo nombró obispo de Lisieux en 1377 y lo admitió en sus consejos. Murió obispo de Bayeux el 11 de julio de 1382.
John Halifax, más conocido por el nombre de Sacrobosco, da, además de su algoritmo, un tratado de la esfera.

John o Johannes de Holywood [o Holybush = Halifax] (= "Madera sagrada"), conocido Sacrosbosco, Sacrobusto o Sacrobuschus, monje, matemático y astrónomo inglés del siglo XIII. Probablemente nació en Halifax (Yorkshire), completó sus

estudios en Oxford, llegó a París alrededor de 1230, profesó matemáticas y astronomía en la Universidad y murió allí en 1256 (¿o en 1244?), según algunos, que lo traducen en este sentido a través de un verso de su epitafio).
Sacrobosco es más conocido por su *Tractatus de sphaera mundi*, una especie de resumen de cuatro capítulos del Almagesto de Ptolomeo y sus comentarios árabes, que tuvo desde el siglo XV hasta el XVII más de 70 ediciones latinas (la primera, Ferrara, 1472, en 4, es muy rara, el último parece ser el de Leiden, 1647) y que, traducido y comentado en todos los idiomas, que se pudo disponer, a modo de moda, en todas las escuelas de la Edad Media.

Las obras de Sacrobosco, *De anni ratione seu de computo ecclesiastico* (Wittemb., 1588) y *De arte numerandi* (Paris, 1498)?) contribuyeron la propagación de la doctrina algorítmica y pequeños tratados sobre el cómputo eclesiástico, sobre el astrolabio, etc.

Fig. 7. Grabado de 1584, presunto retrato de Johannes de Sacrobosco
https://es.wikipedia.org/wiki/Johannes_de_Sacrobosco

Los ingleses le atribuyeron erróneamente la introducción de números arábigos.
La trigonometría moderna fue fundada en el siglo XV por Regiomontano.

Fig. 8. Regiomontano

Johannes Müller, conocido como Regiomontanus es un astrónomo, nacido el 6 de junio de 1436 en el pueblo de Unfind, cerca de Koenigsberg en Franconia (que no debe confundirse con la ciudad de Kaliningrado en Rusia, que también llevó este nombre al Período prusiano), de ahí su nombre en latín (que significa Konigsberg como regius mons, Mount Royal), murió el 6 de julio de 1476.

Fascinado por la astronomía a la edad de 14 años y después de recibir su primera instrucción en el hogar paterno, fue a estudiar a la Universidad de Leipzig y tomó un gran entusiasmo por la ciencia astronómica, comenzó a asimilarse. aritmética y geometría, luego fue a Viena, donde esperaba encontrar más instalaciones para dominar su ciencia favorita; siendo todavía un joven adolescente, lo vemos siguiendo las lecciones de Purbach. El maestro, que estaba trabajando en Ptolomeo, le dio a su discípulo varios problemas geométricos para resolver, y le dio muchas oportunidades para practicar el cálculo. Mientras tanto, Regiomontanus leyó a los matemáticos de la antigüedad cuyas obras habían sido traducidas al latín, incluido Arquímedes. Trabajaron juntos en una investigación teórica sobre los puntos principales de la eclíptica, la posición de las estrellas fijas con las que se pueden relacionar los planetas, y descubrieron que las posiciones de Marte podían desviarse dos grados de las que Las tablas asignadas a este planeta.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 102)

Desde la óptica de la practicidad, la Geometría Clásica, heredada de los agrimensores egipcios que la aprendieron a su vez de los antiguos sumerios, emplea únicamente la egipcios que la aprendieron a su vez de los antiguos sumerios, emplea únicamente la regla y el compás. Una regla lisa, sin marcas de medida, con un sólo canto y un compás que traza arcos de circunferencia entre puntos previamente hallados, pero no transporta medidas.

Interesante artículo de Rendón, A. (2013) sobre la Geometría Medieval en el que nos aclara que los problemas constructivos que el geómetra debía solucionar con esta Geometría eran muy variados. Hace una reflexión interesante sobre cómo se entendían y aplicaban en la Edad Media conceptos tan básicos como dimensión, proporción y simetría; igualdad, equivalencia o semejanza.

"…*La geometría medieval utilizaba procedimientos propios de un agrimensor. No necesitaba abstraer la forma de los objetos, ni averiguar los procedimientos para reproducir su forma de modo objetivo.*

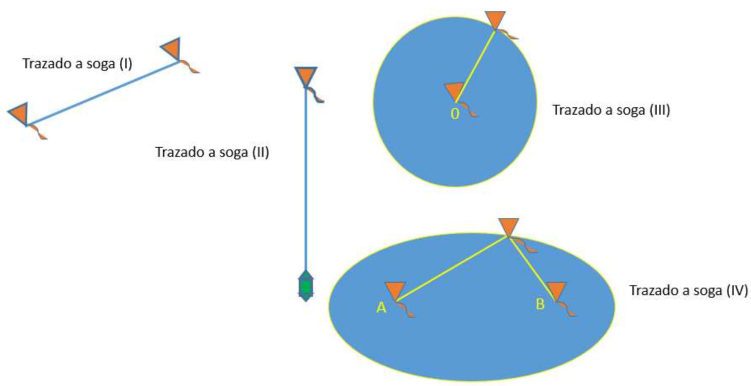

Fig. 9. http://www.signoslapidarios.org/inicio/articulos/historia-de-la-arquitectura/134-geometria-medieval

Quién accedía al grado de magister debía demostrar conocimientos geométricos de cierta abstracción. No se planteaba la naturaleza del espacio, ni si la dimensión de la forma era, o no, la medida del espacio. Para él, el espacio era "todo aquello" exterior a él, y la dimensión, las veces que cabía su vara de medir (el canon que aplicaba a todo lo relativo a la obra) en el objeto. La simetría era una correspondencia en igualdad entre las partes respecto de un punto, una recta o un plano. De este modo, si tomaba como límite comparativo un muro diáfano que cortase en dos partes iguales al edificio, se vería cómo los elementos de una mitad se correspondían en posición, tamaño y disposición, con los elementos de la otra…"

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

JOYITA: a) *¿Existe algún triángulo tal que las medidas de sus lados son tres números consecutivos y el ángulo mayor es el doble que el menor? En caso afirmativo, calcular las medidas.*

SOLUCIÓN

NOTA: *Interesante ejercicio de geometría, resuelto desde el punto de vista algebraico.*

Paso 1

Sin pérdida de generalidad consideremos que el triángulo es acutángulo.

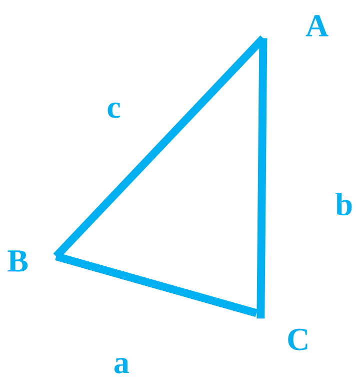

Fig. 10. Triángulo acutángulo

Si ***a, b, c*** son sus lados, hay que probar, gracias al teorema del coseno, que $a^2+b^2>c^2, a^2+c^2>b^2, b^2+c^2>a^2$. Por simetrías en los cálculos si suponemos que $a \le b \le c$, basta probar $a^2+b^2>c^2$.

Paso 2

Atendiendo a las condiciones iniciales del ejercicio que los lados son consecutivos, sean los lados

$a = p-1, b = p, c = p+1$. La desigualdad $a^2+b^2>c^2$ equivale, después de realizar las operaciones oportunas

$$a^2+b^2>c^2 \Leftrightarrow (p-1)^2+p^2>(p+1)^2 \Leftrightarrow (p-1)^2+p^2-(p+1)^2>0 \Leftrightarrow$$
$$p^2-2p+1+p^2-p^2-2p-1>0 \Leftrightarrow p^2-4p>0$$

Paso 3

Si aplicamos el teorema del seno, el ángulo será menor cuánto más pequeño sea el lado opuesto. Así, el ángulo opuesto a *a*, *suponiendo que es el menor,* si lo denominamos α, el opuesto a *c* será el doble 2α. El opuesto a *b* ser, por lo tanto, $\pi-(2\alpha-\alpha)=\pi-3\alpha$, y ha de ser

$$\alpha \le \pi-3\alpha \le 2\alpha \Rightarrow \frac{\pi}{5} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$$

De nuevo, aplicando el teorema del seno, se tendrá

$$\frac{p+1}{p-1}=2\cos\alpha$$

$$\frac{p}{p-1}=\frac{sen3\alpha}{sen\alpha}=\frac{sen(2\alpha+\alpha)}{sen\alpha}=\frac{sen2\alpha.\cos\alpha+\cos2\alpha.sen\alpha}{sen\alpha}=\frac{2sen\alpha\cos^2\alpha+(\cos^2\alpha-sen^2\alpha).sen\alpha}{sen\alpha}$$

$$\frac{p}{p-1}=4\cos^2\alpha-1$$

Eliminando α en las expresiones, realizando las operaciones siguientes

$$\frac{p+1}{p-1}=2\cos\alpha;\ \frac{p}{p-1}=4\cos^2\alpha-1$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}.\frac{p+1}{p-1} \Rightarrow \frac{p}{p-1}=4\cos^2\alpha-1=4.\frac{1}{4}\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2-1=\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2-1$$

$$\frac{p}{p-1}=\frac{(p+1)^2-(p-1)^2}{(p-1)^2}=\frac{p^2+2p+1-p^2+2p-1}{(p-1)^2}=\frac{4p}{(p-1)^2}$$

$$\frac{1}{p-1}=\frac{4}{(p-1)^2} \Rightarrow 1=\frac{4}{p-1} \Rightarrow p-1=4 \Rightarrow p=5$$

Por lo tanto $\cos\alpha = \frac{1}{2}.\left(\frac{5+1}{5-1}\right) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{4}$

Paso 4

Para tal resultado, en una primera aproximación podemos afirmar que las medidas de los lados del triángulo acutángulo inicial deben ser *a=4, b=5, c=6.*
En efecto. Comprobemos que es así.
Si existe, el ángulo α debe cumplir las condiciones del **Paso 3**, es decir que

$$\frac{\pi}{5} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}, \text{ y por ello } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \le \cos\alpha \le \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

por lo tanto

$$\frac{3}{4} \le \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} \le \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow 3 \le 1+\sqrt{5} \Rightarrow 2 \le \sqrt{5}$$

.

a) En la primera desigualdad, elevando al cuadrado

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \le \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2}{4} \le \frac{9}{16} \Rightarrow 32 < 36$$

b) La segunda desigualdad nos conduce a

$$\frac{3}{4} \le \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} \le 0.80901699437 \Rightarrow 3 \le 3.23606797748$$

O bien

$\frac{3}{4} \le \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} \le \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow 3 \le 1+\sqrt{5} \Rightarrow 2 \le \sqrt{5}$. De aquí elevando al cuadrado 4<5.

De esta manera se demuestra la existencia del triángulo cutos lados miden 4, 5 y 6 unidades de longitud.

JOYITA: b) *Sea M un punto interior del segmento AB. Se construyen cuadrados AMCD y BEHM en el mismo lado de AB. Si N es el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a dichos cuadrados probar que:*
a) Los puntos B, N y C están alineados.
b) El punto H es el ortocentro del triángulo ABC.

SOLUCIÓN

Paso 1

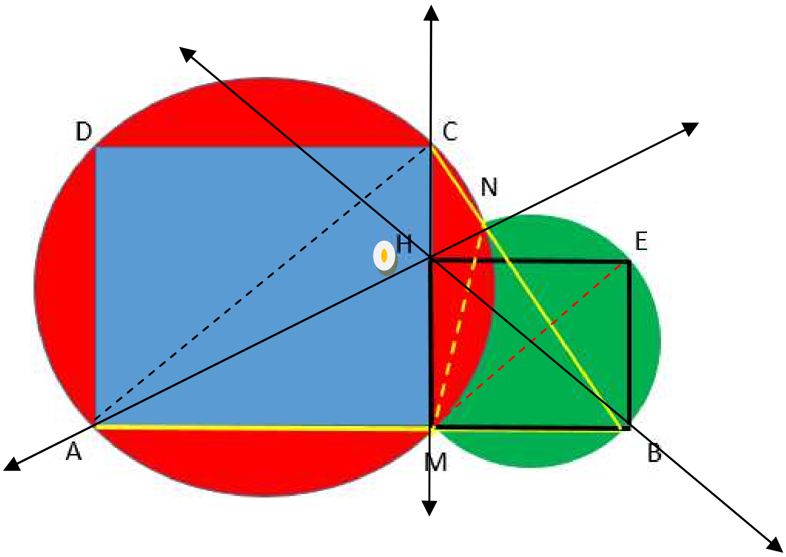

Fig. 11. Cuadrados-Circunferencias circunscritas (I)

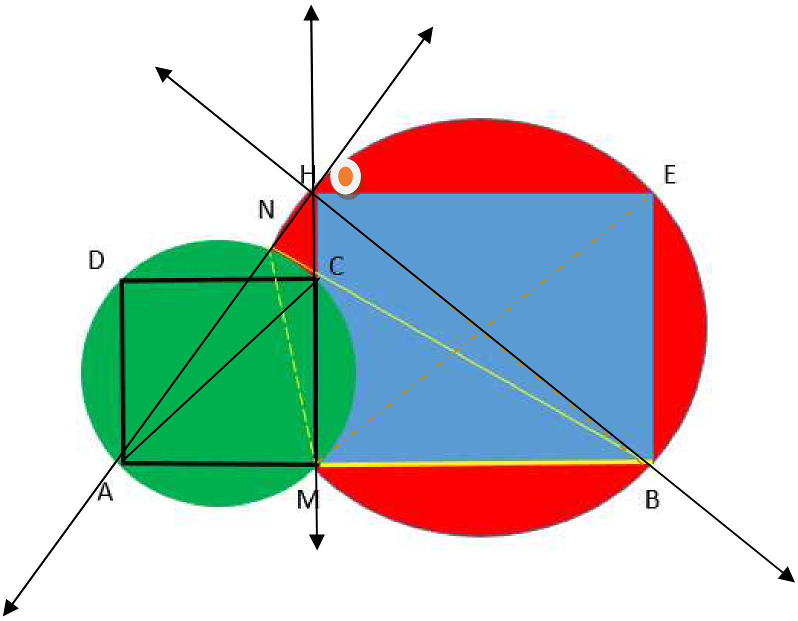

Fig.12. Cuadrados-Circunferencias circunscritas (II)

Paso 1

a) En ambas figuras se tiene que el ángulo en N, $\widehat{MNB}$ es de 45^o.

a.1) Si tomamos la Fig.11, se tiene en el triángulo $\triangle CNM$ que el ángulo $\widehat{N} = 135^o$ y

en el triángulo $\triangle MNB$ el ángulo $\widehat{N} = 45^o$. Por lo tanto, $\widehat{CNM} + \widehat{MNB} = 135^o + 45^o = 180^o$.

a.2) Análogamente, veamos que sucede en la Fig. 12.

En los triángulos $\overset{\triangle}{MNC}$ y $\overset{\triangle}{MNB}$, el ángulo $\widehat{N} = 45^{o}$
Es decir, el ángulo en N es el mismo para los triángulos MNC y MNB por lo tanto los puntos B, N y C están alineados.

Paso 2

Sabemos que el ortocentro, de un triángulo es el punto donde se cortan las tres rectas que contienen a las tres alturas de un triángulo. Se encuentra en el interior del triángulo si este es acutángulo; coincide con el vértice del ángulo recto si es rectángulo, y se halla en el exterior del triángulo si es obtusángulo.

2.1. En el caso de la Fig. 11, se tiene que $CH \perp AB$. Por otra, $BH \perp ME$ y $ME \parallel AC$, en consecuencia se tiene que $BH \perp AC$. Por tanto, H es el ortocentro del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.

2.2. A análogo razonamiento llegaríamos en la Fig.12, en la que el ortocentro H está fuera del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ al ser un triángulo obtusángulo.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la propuesta de los ejercicios del número anterior 102)

Algún comentario sobre la teoría de números, siguiendo fiel a la dinámica establecida en las anteriores entregas de la sección SAPERE AUDE.

Mientras las matemáticas se filtraban del mundo islámico a la Europa del Renacimiento, la teoría de números recibió poca atención seria. El período comprendido entre 1400 y 1650 vio avances importantes en geometría, álgebra y probabilidad, sin mencionar el descubrimiento de los logaritmos y la geometría analítica. Pero la teoría de números se consideraba un tema menor, en gran parte de interés recreativo.

Nos debe llevar a la consideración de destacar que todo lo relacionado con la teoría de números debería utilizarse como un trampolín desde la aritmética hacia la generalización y el formalismo algebraico, y como un medio para proporcionar significados intuitivos de números, variables, funciones y pruebas.

Así, de la teoría de números clásica a la analítica, inspirados por Gauss, otros matemáticos del siglo XIX aceptaron el desafío. Sophie Germain (1776-1831), quien dijo una vez: "…*Nunca he dejado de pensar en la teoría de los números*..", hizo importantes contribuciones al último teorema de Fermat, y Adrien-Marie Legendre (1752-1833) y Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 –59) confirmó el teorema para n igual a 5, es decir, mostraron que la suma de dos quintas potencias no puede ser una quinta potencia. En 1847, Ernst Kummer (1810-1893) fue más allá, demostrando que el último teorema de Fermat era cierto para una gran clase de exponentes; desafortunadamente, no podía descartar la posibilidad de que fuera falso para una gran clase de exponentes, por lo que el problema seguía sin resolverse.

El mismo Dirichlet (quien supuestamente mantuvo una copia de las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss junto a su cama para la lectura nocturna) hizo una profunda contribución al demostrar que, si a y b no tienen un factor común, entonces la progresión aritmética a, a + b, a + 2b , a + 3b, ... debe contener infinitos primos. Entre otras cosas, esto estableció que hay infinitos números primos 4k + 1 e infinitos números primos 4k - 1 también. Pero lo que hizo que este teorema fuera tan excepcional fue el método de prueba de Dirichlet: "*…empleó las técnicas de cálculo para establecer un resultado en la teoría de números…*".

Esta sorprendente pero ingeniosa estrategia marcó el comienzo de una nueva rama del tema: la teoría analítica de números.

Quiero recordar la última frase de la sección anterior de SAPERE AUDE: "*…Soy consciente de la marcada diferencia entre la matemática escolar y la olímpica. Esta última apunta al ingenio, la creatividad, la invención, el desarrollo de la intuición para responder de manera efectiva a las aspiraciones de la joven generación. ¡Es, bajo esta idea precisamente, lo que me induce a presentar en esta sección dos joyitas numéricas, a mi juicio muy interesantes, que estoy seguro gustará al lector!...*".

Las dos joyitas que presento a continuación es la propuesta en la edición del número 103 que el lector tiene en su mano.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

JOYITA: a) *Hallar las cuatro últimas cifras del número* 3^{2019}

SOLUCIÓN

Paso 1

¡Lo importante es elegir una estrategia lo más simple posible para la resolución! Utilizaremos el binomio de Newton y las congruencias mod 10^4, al pedirnos las últimas cuatro cifras del número 3^{2019} .

Como $3^2 = 9 = 10 – 1$, podemos escribir 3^{2019} así

$$3^{2019} = 3.3^{2018} = 3.3^{2.1009} = 3.(10-1)^{1009}$$

Paso 2

Apliquemos la fórmula del binomio de Newton que evidentemente nos simplificará muchos los cálculos para calcular una cantidad grande, como es 3^{2019}:

$$3^{2019} = 3.3^{2018} = 3.(10-1)^{1009} \equiv 3.[\binom{1009}{1009}.10^{1009} - \binom{1009}{1008}.10^{1008} + ... + \binom{1009}{3}.10^{3} - \binom{1009}{2}10^{2} + \binom{1009}{1}.10 - \binom{1009}{0}.1]$$

$$3^{2019} \equiv 3.[......... + \frac{1009.1008.1007}{3.2}\cdot 10^{3} - \frac{1009.1008}{2.1}\cdot 10^{2} + 1009\cdot 10 - 1]$$

$$3^{2019} \equiv 3.[[....(1009).(168).1007 - (500+4)(1000+9)]\cdot 100 + (1000+9)\cdot 10 - 1] =$$

$$3.[[....(1000+9).(168).(1000+7) - (500+4)(1000+9)]\cdot 100 + (1000+9)\cdot 10 - 1 \equiv 3.[4000 - 3600 + 90 - 1] \bmod(10000) \equiv 1467$$

Paso 3

Por lo tanto, las cuatro últimas cifras se obtienen de la operación elemental

3 x 489= 1467.

Las últimas cuatro cifras son **1467**

JOYITA: b) *¿Cuál de los dos números es mayor: 888! ó 300^{599}?*

NOTA: Con una simple demostración se puede ver que el número *888!* , es bastante mayor que 300^{599}. A mi juicio, no tiene mucho interés esta propuesta.

Me permito redirigir el ejercicio proponiendo la resolución de otro que ya no es tan evidente.

De los números 888! y 445^{888} ,¿cuál es el mayor?

SOLUCIÓN

Paso 1

Definamos los números dados por ***P=889 y Q=445^889***
Calculemos el cociente de los dos números para obtener la comparación

$$\frac{P}{Q}=\frac{889!}{445^{889}}$$

De aquí desarrollando el numerador y denominador respectivamente tendremos,

$$\frac{P}{Q}=\frac{1.2.3.4........889}{\underbrace{445.445..............445}_{889}}=\frac{1}{445}.\frac{2}{445}.\frac{3}{445}....\frac{889}{445}$$

Paso 2

Escribamos de otra forma la expresión anterior

$$\frac{P}{Q}=\frac{445-444}{445}.\frac{445-443}{445}....\frac{445-1}{445}.\frac{445}{445}....\frac{445+1}{445}.\frac{444+2}{445}.....\frac{445+444}{445}$$

$$\frac{P}{Q}=\left(1-\frac{444}{445}\right).\left(1-\frac{443}{445}\right)....\left(1-\frac{1}{445}\right).1.\left(1+\frac{1}{445}\right).\left(1+\frac{2}{445}\right).\left(1+\frac{3}{445}\right)....\left(1+\frac{442}{445}\right)\left(1+\frac{443}{445}\right).\left(1+\frac{444}{445}\right)=$$

$$\frac{P}{Q}=\left(1-\left(\frac{444}{445}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{443}{445}\right)^2\right).....\left(1-\left(\frac{1}{445}\right)^2\right)$$

Paso 3

Cada una de las expresiones

$$\left(1-\left(\frac{i}{445}\right)^2\right);\forall i=1,2,......445 \text{ es menor que 1}$$

Por lo tanto,

$$\frac{P}{Q}=\sum_{i=1}^{444}\left(1-\left(\frac{i}{445}\right)^2\right)<1\Rightarrow P<\mathrm{Q}$$

Es decir ***889!< 445^889^***

NOTA: ¡Es un ejercicio al que se le puede sacar mucho jugo. Por ejemplo, plantear esta situación para cualquier par de números

$$P=x!\ ;\ \ Q=y^z$$

buscando la relación que pueda existir entre ***x, y, z!***

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Varios ejercicios relativos a la teoría de números y la geometría del triángulo, presentaré en esta ocasión que están recogidos de los propuestos en la Olimpiada Matemática Nacional en España en sus diferentes fases.
¿Por qué creo que es importante dedicar una parte de esta sección a plantear ejercicios de Olimpiada a nivel de Bachillerato?
Es una hermosa tarea ya que podemos:

a) Lograr que a los alumnos les gusten y se inclinen por una matemática atractiva fuera de la enseñanza reglada.

b) Prepararse para la participación en unas Olimpiadas Matemáticas le permite al alumno, generalmente apto para esta disciplina, subsanar las deficiencias que traen para poder abordar satisfactoriamente la materia.

c) Desarrollar las habilidades matemáticas que poseen los alumnos y simultáneamente cubrir los objetivos más allá del curso. (Dichos objetivos rara vez mencionan a las habilidades, reduciéndose a la adquisición de conocimientos y manipulación de fórmulas para aplicaciones en problemas sencillos).

d) Generar una atmósfera propicia para el estudio de las matemáticas. Obviamente esto trasciende al aula, e incluso debería abarcar al medio donde se desenvuelven los estudiantes.

e) Impulsar a los estudiantes que tienen habilidades matemáticas e interés por aprender más profundamente esta ciencia.

Cuando intentamos dar solución a situaciones problemáticas nos damos cuenta de que la tarea no es de un sólo individuo, ni siquiera las soluciones están restringidas al ámbito escolar. Así, con el ánimo de crear una atmósfera propicia para el estudio de las matemáticas e impulsar a los estudiantes más dotados, se puede optar por la realización de diferentes concursos. Éstos requieren invertir mucho tiempo para su organización y la obtención de medios materiales para llevarse a cabo. Por otra parte, estos eventos pueden circunscribirse a los contenidos de las asignaturas, con lo que su utilidad se revierte inmediatamente en el aula; planteándoles al alumnado que la matemática es una ciencia viva.

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

a) *En el interior de un cuadrado $ABCD$ se construye el triángulo equilátero ABE. Sea P el punto intersección de las rectas AC y BE. Sea F el punto simétrico del P respecto de la recta DC. Se pide demostrar que:*

1)El triángulo CEF es equilátero.
2) El triángulo DEF es rectángulo e isósceles.
3) El triángulo BDF es isósceles.
4) el triángulo PDF es equilátero

b) *En el triángulo MNP, el área S y el ángulo en P son conocidos. Hallar el valor de los lados **m** y **n** para que el lado **p** sea lo más pequeño posible.*

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

a) *Demuestra que el número $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltiplo de **7**.*
b) *Se pide encontrar todos los números enteros positivos **n** tales que $3^n + 5^n$ es múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$.*

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@gmail.com