

Análise de erros em resoluções de equação e inequação exponencial: revelando as dificuldades dos alunos

Maria Luisa Perdigão Diz Ramos, Edda Curi

Fecha de recepción: 26/06/2014
 Fecha de aceptación: 28/11/2015

<p>Resumen</p>	<p>Este artículo tiene como objetivo analizar, clasificar e identificar los errores cometidos por los estudiantes en las actividades que implican la ecuación y la desigualdad exponencial. La investigación es parte de un estudio doctoral que se llevó a cabo con 37 alumnos del 1º año de la Enseñanza Secundaria de un curso técnico en una escuela pública de Minas Gerais - Brasil. Utilizamos del análisis de contenido en la resolución presentada por los estudiantes y así hemos creado tres categorías con el objetivo de identificar los errores encontrados. Como resultado, fue constatado que los estudiantes tenían dificultades desde de la Enseñanza Primaria, además de las relacionadas con los contenidos investigados.</p> <p>Palabras clave: errores; ecuación y la desigualdad exponencial; Enseñanza Secundaria</p>
<p>Abstract</p>	<p>This article aims to analyze, categorize and identify mistakes made by students in activities that involve exponential equation and inequality. The investigation is part of a doctoral research that was conducted with 37 students from a public High School focused on professional and technological education in Minas Gerais / Brazil. We use content analysis in the resolution by the students and so we created three categories for the purpose of identifying the errors found. As a result, it was found that students had difficulties coming from the Elementary School, in addition to those relating to the contents investigated.</p> <p>Keywords: mistakes; exponential equation and inequality; Elementary School</p>
<p>Resumo</p>	<p>Este artigo tem como objetivo analisar, identificar e categorizar erros cometidos por alunos em atividades que envolvem equação e inequação exponencial. A investigação faz parte de uma pesquisa de doutorado que foi realizada com 37 alunos do 1º ano do Ensino Médio de um curso técnico de uma escola pública de Minas Gerais – Brasil. Utilizamos da análise de conteúdo na resolução apresentada pelos alunos e assim, criamos três categorias com a finalidade de identificar os erros encontrados. Como resultado, foi possível constatar que os alunos apresentaram dificuldades oriundas do Ensino Fundamental, além daquelas referentes aos conteúdos investigados.</p> <p>Palavras-Chave: erros; equação e inequação exponencial; Ensino Médio</p>

Introdução

O erro vem sendo pesquisado na Educação Matemática ao longo dos anos. Cury (2008) apresenta as ideias de alguns precursores que trataram o erro em suas pesquisas. Thorndike é mencionado pela autora como o pai da Psicologia Educacional e enfatizava em seus trabalhos que os interesses vitais do aluno devem ser respeitados, procurando não o entediar com “dificuldades inúteis”. Para ele, era necessário o reforço dos hábitos que permitiam ao aluno a prática dos cálculos. Devido às críticas recebidas por outros colegas, que consideravam seu método baseado em exercícios repetitivos, Thorndike passou a investigar dificuldades e erros relacionados com problemas que ocorrem nas operações aritméticas fundamentais, tornando-se um dos precursores dos estudos relacionados aos erros.

Cury (2008) também menciona o trabalho realizado pelo psicólogo russo Krutetskii. Em seu trabalho, Krutetskii mostra a importância de se analisar o processo e não apenas o produto. Como exemplificado por ele, não se deve avaliar somente a alternativa assinalada em uma questão de múltipla escolha ou o resultado apresentado em uma questão aberta; é necessário também analisar o raciocínio apresentado durante o processo de resolução da questão. Analisando o processo dessa maneira é possível perceber as habilidades matemáticas dos estudantes, além das dificuldades por eles apresentadas. O pesquisador afirma também que, nessa forma de análise, pode-se questionar os estudantes a respeito dos erros cometidos e ajudá-los na reconstrução do conhecimento.

No trabalho desenvolvido por Krutetskii e sua equipe foram utilizados vários métodos de pesquisa que envolviam conteúdos matemáticos de diversos ramos tais como, Álgebra, Aritmética, Geometria e Lógica. Na investigação foram envolvidos desde um único estudante até um grande grupo, além de tomarem opinião de pais, professores e matemáticos. Levaram em consideração não somente a produção escrita dos estudantes, mas também a produção oral, como, por exemplo, o registro da resolução das questões realizadas em voz alta e o questionamento das respostas apresentadas.

Segundo Cury (2008), os trabalhos realizados por esses pesquisadores datam do início do século XX e a partir deles foi possível perceber que, para favorecer a aprendizagem e eliminar as dificuldades e os erros, era necessário utilizar da análise em produção escrita realizada pelo aluno. Então, acreditamos que seja fundamental o professor criar situações nas quais os alunos se tornem capazes de expor suas dificuldades e o professor capaz de analisá-las. Analisar a produção escrita do aluno não é simplesmente verificar o que ele acertou ou errou. O professor deve ter a preocupação de saber o grau de conhecimento que o aluno detém e que o conduz a elaborar uma determinada resposta, pois essa ação é que o levará a descobrir as dificuldades de aprendizagem apresentadas por esse aluno.

Neste artigo trazemos a análise de erros realizada na produção escrita de 37 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública de ensino técnico localizada em Minas Gerais – Brasil. Essa análise faz parte do resultado da pesquisa

de doutorado da primeira autora. Mostraremos neste trabalho a análise de erros realizada em duas questões sobre o conteúdo de equação e inequação exponencial.

Revisão de Literatura

Iniciaremos esta revisão levando em consideração a afinidade existente entre as palavras dificuldade e erro. Para isso, usaremos dos trabalhos de alguns pesquisadores com a finalidade de descrever as acepções que eles apresentam para a palavra erro e qual a relação delas com a palavra dificuldade.

No campo semântico, De La Torre (2007) descreve o erro usando quatro pontos cardeais: efeito destrutivo, deturpativo, construtivo e criativo. O erro é apontado por ele de uma forma binária: a negativa (efeito destrutivo e deturpativo) e a positiva (construtivo e criativo). Na forma negativa, o erro tem um efeito destrutivo, isto é, ele provoca falhas irreversíveis; já na forma de estímulo criativo o erro pode ser considerado como um instrumento de progresso.

Além disso, De La Torre (2007) assinala ainda que o erro pode indicar duas situações: resultado e processo. O erro visto como resultado tem um significado negativo, isto é, apresenta um efeito deturpativo ou destrutivo. Visto como processo pode ser considerado como procedimento construtivo, método de descoberta científica ou como uma forma de transmissão didática, portanto, vista como um estímulo criativo. Essa criatividade, conforme apontada pelo autor, “[...] não está, como é natural, no erro, mas nas pessoas que são capazes de gerar novas ideias apoiando-se nele” (p. 15).

Para a pesquisadora Borasi (1989) o erro pode contribuir para uma melhor compreensão e aprendizagem da Matemática. Na maioria das vezes o professor acredita que a melhor forma de capacitar o aluno é por meio da transmissão direta do assunto a ser lecionado. Ele não percebe que o aluno pode chegar a uma compreensão mais profunda de um conteúdo matemático a partir do estudo, análise e exploração criativa de alguns erros.

De acordo com Rico (1998), o professor não pode ignorar a capacidade do aluno, nem tão pouco desprezar os erros que ele comete. Ele descreve que a maioria das investigações considera as seguintes características predominantes nos erros cometidos pelos alunos:

- Os erros são surpreendentes e permanecem ocultos para o professor durante algum tempo.
- Os erros são persistentes e para serem retificados é necessário que haja uma reorganização do conhecimento do aluno.
- Os erros podem ser sistemáticos ou podem acontecer por engano. No primeiro tipo de erro, o aluno possui uma compreensão equivocada e a utiliza achando

que está correta. Esse tipo de erro acontece com uma frequência maior e contribui mais para revelar o processo mental do aluno. No segundo tipo, o erro é proveniente de lapso, descuido ou esquecimento temporário.

- Os erros acontecem por falta de conhecimento de conceitos e símbolos.

Analisando o erro em um contexto escolar, o fato de o aluno cometer um equívoco, ou uma falha, ou um descuido proveniente de seu pensamento ou ação, já é o suficiente para alertar o professor de que alguma coisa está errada e que alguma atitude deve ser tomada. Assim, citando Socas (1997), Lupiáñez (2013) afirma que o erro é uma manifestação visível de uma dificuldade. Ainda, segundo o autor, os erros cometidos em atividades matemáticas dão condições aos professores de visualizarem as dificuldades dos alunos.

A busca do conhecimento depende muito da interpretação daquilo que está sendo analisado. Na maioria das vezes, essa busca não acontece sem que o aluno demonstre incertezas. Então, é importante que o erro seja visto pelo professor como um elemento didático e não como algo que deva ser ignorado. Tratado dessa maneira, o erro se transforma em estratégia de uma pedagogia que tem como objetivo a superação das dificuldades. Corroborando com o exposto, Dullius et al. (2012) descrevem que “o professor deve estar atento à origem do erro cometido pelo estudante, para poder intervir de forma a ajudá-lo a detectar e superar as dificuldades.” (p. 73).

Devido ao que foi mencionado, consideramos que as duas palavras estão atreladas, pois, no nosso entendimento, o erro é uma das formas pelas quais os alunos revelam suas dificuldades em um determinado conteúdo escolar.

A seguir, apresentaremos alguns trabalhos que tem como foco a análise de erros na produção escrita de alunos. Um dos estudos que chegaram ao Brasil foi o realizado por Borasi (1989), o qual apresenta uma contribuição expressiva sobre a visão do erro na Educação Matemática. Iniciaremos a apresentação por meio desse trabalho, cujo foco de investigação foi o Ensino Básico.

O trabalho de Borasi (1989) é intitulado “Students' Constructive Uses of Mathematical Errors: A Taxonomy”. Com o objetivo de mostrar como os erros podem ser utilizados de forma construtiva no processo ensino-aprendizagem, a autora realizou uma investigação com duas turmas de alunos do *11th grade*¹, a qual envolvia um experimento composto de 10 questões sobre definições matemáticas. Ao todo, registrou-se 20 erros que foram analisados. Em seguida, a autora deixa uma contribuição denominada por ela “Taxonomia para o uso construtivo dos erros” (p. 27, tradução nossa). Como resultado, identificou-se oito elementos específicos que foram considerados como as formas mais adequadas para se usar construtivamente os erros.

¹ O sistema de ensino americano inclui do nível pré-escolar até 12º ano (K – 12). Atualmente no Brasil o Ensino Básico está estruturado em 12 anos, sendo assim, *11th grade* corresponde ao 2º ano do Ensino Médio.

Na mesma época, outro trabalho foi realizado por um grupo de pesquisadores. Também, com a finalidade de analisar os erros cometidos por estudantes, Resnick et al. (1989) realizaram uma pesquisa com 113 crianças dos Estados Unidos, França e Israel, em níveis de escolaridade que variavam da *4th grade* até *6th grade*². O estudo tinha como objetivo verificar os erros cometidos pelos alunos ao trabalharem com números e frações decimais e verificar se tais erros eram provenientes de tentativas de integração do novo conhecimento com o que já havia sido ensinado sobre números inteiros. Para isso foram aplicados testes, nos quais os alunos deveriam identificar os números maiores e menores em uma relação de valores apresentados na forma decimal e de fração. Como resultado, foi possível compreender a lógica de raciocínio desses alunos e verificar que eles fizeram uso de regras de comparação de números inteiros ao compararem números decimais.

Em sua pesquisa de mestrado, Feltes (2007) analisou qualitativamente erros em testes aplicados a alunos da 7^a e 8^a séries (8^o e 9^o anos) do Ensino Fundamental e alunos do 1^o ano do Ensino Médio ao resolverem questões de potenciação, radiciação e equações exponenciais. Os erros foram classificados em 17 categorias e assim foi possível verificar que as maiores dificuldades estavam relacionadas a operações numéricas e às propriedades da potenciação. Além disso, a autora aplicou um questionário aos professores de Matemática, que lecionavam nas escolas investigadas, sobre os erros cometidos por seus alunos. A partir do resultado desse questionário, a autora constatou que os professores investigados consideravam que os erros eram provenientes de falta de estudo e/ou de atenção.

Dullius, Quartieri e Furlanetto (2012) analisaram 10 questões das Olimpíadas de Matemática realizadas por 311 alunos das três séries do Ensino Médio de 26 municípios do Vale do Taquari em Lajeado/RS. A prova teve como uma de suas particularidades a interdisciplinaridade, pois, a contextualização das questões trouxe problemas do cotidiano, abordando conteúdos previstos nas três séries do Ensino Médio. Partindo de cinco categorias levantadas por meio dos referenciais teóricos selecionados, os autores apresentaram os erros cometidos por questão, seguido de gráficos com o objetivo de exibir os percentuais de erros por categorias em cada série. De uma forma geral, observou-se uma grande incidência de erros devido à compreensão do enunciado e de erros devido a dificuldades com o conteúdo investigado.

Também realizando análise de erros em respostas parcialmente corretas e incorretas em uma questão sobre resolução de equações, Cury, Ribeiro e Müller (2011) apresentam o resultado de uma pesquisa feita com 141 alunos de cursos de licenciatura de Matemática de dez instituições de ensino superior do Brasil. Os dados analisados foram discutidos utilizando-se como referenciais teóricos algumas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra, bem como o conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo. As respostas foram classificadas como corretas, parcialmente corretas, incorretas e ausência de respostas. Das 89 respostas parcialmente corretas e incorretas, as três parcialmente corretas não

² Levando em consideração o que foi dito na nota anterior, o *4th grade* até *6th grade* correspondem do 5^o ao 7^o ano do Ensino Fundamental.

foram categorizadas, por apresentarem erros distintos. Para as 86 respostas incorretas foram criadas cinco categorias e em cada uma delas foram apresentados os erros e uma síntese sobre eles. Nesse trabalho, os autores descreveram em suas considerações finais que, devido ao baixo índice de acerto na questão (13%), os alunos demonstraram a falta de conhecimento sobre equações e seus processos de resolução e alertaram para a importância de que os formadores de professores de Matemática também devem levar em conta o conhecimento pedagógico do conteúdo. Assim, os autores consideraram também a importância de se discutir as causas dos erros com esses futuros professores a fim de conscientizá-los da necessidade de analisar os erros cometidos pelos alunos e ajudá-los na superação das dificuldades.

Borasi (1989), Resnick et al. (1989), Feltes (2007) e Dullius (2012) realizaram seus trabalhos com alunos da Educação Básica e obtiveram resultados significativos com relação a importância da análise de erros na produção escrita dos alunos em questões de Matemática. No que diz respeito à Formação Inicial de Professores, a pesquisa de Cury, Ribeiro e Müller (2011), além de apresentarem análise de erros em questões de Matemática, descreveram, também, a importância dos professores trabalharem a análise de erros com os alunos de licenciatura.

Metodologia de Pesquisa

O método aqui adotado foi o de pesquisa qualitativa, utilizando-se da análise de conteúdo nas produções escritas desses alunos. Em conformidade com a análise de conteúdo definida por Bardin (1977), executamos a análise em três etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na primeira etapa, pré-análise, a resolução da questão apresentada por cada aluno foi identificada com a letra A seguida de um número usado para referenciá-lo neste trabalho. Conforme Cury (2013), para correção das resoluções apresentadas foram criadas quatro classificações denominadas como: Resposta correta – Código 2; Resposta parcialmente correta – Código 1; Resposta incorreta – Código 0 e Resposta em Branco – Código 9. Na segunda etapa, exploração do material, trabalhamos com “o processo de unitarização e classificação das respostas parcialmente corretas ou incorretas” (CURY, 2013, p. 6). As respostas semelhantes foram agrupadas e, posteriormente, os tipos de erros categorizados. Para isso, utilizamos da análise de erros como parte integrante da análise de conteúdo. Na última etapa, tratamento dos resultados, utilizamos exemplos retirados do próprio *corpus* para descrevermos os erros identificados dentro de cada categoria.

Para realização desta pesquisa contamos com a participação dos 37 alunos que compõem a turma B do 1º ano da Educação Profissional Tecnológica de Nível Médio na Modalidade Integrada de um curso técnico ofertado por uma escola pública de Minas Gerais – Brasil. A escolha dessa turma se deu pelo fato da pesquisadora (primeira autora) lecionar para os alunos a disciplina técnica de Sistemas Digitais, tendo, portanto, uma maior proximidade com eles.

As questões aqui analisadas foram as de números 16 e 17, retiradas do teste investigativo composto por 20 questões. O teste foi aplicado a esses alunos durante o desenvolvimento do trabalho de doutorado da pesquisadora e abordava o conteúdo lecionado na disciplina de Matemática, no 1º semestre do 1º ano do Ensino Médio.

Apresentaremos os resultados das questões da seguinte maneira:

- Inicialmente, descreveremos o enunciado, o objetivo e a resolução tomada como padrão em cada questão. Em seguida, será mostrado o quadro com o percentual de respostas por questões classificadas como: correta, parcialmente correta, incorreta e em branco.
- Num segundo momento, apresentaremos os tipos de erros cometidos no teste investigativo por categoria, acompanhado de exemplo e texto-síntese.

Apresentação e Análise dos Dados

Iniciaremos, então, com a apresentação do enunciado, objetivo e resposta padrão para cada uma das questões. É importante que o professor defina uma resposta padrão a partir das respostas apresentadas pelos alunos, pois, assim, não estará julgando os erros de seus alunos a partir de suas estruturas mentais (DE LA TORRE, 2007). Por esse motivo, tomamos como respostas padrão para as questões 16 e 17 as apresentadas por A3 e A20, respectivamente.

A questão 16 traz o seguinte enunciado:

16 – Resolva a equação: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} = 8$

Na análise da questão 16 temos como objetivo identificar as dificuldades do aluno com relação à resolução de equação exponencial. Para resolvê-la, o aluno deveria inverter a base e operar com expoente negativo, além de representar o número 8 em potência de 2. Em seguida, aplicar as propriedades da equação exponencial e achar os valores de x que satisfaçam a equação.

Na Figura 1 está representada a resolução dada por A3, sendo ela considerada a resposta padrão para a questão.

Figura 1 – Resposta Padrão da Questão 16 Apresentada por A3

$$(2^1)^{x^2+1} = 2^3$$
$$2^{x^2+1} = 2^3$$
$$x^2+1-3=0$$
$$x^2-2=0$$
$$x = \pm\sqrt{2} \quad x = \pm 2$$

O enunciado da questão 17 foi:

17 – Determine os valores de x tais que $\left(\frac{5}{7}\right)^{4x^2+4x} > \left(\frac{5}{7}\right)^{4(x+1)}$.
--

Na questão 17, o nosso objetivo foi o de identificar as dificuldades do aluno ao resolver inequação exponencial, quando a base da potência se encontra entre 0 e 1. Para solucionar a questão, o aluno deveria aplicar as propriedades de uma inequação exponencial e inverter o sinal da relação de desigualdade entre os expoentes. Em seguida, achar os zeros da função polinomial do 2º grau e determinar, a partir do estudo do sinal da função $f(x) = x^2 - 1$, a solução da questão.

A Figura 2 apresenta a resolução dada por A20.

Figura 2 – Resposta Padrão da Questão 17 Apresentada por A20

$\left(\frac{5}{7}\right)^{4x^2+4x} > \left(\frac{5}{7}\right)^{4(x+1)}$
 $0 < \frac{5}{7} < 1$ Inverte
 $4x^2+4x > 4(x+1)$
 $4x^2+4x < 4(x+1)$
 $4x^2+4x = 4x+4$
 $4x^2+4x-4x-4=0$
 $4x^2-4=0$
 $4x^2=4$
 $x^2=\frac{4}{4}$
 $x^2=1$
 $x=\sqrt{1}$
 $x=\pm 1$
 $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

No Quadro 1 estão apresentados o número de alunos e o valor percentual de respostas por classificação.

Quadro 1: Distribuição de Respostas por Classificação

Classificação	Questão 16		Questão 17	
	Nº	%	Nº	%
Correta	16	43	6	16
Parcialmente Correta	11	30	3	8
Incorreta	6	16	24	65
Em branco	4	11	4	11
Total	37	100	37	100

Analisando os dados do Quadro 1, verificamos que o maior índice de resoluções corretas ocorreu na questão 16. Na questão 17, 73% dos alunos apresentaram resoluções classificadas como parcialmente correta ou incorreta, sendo a maioria incorreta – 65%.

Analisando as resoluções parcialmente correta e incorreta foi possível identificar os erros cometidos pelos alunos e assim criar três categorias para esses erros, que relacionamos a seguir:

1. Erro no cálculo das raízes da equação do 2º grau ou dos zeros da função polinomial do 2º grau.
2. Erro na aplicação das propriedades da equação ou inequação exponencial.
3. Erro no estudo de sinal da função polinomial do 2º grau.

Na primeira categoria o tipo de erro identificado foi cometido durante o cálculo das raízes de uma equação do 2º grau. Um exemplo desse erro está mostrado na Figura 3.

16 – Resolva a equação: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} = 8$

$\frac{-1(-x^2+1)}{2} = 2$

$\frac{-x^2-1}{2} = 2$

$x^2-1-3=0$

$\Delta = 4(1)(-3)$

$\Delta = -12$

$\frac{-1 \pm \sqrt{-12}}{2}$

$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{12}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{12}}{2} \right\}$

Figura 3 – Resposta Apresentada por A19

A19 errou ao calcular as raízes da equação de 2º grau que possui o coeficiente b igual a zero. O aluno resolveu corretamente a equação exponencial, mas no momento de encontrar as soluções, errou ao considerar na equação encontrada $x^2 - 1 - 3 = 0$ o valor de $b = -1$ e $c = -3$, ao invés de $b = 0$ e $c = -4$. Esse mesmo erro foi cometido por A10 na mesma questão. Entendemos que esses alunos desconhecem a existência de equações de 2º grau que não apresentam todos os coeficientes.

Diferentemente do que foi descrito acima, outro tipo de erro no cálculo das raízes de uma equação de 2º grau ou de uma função polinomial do 2º grau ocorreu de forma semelhante nas questões 16 e 17. Um dos erros está mostrado na Figura 4.

Figura 4 – Resposta Apresentada por A11

17 – Determine os valores de x tais que $\left(\frac{5}{7}\right)^{4x^2+4x} > \left(\frac{5}{7}\right)^{4(x+1)}$

$$4x^2 + 4x > 4x + 4$$

$$4x^2 > 4$$

$$x^2 > 1$$

$$x > 1$$

No desenvolvimento da questão 17, A11 encontrou somente um único zero para a função $f(x) = x^2 - 1$. Acreditamos que, pelo fato de b igual a zero, o aluno encontrou somente a raiz quadrada positiva do número, deixando, assim, de apresentar a raiz negativa na resolução. Talvez, por esse motivo, deixou de realizar o estudo de sinal da função. Também, não podemos deixar de destacar, que o aluno cometeu erro referente à categoria 2, o qual será descrito mais a frente.

Na segunda categoria, o tipo de erro encontrado nas duas questões foi referente à resolução incorreta de uma equação ou de uma inequação exponencial. Na questão 16 os alunos erraram ao aplicar as propriedades da equação exponencial, conforme apresentado na Figura 5.

16 – Resolva a equação: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} = 8$

$$-x^2 + 1 = 16$$

$$x^2 + 15 = 0$$

$$-x^2 - 15 = 0$$

$$x^2 = \sqrt{15}$$

$$x = \pm\sqrt{15}$$

Figura 5 – Resposta Apresentada por A24

Sem aplicar as propriedades da equação exponencial, A24 procurou resolver a questão usando de artifícios incorretos. Desconsiderando que o denominador faz parte da base da potência da equação exponencial, o aluno efetuou uma transposição do número 2, multiplicando-o pelo número 8 existente no segundo membro da equação, apresentando assim, resposta incorreta para a questão.

Na questão 17, o erro cometido pelos alunos nesta categoria foi devido a não identificação de que a base da potência da inequação estava entre 0 e 1. Dos 27 alunos que apresentaram resposta parcialmente correta e incorreta, 24 apresentaram esse tipo de erro. A Figura 6 exibe o erro cometido por esses alunos.

17 – Determine os valores de x tais que $\left(\frac{5}{7}\right)^{4x^2+4x} > \left(\frac{5}{7}\right)^{4(x+1)}$

$$x' = \frac{8}{8} = 1$$

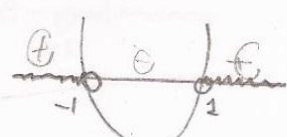
$$4x^2 + 4x > 4x + 4$$

$$4x^2 - 4 > 0$$

$$\Delta = -4 \cdot 4 \cdot (-4)$$

$$\Delta = 64$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{64}}{8}$$

$$x'' = \frac{-8}{8} = -1$$


$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 > x > 1\}$$

Figura 6 – Resposta Apresentada por A10

Como os alunos não identificaram que o valor da base da potência estava entre 0 e 1, logo não realizaram a inversão do sinal. Acreditamos que, para esses alunos, a resolução de uma inequação exponencial é realizada sempre da mesma forma, independentemente do valor da base da potência. Igualmente a A10, A11 também não realizou a inversão do sinal, conforme apresentado na Figura 4, além de ter cometido outros erros já mencionados.

Na terceira categoria se encontra o tipo de erro referente a não realização do estudo de sinal da função encontrada na questão 17. A Figura 7 mostra esse tipo de erro cometido por A15.

17 – Determine os valores de x tais que $\left(\frac{5}{7}\right)^{4x^2+4x} > \left(\frac{5}{7}\right)^{4(x+1)}$

$4x^2 + 4/x < 4/x + 4$

$4x^2 < 4$

$4x^2 - 4 < 0$

$x^2 - 1 < 0$

$x^2 < 1$

$x < \pm 1$

$0 < \frac{5}{7} < 1$

$x > 1$ conserva o Sinal

$0 < x < 1 \rightarrow$ inverte o Sinal

$x < -1$

Figura 7 – Resposta Apresentada por A15

A15 resolveu corretamente a questão até o momento em que encontrou os zeros da função $f(x) = x^2 - 1$, mas, ao realizar o estudo de sinal da função, o aluno apresentou os zeros na reta real sem esboçar a parábola, definindo, assim, a solução incorreta para a questão.

Considerações Finais

Ao realizar a análise de erros nas resoluções apresentadas pelos alunos, identificamos erros provenientes do Ensino Fundamental, além de erros referentes ao conteúdo de equação e inequação exponencial, conteúdo esse que é abordado no Ensino Médio. Foi possível notar que, em algumas resoluções apresentadas, o erro cometido por alguns alunos foram, exclusivamente, erros referentes ao conteúdo do Ensino Fundamental.

Como dificuldade proveniente do Ensino Fundamental foi possível identificar erro cometido pelos alunos no cálculo das raízes de uma equação do 2º grau e nos zeros de uma função polinomial do 2º grau, quando essas possuem os coeficientes b ou c iguais a zero. Esses mesmos erros foram identificados por meio da análise de erros realizada na avaliação somativa desses alunos (RAMOS; CURI, 2014). Provavelmente, esses erros já vinham sendo cometidos por eles no cálculo das raízes de equações quadráticas desde o Ensino Fundamental, pois também os identificamos neste trabalho.

Lima (2007) aponta erros semelhantes cometidos por alunos ao encontrarem as raízes das seguintes equações quadráticas: $r^2 - r = 2$ e $m^2 = 9$. A autora descreve que uma única raiz é dada como resposta para cada equação e considera que parece ter faltado aos alunos “motivação para buscar outra raiz. [...] eles podem não pensar que é possível achar outro número que seja adequado para a situação, e se satisfazem com apenas uma raiz.” (p. 266).

Do que foi analisado, encontramos erros referentes à aplicação das propriedades de potência. Os alunos não conseguiram identificar que a fração $\frac{1}{2}$ deveria ser substituída pela potência de 2, ou seja, 2^{-1} , e que deveriam, também, ter transformado o número 8 em potência de 2, ou seja, 2^3 , para resolverem a equação exponencial. Feltes (2007) também identificou erros análogos em seu trabalho de mestrado, além de outros erros, classificando-os em 17 categorias diferentes.

Os erros cometidos referentes ao conteúdo do Ensino Médio foram devido à aplicação incorreta das propriedades de uma equação ou inequação exponencial, além da forma incorreta de realizar o estudo de sinal da função encontrada na resolução da questão 17. Júnior (2011), em sua pesquisa, identificou erros referentes ao estudo de sinal na resolução de inequações.

A partir da análise de erros foi possível revelar as dificuldades que os alunos apresentam no conteúdo de equação e inequação exponencial. Por meio desse tipo de análise o professor não só identifica as dificuldades dos alunos, mas também poderá utilizar desses erros em sua prática de ensino. Para isso, o professor deve abandonar a pedagogia tradicional e utilizar de uma nova pedagogia, na qual o erro é visto como um instrumento que contribui para a aprendizagem do aluno.

Assim, a análise de erros pode ser assinalada como uma estratégia didática, pois é uma proposta de exploração e análise da produção escrita do aluno com o intuito de gerar uma fonte de construção de novos conhecimentos (PINTO, 2000; DE LA TORRE, 2007). Isso é possível, pois quando o aluno comete um erro ele está mostrando para o professor o seu conhecimento e em função do retorno, ele definirá se deve continuar utilizando desse conhecimento, ou optar por outro apresentado pelo professor (CORDEIRO, 2009).

Os erros podem ser ocasionados por vários motivos, e esses motivos podem ser identificados quando o professor analisa o processo e não só o resultado. É possível melhorar a estratégia didática, fazendo as intervenções necessárias com a finalidade de esclarecer os enganos. De La Torre (2007) vai além quando afirma que “Do mesmo modo que eliminar a febre não supõe erradicar a doença, mas encobri-la, o erro é um indicador de que determinados processos de ensino/aprendizagem não funcionam” (p. 78). Assim, compete ao professor usar de criatividade para melhorar o processo, pois, dessa forma não estará encobrindo o erro e sim procurando retificá-lo, para que ele não se torne recorrente. Um exemplo do uso do erro como estratégia didática foi apresentado por Ramos (2013).

A criação de novas estratégias didáticas é confirmada por Perrenoud (2000) quando afirma que, a partir de ideias compartilhadas com os alunos, o professor deve ser capaz de criar formas para facilitar a construção de conhecimento. Para ele, “A relação com o saber do professor é tão determinante quanto sua inventividade didática” (p. 64). Tirando proveito dessa inventividade didática o professor utilizará do erro para atingir o aprendizado individual ou de grupos, ou seja, usar o erro como “trampolins para a aprendizagem” (BORASI, 1989).

Diversas são as maneiras de usar o erro para a reconstrução do conhecimento: 1) partindo de erros do próprio aluno ou de outros, o professor poderá elaborar atividades, nas quais o aluno deverá localizar, identificar e corrigir os erros; 2) solicitar ao aluno que resolva o mesmo problema com valores diferentes, de forma que obtenha resultados absurdos, facilitando assim a percepção dos erros cometidos; 3) fazer uso de software que auxilie o aluno nas atividades desenvolvidas; 4) fazer uso de jogos que facilite o entendimento de um determinado conteúdo.

Acrescentando ao que foi dito, Ramos e Curi (2013) apontam uma forma de favorecer o aprendizado do aluno utilizando-se do erro em atividades realizadas na disciplina de Sistemas Digitais:

Destacamos também que é de grande importância a participação de colegas nas correções das atividades. Há de se considerar que, no dia a dia, o aluno interage com colegas ao realizar resoluções de problemas por se encontrar em um contexto social que pode ser favorável ao seu aprendizado. Dessa forma, o surgimento de dificuldades e erros pode ser minimizado. Essas intervenções, aluno-aluno ou professor-aluno, também poderão ser auxiliadas com uso de softwares específicos para desenvolvimento de projetos de Sistemas Digitais. (RAMOS; CURI, 2013, p. 245).

Assim, não somente no Ensino de Matemática, é importante que o professor adote o papel de um agente instigador, isto é, aquele que “busca criar formas de perturbar o sistema cognitivo do aluno.” (PINTO, 2000, p. 45). Esse tipo de atitude faz parte da concepção construtivista, a qual coloca a aquisição do conhecimento como um processo de construção, onde o sujeito interage com o mundo físico e social.

Pinto (2000) e De La Torre (2007) afirmam que o rompimento com a pedagogia tradicional não é uma tarefa simples, pois exige reflexões e mudanças por parte dos professores, dos alunos e das escolas. A mudança é fundamental, pois na nova pedagogia os professores representam um papel ativo e são os responsáveis por construir suas próprias práticas e teorias.

Em suma, concordamos com o que é apresentado por Cury et al. (2011) ao afirmar que é importante os professores trabalharem com a análise de erros com os alunos dos cursos de licenciatura. Isso porque, acreditamos que esses futuros professores, ao aprenderem a lidar com os seus próprios erros, saberão utilizar-se

dos erros cometidos por seus alunos em suas práticas de ensino, ajudando-os a superar suas dificuldades.

Bibliografia

- Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Edições 70. São Paulo: Livraria Martins Fontes, 229 p.
- Borasi, R. (1989). *Students' Constructive Uses of Mathematical Errors: A Taxonomy*. In: *Annual Meeting of the American Educational Research Association*. San Francisco, California: USA, p. 36.
- Cordeiro, C. C. (2009). *Análise e classificação de erros de questões de geometria plana da olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas*. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica)-Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Duque de Caxias, p. 170.
- Cury, H. N. (2008). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos Alunos*. Belo Horizonte: Autêntica. Coleção Tendência em Educação Matemática, p. 112.
- Cury, H. N. (2013). *Análise de erros: uma possibilidade de trabalho em cursos de formação inicial de professores*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., Curitiba. Anais... Curitiba: ENEM-PR, 1-15.
- Cury, H. N., Ribeiro, A. J., Müller, T. J. (2011). *Explorando erros na resolução de equações: um caminho para a formação do professor de Matemática*. Unión Revista iberoamericana de educación matemática, n.28, 143-157.
- De La Torre (2007). *Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança*. Porto Alegre: Artmed, p. 240.
- Dullius, M. M., Quartieri, M. T., Furlanetto, V. (2012). *Análise e classificação de erros na resolução de uma prova de olimpíada de matemática*. Unión Revista iberoamericana de educación matemática, n.32, 71-84.
- Feltes, R. Z. (2007). *Análise de erros em potenciação e radiciação: um estudo com alunos de ensino fundamental e médio*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática)-Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, p. 136.
- Junior, F. S. C. (2011). *Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, p. 194.
- Lima, R. N. (2007). *Equações algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática*. Tese (Programa em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, p. 358.
- Lupiáñez, J. L. (2013). *Análisis Didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular*. IN: Rico, Luis; Lupiáñez, José Luis; Molina, Marta. (Org.). *Análisis didáctico em educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada.
- Perrenoud, P. (2000). *Pedagogia diferenciada*. Porto Alegre: Artmed, p. 183.
- Pinto, N. B. (2000). *O erro como estratégia didática*. São Paulo: Papyrus, p. 182.
- Ramos, M. L. P. D. R. (2013). *Detecção, identificação e retificação: as três fases no tratamento e na correção dos erros*. In: Encontro Nacional de Educação

- Matemática, 11., Curitiba. Anais... Curitiba: ENEM-PR, 1-14.
- Ramos, M. L. P. D. R., Curi, E.. (2013). *Análise de erros em avaliação de sistemas digitais: uma questão com lógica and e flip-flop*. Revista Eletrônica em Educação Matemática, Florianópolis, v.8, n.1, 232-247.
- Ramos, M. L. P. D. R., Curi, E.. (2014). *Dificuldades e erros de alunos do 1º ano da educação profissional tecnológica de nível médio em matemática: reflexões e desafios*. Revista Produção Discente Educação Matemática, São Paulo, v.3, n.1, 67-81.
- Resnick, L. B, Neshet, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., Peled, I. (1989). *Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions*. Journal for Research in Mathematics Education, v.20, n.1, 8-27.
- Rico, L. (1998). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. In: KILPATRICK, J.; GOMES, P. e RICO, L. Educación matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 69-108. Disponível em: <<http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf> >. Acesso em: 25 mar. 2014.
- Socas, Martín M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. In: RICO, Luiz (Org.). La educación matemática en la enseñanza secundaria, Barcelona, 125-154.

Maria Luisa Perdigão Diz Ramos: Professora do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – Cefet-MG. Possui graduação em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Mestrado em Modelagem Matemática pelo Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul. Atualmente é professora do Curso Técnico em Eletrotécnica no Cefet-MG. mlperdigao@yahoo.com.br.

Edda Curi: Professora da Universidade Cruzeiro do Sul – UNICSUL. Possui graduação em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Atualmente é coordenadora e professora titular do Curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul. edda.curi@gmail.com.