Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2019, nº 102, 25-34*

Enseñanza de fractales a partir de preguntas: descripción de una experiencia en un curso de matemática del último año de la escuela secundaria

Nadia Belén Martín
Equipo Técnico Regional (ETR) del Centro de Investigación e Información Educativa (CIIE). Buenos Aires, Argentina
Verónica Parra, María de los Ángeles Fanaro
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

Resumen: *Este trabajo describe una experiencia de aula realizada en un curso de Matemática del último año del nivel secundario argentino. La experiencia aborda la enseñanza de fractales mediante la implementación de una actividad de estudio e investigación (AEI), generada a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal teórico? El referente teórico es la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). La descripción realizada indica que es posible involucrar a los estudiantes en un proceso de estudio proponiendo la formulación de preguntas y la búsqueda de respuesta a partir de un trabajo colectivo.*
Palabras clave: *Enseñanza, fractales, escuela secundaria, AEI, TAD.*

Teaching fractals from questions: description of an experience in a mathematics course in the last year of high school

Abstract: *This work describes a classroom experience in a Mathematics course in the last year of the Argentine secondary level. The experience deals with the teaching of fractals through the implementation of a study and research activity (SRA). The activity was generated from the question: How is a theoretical fractal constructed?*

The theoretical reference is the anthropological theory of the didactic (ATD). The description done indicate that the students and the teacher were involved in a study process incorporating the formulation of questions and the search for answers based on collective work.
Keywords: *Fractals teaching, secondary school, SRA, ATD.*

INTRODUCCIÓN

La experiencia de aula que describimos aquí es parte de una investigación que diseñó e implementó un dispositivo didáctico para enseñar Fractales en la escuela secundaria. En la revisión bibliográfica realizada para delimitar esta experiencia, por un lado, hemos identificamos que los trabajos de investigación referidos a propuestas de aulas y talleres abordan la enseñanza de fractales, en su mayoría, desde un enfoque "tradicional". Con enfoque "tradicional" nos referimos a que las propuestas plantean una metodología donde el profesor explica ciertas nociones en torno a la geometría fractal y los estudiantes las "aplican". Últimamente se están difundiendo trabajos que apuntan a promover una enseñanza de la Matemática que revalorice su funcionalidad (por ejemplo, véase Moreno Ferrari, 2017; Martín, 2015). Por otro lado, la mayoría de los trabajos que analizamos en esta revisión no se encuentran delimitados por un marco teórico-didáctico a partir del cual fundamentan sus propuestas. En ambos sentidos, describimos aquí una experiencia de aula que ha sido concebida a partir del marco teórico de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), adoptando el dispositivo didáctico denominado actividades de estudio e investigación (AEI), cuya principal característica es oponerse al enfoque tradicional de la enseñanza de la matemática.

Las AEI se gestan a partir de uno de los postulados de la TAD que asumen que la enseñanza de la matemática se encuadra en un nuevo paradigma, denominado de la investigación y del cuestionamiento del mundo (PICM), cuyo objetivo primordial es establecer una relación funcional con el saber (Chevallard, 2013). Se propone que el saber se construye a partir de la generación de duplas de preguntas y respuestas. Se propone partir de una pregunta denominada generatriz involucrando a la comunidad de estudio en un proceso cuyo producto es la construcción de repuestas. El calificativo "generatriz" refiere a capacidad de generar numerosas cuestiones derivadas cuya respuesta no baste con la búsqueda de información, sino que es necesario construir y/o reconstruir obras matemáticas y/o de cualquier otra disciplina.

En este trabajo describimos parte de la experiencia de aula al implementar una AEI en el último año del nivel secundario argentino que se inicia con la pregunta Q: ¿Cómo se genera un fractal teórico? Q se presenta a los estudiantes a continuación de haber trabajado en otra AEI que introducía el estudio de los fractales. La elección de Q se justifica porque ésta posibilita abordar un amplio conjunto de organizaciones matemática: autosimilitud, dimensión fractal, área de superficies planas, perímetro de superficies planas, procesos iterativos, semejanza, números complejos, función iterativa, sucesiones, entre otras que exceden al análisis en este trabajo. Esta AEI privilegia el estudio de los procesos iterativos ya que la generación de un fractal teórico matemático se define como la repetición constante de un cálculo simple (iteración).

Este modelo de repetición permite realizar una aproximación a la gráfica de un fractal, que solo es realizable a través del uso de la computadora que ejecuta iteraciones de procesos algebraicos que resultan imposibles de llevar a cabo con las herramientas tradicionales debido a la complejidad, el número de cálculos y el tiempo que requiere esta tarea.

CONTEXTO DE IMPLEMENTACIÓN

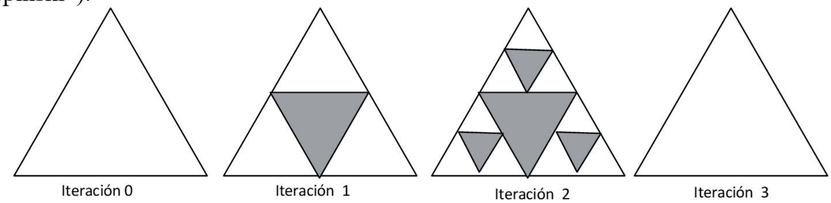
La institución en la que se realizó la experiencia es una escuela de gestión pública ubicada en una zona rural de la provincia de Buenos Aires, Argentina. Esta institución fue seleccionada por tres razones: porque tiene una dinámica de enseñanza tradicional, porque una de las investigadoras estaba a cargo de la materia Matemática de 6º año y porque al presentar el proyecto hubo un gran interés y predisposición por parte de la institución para que se implemente la actividad. El curso se componía de trece estudiantes cuyas edades oscilan entre 17-19 años.

Durante experimentación de la AEI, participaron en el aula dos profesoras y los estudiantes se organizaron en grupos de estudio de 3-4 integrantes. Una de las profesoras participó en carácter de profesora de la clase, y la otra como observadora no participante. La AEI tuvo una duración de seis sesiones de clase (de 120 minutos de duración cada una) y se registró, cada una de ellas, en audios generales (no audios de cada grupo). La profesora no participante tomó notas de campo antes y luego de cada clase y se recolectaron las producciones escritas de los estudiantes clase a clase. Estos últimos registros son el foco de nuestra descripción, la cual se centra no en una descripción clase a clase sino en términos de preguntas formuladas y el proceso de construcción de respuestas.

DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE ESTUDIO EN FUNCIÓN DE LAS PREGUNTAS Y RESPUESTAS

En la introducción de este trabajo se indicó que la pregunta *Q: ¿Cómo se genera un fractal teórico?* se presentó a los estudiantes luego de haber trabajado en otra AEI, la cual introducía el estudio de los fractales. Así, al introducir *Q*, la profesora propuso a los estudiantes que, antes de buscar información para intentar responder *Q*, formularan y anotaran las preguntas que se harían a partir de ella. Así, se registraron las siguientes preguntas derivadas, las cuales se transcriben tal y como fueron redactadas por los estudiantes: *¿Qué herramientas o elementos se necesitan para generar un fractal?, ¿Tiene una fórmula matemática?, ¿Qué es lo que queremos construir?, ¿De qué manera construimos un fractal?, ¿Cómo está compuesto?, ¿Para qué sirven?, ¿Cuáles son los pasos para construirlo?, ¿Toda persona puede construir un fractal?, ¿Qué tipos de fractales existen?, ¿Qué conocimientos tenemos que tener para construir un fractal?, ¿Qué ventajas y desventajas tiene la construcción de un fractal?, ¿Los fractales tienen una fórmula matemática?* De este conjunto de preguntas, la profesora y estudiantes acordaron responder la siguiente:

Parte a: Observar las siguientes iteraciones y construir el término siguiente. Describe el proceso de construcción. (De esta secuencia resulta el fractal denominado "Triángulo de Sierpinski").



Parte b: A partir de la construcción anterior, completar la tabla siguiente:

Iteración n	Cantidad de triángulos blancos	Comparando con iteración anterior
0	$f(0) =$	
1	$f(1) =$	$f(1) = f(0)$
2	$f(2) =$	$f(2) =$
3	$f(3) =$	$f(3) =$
n		

Parte c: Describe el proceso que permitió arribar a los resultados vertidos en la tabla.

Figura 1. Actividad 1

- Q_0: *¿Los fractales tienen una fórmula matemática?*

Para abordar Q_0 la profesora entregó a cada grupo la Actividad 1[1] (Figura 1), y les recordó que podían escribir todas las preguntas que les surjan en cualquier momento del proceso. La primera parte de la Actividad 1 propone recuperar el Triángulo de Sierpinski, y la propiedad de autosimilitud del fractal. El objetivo de esta actividad es introducir a los estudiantes en la noción de funciones iterativas a través del proceso de construcción geométrico de un fractal. La segunda y tercera parte de la Actividad tiene por objetivo relacionar la cantidad de triángulos blancos con la noción de funciones iteradas. Se completa observando las iteraciones anteriores hasta generalizar que f(n) es el resultado de multiplicar f(n-1) por tres.

Cada grupo (G) de estudiantes (E) trabajó en la actividad durante 45 minutos y luego, se difundieron sus respuestas construídas. Todos los estudiantes pudieron dibujar correctamente la tercera iteración (inciso a), sin embargo, en la descripción del proceso de dicha construcción, dos no contestaron (E3, E9), cinco lo hicieron de forma poco desarrollada (E4, E5, E6, E7, E8) y sólo dos (E1, E2) lo resolvieron en forma completa. A continuación, se presenta un fragmento de resolución, representativo de este tipo de respuestas. Se presenta (Figura 2) la construcción realizada por E1, quien además de haber contestado de forma completa, hace referencia a "figuras congruentes", "autosimilar", "triángulo equilátero" o "aplicar una misma transformación sucesivamente".

1. Esta actividad se contempla en el denominado modelo praxeológico de referencia (MPR). Este modelo, definido en el marco de la TAD, permite anticipar los posibles recorridos que pueden desarrollarse a partir de una pregunta generatriz y su construcción es vital en una enseñanza de este tipo.

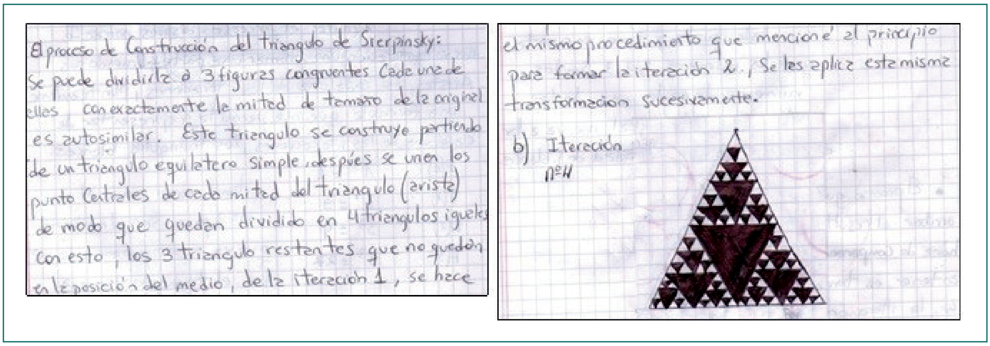


Figura 2. Resolución de E1

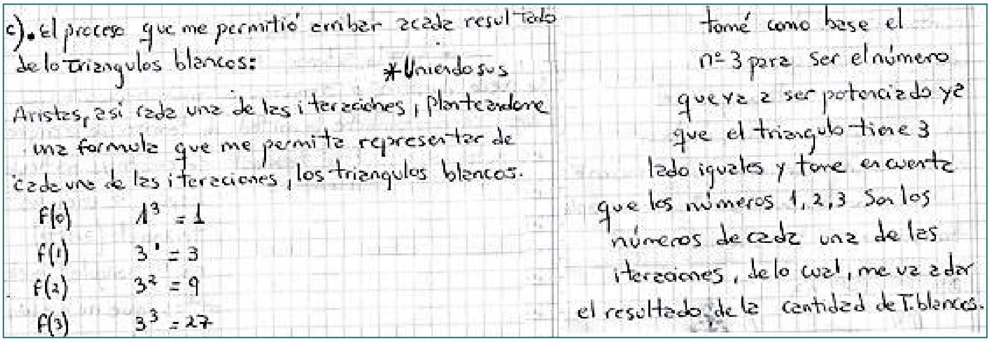
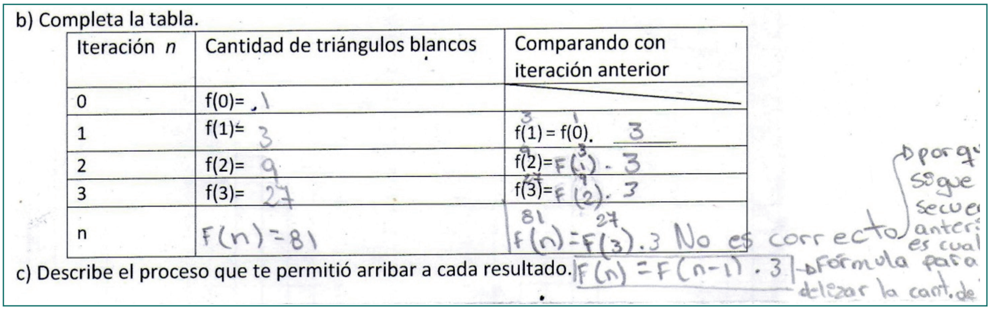


Figura 3. Resolución de E1

La segunda parte de la actividad propone la construcción de una tabla cuyo objetivo es relacionar la cantidad de triángulos blancos que resultan de cada iteración con las funciones iteradas. Se completa observando las iteraciones anteriores hasta generalizar que f(n) es el resultado de multiplicar f(n-1) por tres. Todos los estudiantes resolvieron sin dificultades las primeras cuatro filas, salvo E1, quien no completó correctamente la columna donde se compara con la iteración anterior, a pesar de que explicó detalladamente el proceso de construcción de cada iteración en función de las aristas de los triángulos en blanco y justificó el uso de la base 3 a partir de los lados del mismo (Figura 3).

Los estudiantes realizaron diferentes resoluciones para completar la última fila de la tabla – correspondiente a la iteración *n*, que conduce a la generalización de la expresión de la función iterativa para determinar la cantidad de triángulos blancos que resultan de cada iteración – pero ninguno obtuvo una generalización. En general los estudiantes le asignaron un valor a *n*, el que correspondería a la iteración siguiente, (*n* =4). Por ejemplo, E2 de G1dividió la última fila en 2 columnas como estaba en las filas anteriores, y le asignó a *n* el valor 4, es decir, consideró a *n* como la iteración 4, como se muestra en la Figura 4.

Luego de esta puesta en común se decidió retener una pregunta, que emergió de esa misma puesta en común, para continuar el proceso de estudio:


b) Completa la tabla.

Iteración n	Cantidad de triángulos blancos	Comparando con iteración anterior
0	f(0)= 1	
1	f(1)= 3	f(1) = f(0). 3
2	f(2)= 9	f(2)= F(1) . 3
3	f(3)= 27	f(3)= F(2). 3
n	F(n)=81	F(n)=F(3).3 No es correcto

c) Describe el proceso que te permitió arribar a cada resultado. F(n) = F(n-1) . 3 → fórmula para delezar la cant. de

→ por q. sigue secuen. anteri. es cual

Figura 4. Resolución de E2

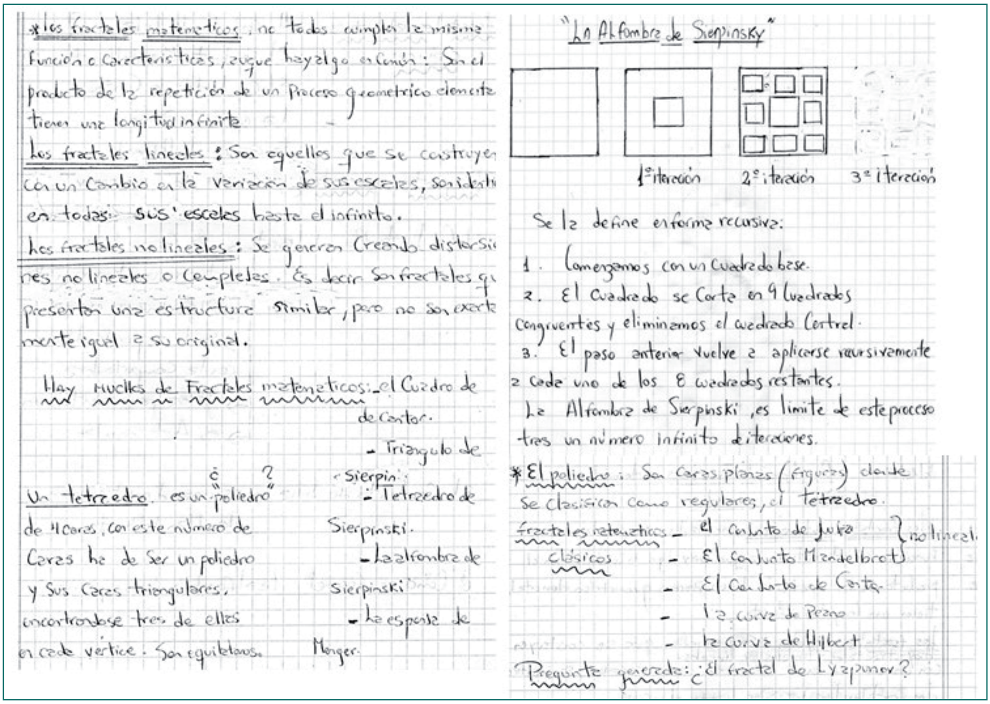
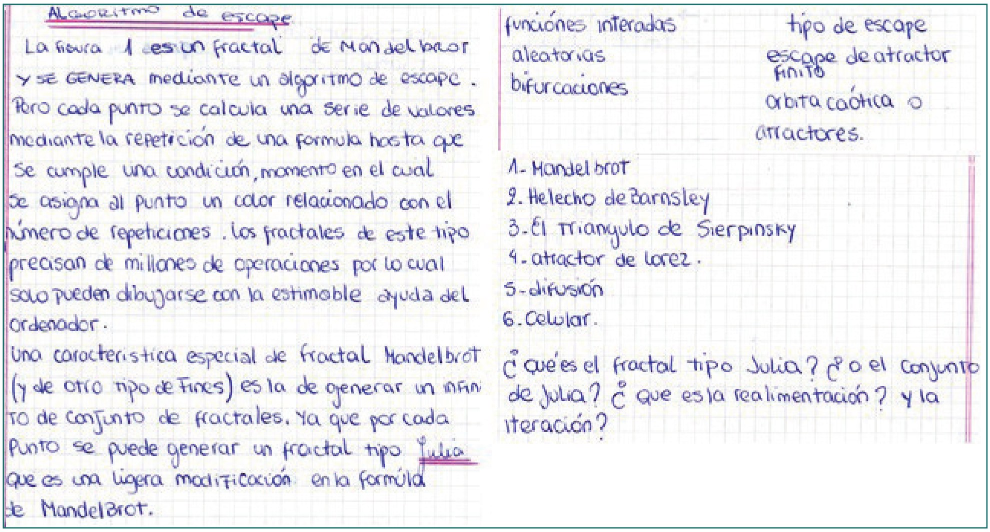


Figura 5. información de G1

- *¿Qué tipo de fractal es el triángulo de Sierpinski?*

Los estudiantes realizaron una búsqueda en Internet concluyendo que se trata de un fractal matemático. En esa búsqueda surgió la cuestión referida a los tipos de fractales que pueden existir. Así, se decidió entonces avanzar el proceso a partir de la pregunta *¿Qué tipo de fractales matemáticos existen?* Los estudiantes buscaron información en Internet y luego de 45 minutos, se realizó una puesta en común. Esta búsqueda se centró en los fractales lineales y no lineales, en su representación, generación y la identificación de algunos ejemplos de cada tipo. G1 describió qué tienen en común los fractales matemáticos, indicando que son el producto de la repetición de un proceso geométrico



Algoritmo de escape

La figura 1 es un fractal de Mandelbrot y se GENERA mediante un algoritmo de escape. Pero cada punto se calcula una serie de valores mediante la repetición de una formula hasta que se cumple una condición, momento en el cual se asigna al punto un color relacionado con el número de repeticiones. los fractales de este tipo precisan de millones de operaciones por lo cual solo pueden dibujarse con la estimable ayuda del ordenador.

Una característica especial de fractal Mandelbrot (y de otro tipo de fines) es la de generar un infinito de conjunto de fractales. ya que por cada punto se puede generar un fractal tipo Julia que es una ligera modificación en la formúla de Mandelbrot.

funciónes interadas
aleatorias
bifurcaciones

tipo de escape
escape de atractor finito
orbita caótica o atractores.

1. Mandelbrot
2. Helecho de Barnsley
3. El triangulo de Sierpinsky
4. atractor de lorez.
5. difusión
6. Celular.

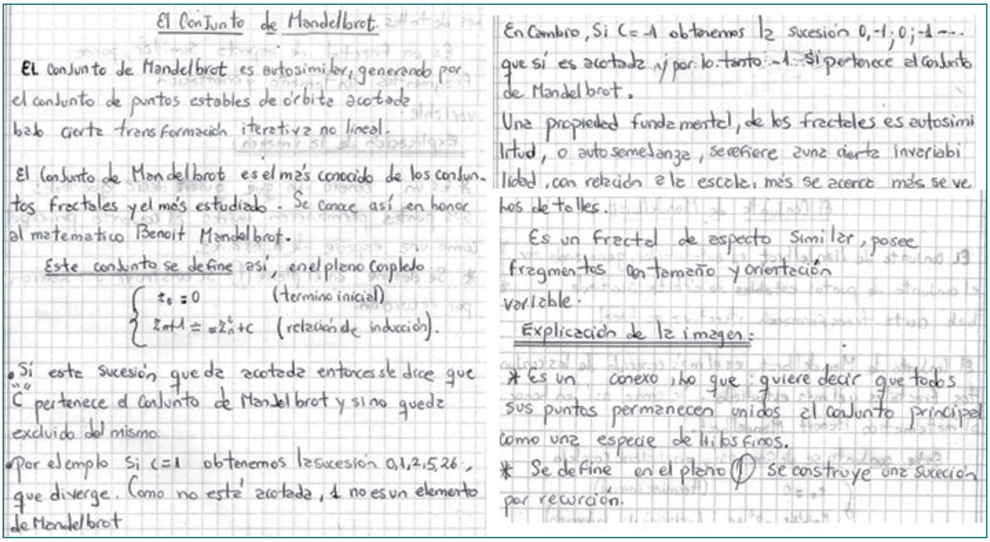
¿qué es el fractal tipo Julia? ¿o el conjunto de Julia? ¿que es la realimentación? y la iteración?

Figura 6. Información de G3

elemental, y realizó una clasificación de fractales, en lineales y no lineales, con una breve explicación sobre la construcción y las características de autosimilitud de los mismos. Además, se nombraron algunos ejemplos de fractales lineales. G1 realizó una representación sobre la construcción de la Alfombra de Sierpinski, explicitó algunas características y realizó nuevos cuestionamientos tales como colocar los signos de interrogación sobre la palabra "poliedro" y explicitar bajo el rótulo de "pregunta generada" *¿el fractal de Lyapunov?* (Figura 5). A continuación, se muestra un fragmento de la información registrada por G1.

G2 también formuló nuevas preguntas, *¿Cuántos fractales temáticos hay?, ¿Qué función cumplen los fractales?, ¿Cómo se puede expresar la línea de Koch? y ¿Qué son las funciones holomorfas?* En forma de ítems, nombró algunos fractales sin desarrollar ninguna característica (triángulo de Sierpinski, fractal de Newton y el Conjunto de Mandelbrot y de Julia) y diferentes dimensiones (Fractal, Topológica, Haudoff-Besicovitch). G3 describió cómo se genera el Conjunto de Mandelbrot a través de algoritmos de escape y su relación con fractales del tipo Julia. Además, enumeró conceptos relacionados con fractales matemáticos, como *funciones iteradas, aleatorias, bifurcaciones, algoritmos de escape, escape de atractor finito, órbita caótica o atractores, Mandelbrot, Helecho de Barnsley, el triángulo de Sierpinski, atractor de Lorez, difusión y celular.* También realizó otras preguntas, *¿Qué es el fractal tipo Julia?*, *¿O el Conjunto de Julia?*, *¿Qué es el fractal?*, *¿Qué es la retroalimentación?*, *¿Y la iteración?* A continuación, se muestra un fragmento de la información de G3(Figura 6)

A partir de esta información de G3 y durante la puesta en común, se formuló la pregunta *¿qué es el conjunto de Mandelbrot?* La profesora propuso formular preguntas a partir de la anterior, obteniendo las siguientes: *¿Qué es el conjunto de Mandelbrot? ¿Qué es una iteración compleja? ¿Qué es el algoritmo de escape?* En esta instancia, la profesora decidió continuar con el Conjunto de Mandelbrot para orientar el proceso de estudio


El Conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot es autosimilar, generando por el conjunto de puntos estables de órbita acotada bajo cierta transformación iterativa no lineal.

El conjunto de Mandelbrot es el más conocido de los conjuntos fractales y el más estudiado. Se conoce así en honor al matemático Benoit Mandelbrot.

Este conjunto se define así, en el plano complejo

$$\begin{cases} z_0 = 0 & \text{(termino inicial)} \\ z_{n+1} = z_n^2 + c & \text{(relación de inducción).} \end{cases}$$

• Si esta sucesión queda acotada entonces se dice que "C" pertenece al conjunto de Mandelbrot y si no queda excluido del mismo.

• Por ejemplo si $c=1$ obtenemos la sucesión 0,1,2,5,26…, que diverge. Como no está acotada, 1 no es un elemento de Mandelbrot

En cambio, si $C=-1$ obtenemos la sucesión 0,-1,0,-1… que sí es acotada y por lo tanto -1 sí pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Una propiedad fundamental, de los fractales es autosimilitud, o autosemejanza, se refiere a una cierta invariabilidad, con relación a la escala, más se acerca más se ve los detalles.

Es un fractal de aspecto similar, posee fragmentos con tamaño y orientación variable.

Explicación de la imagen:

* Es un conexo, lo que quiere decir que todos sus puntos permanecen unidos al conjunto principal como una especie de hilos finos.

* Se define en el plano (C) se construye una sucesión por recursión.

Figura 7. Información de G1

hacia un fractal no lineal, y vincularlo con la autosimilitud, dimensión fractal, área de superficies planas, perímetro de superficies planas, semejanza, ecuaciones exponenciales, y sucesiones. En esta clase predominó la puesta en común de la información obtenida en Internet y la formulación de nuevas preguntas a partir de esa información. Cada grupo registró, no sólo lo obtenido en su propia búsqueda sino también, lo acordado colectivamente. La siguiente clase la profesora retomó la cuestión:

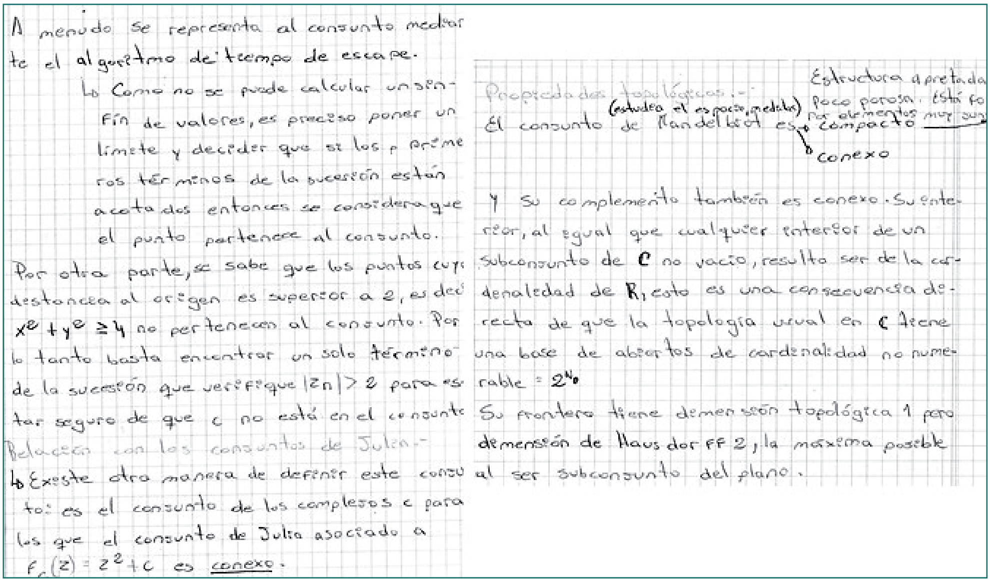
- *¿Qué es el conjunto de Mandelbrot?*

Se propuso buscar información en Internet para responder esta pregunta y luego, se realizó la difusión de las respuestas aportadas por cada uno. La figura 7 muestra un fragmento de esta respuesta.

G2 registró que el conjunto de Mandelbrot es uno de los más conocidos y que contiene a todos los conjuntos Julia (Figura 8). Además, que el conjunto de Mandelbrot es conexo y formularon la pregunta *¿Qué significa ser "conexo"?* G3 describió al conjunto de Mandelbrot de forma muy similar a G1. Un estudiante se refirió a la pregunta *¿cuánto mide la costa de Inglaterra?*, realizada por el matemático Benoit Mandelbrot. G3 comenzó la puesta en común planteando que no entendió la información que encontró y solicitó a la clase si no se podía "construir una definición" (del Conjunto de Mandelbrot) para todos por igual.

Se realizó un registro común de la información más relevante obtenida por cada grupo para dar respuesta a la pregunta *¿Qué es el Conjunto de Mandelbrot?* y se acordó registrar que:

- El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de números complejos para los cuales el método iterativo no tiene fin.
- Es un fractal autosimilar formado por el conjunto de puntos estables cuya órbita es acotada bajo cierta transformación iterativa no lineal.


A menudo se representa al consunto mediante el algoritmo de tiempo de escape.
Como no se puede calcular un infinito de valores, es preciso poner un límite y decidir que si los primeros términos de la sucesión están acotados entonces se considera que el punto pertenece al consunto.
Por otra parte, se sabe que los puntos cuya distancia al origen es superior a 2, es decir $x^2 + y^2 \geq 4$ no pertenecen al consunto. Por lo tanto basta encontrar un solo término de la sucesión que verifique $|z_n| > 2$ para estar seguro de que c no está en el consunto.
Relación con los consuntos de Julia.-
Existe otra manera de definir este consunto: es el consunto de los complejos c para los que el consunto de Julia asociado a $f_c(z) = z^2 + c$ es conexo.

Propiedades topológicas.-
El consunto de Mandelbrot es compacto (estudia el espacio, medida) Estructura apretada poco porosa. Está formado por elementos muy juntos
conexo
y su complemento también es conexo. Su interior, al igual que cualquier interior de un subconsunto de $\mathbb{C}$ no vacío, resulta ser de la cardinalidad de $\mathbb{R}$, esto es una consecuencia directa de que la topología usual en $\mathbb{C}$ tiene una base de abiertos de cardinalidad no numerable $= 2^{\aleph_0}$
Su frontera tiene dimensión topológica 1 pero dimensión de Hausdorff 2, la máxima posible al ser subconsunto del plano.

Figura 8. Información de G1

- El conjunto se define en el plano complejo y se construye una sucesión por recursión: $\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_{n+1} = Z_n^2 + c \end{cases}$

En esta clase predominó no sólo la puesta en común de la información obtenida en Internet y la formulación de nuevas preguntas, sino también la selección de lo que fue considerado relevante por cada grupo para construir la respuesta a la pregunta relativa al Conjunto del Mandelbrot. La búsqueda de respuestas a esta pregunta condujo a la formulación de otras preguntas tales como *¿Qué significa que el conjunto sea "conexo"?* Luego, en las siguientes sesiones se trabajó con el conjunto de Mandelbrot y se lo caracterizó (autosimilar, conexo, compacto). Finalmente se lo definió a través de la sucesión por recursión.

CONSIDERACIONES FINALES

El objetivo de esta experiencia fue introducir, a través de una AEI, una manera diferente de estudiar fractales, alejándose de la forma "tradicional". No se realizó este estudio sólo a través de las imposiciones de ejercicios por parte del profesor, sino a partir de un proceso conformado casi en su totalidad por la formulación de preguntas y de búsqueda de respuestas. Se priorizó avanzar en el proceso a partir de las cuestiones formuladas por los estudiantes, ya sea durante las puestas en común como en los registros de sus producciones. Asumimos que para la pregunta inicial Q_0: *¿Los fractales tienen una fórmula* *matemática*? no se construyó una respuesta propiamente rotulada como tal, pero permitió generar otras preguntas y estudiar e investigar en función de ellas. Esta AEI permitió encontrar a los estudiantes con conceptos que supone el estudio de fractales teóricos, como la autosimilitud, la dimensión, procesos iterativos o su representación.

Esta forma de trabajo fue compleja tanto para la profesora como para los estudiantes. La profesora debió enfrentar sus propias concepciones signada fuertemente por el paradigma tradicional de la enseñanza de la matemática. La experiencia significó aprender a delegar responsabilidades en el proceso de estudio, a dar lugar a los estudiantes, y a generar un clima de confianza donde el estudiante se anime a generar respuestas y a formular preguntas. En esta propuesta los estudiantes también se enfrentaron a sus propias concepciones, construida también a lo largo de su escolaridad, sobre lo que implica el estudio de la matemática y fueron los protagonistas en la implementación de la AEI formulando sus propias preguntas y aportando respuestas, superando la resistencia inicial a este tipo de trabajo.

Los resultados de esta experiencia alientan a seguir en esta línea, es decir, en la del paradigma de la PICM. Se propone volver a implementar esta propuesta con mayor tiempo en el calendario escolar, de manera que se puedan profundizar y articular mejor las organizaciones matemáticas.

REFERENCIAS

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela. Por una revolución epistemológica y didáctica*. CABA: Libros del Zorzal.

Martín, N. (2015). *Diseño e implementación de una Actividad de Estudio e investigación a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal teórico?* Tesis de licenciatura. UNICEN. [en línea] Recuperado el 3 de febrero de 2016, de http://ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/554

Moreno Ferrari, P.C. (2017). Un Sierpinski en la fachada. *Épsilon Revista de Educación Matemática.* 96, 45-60.