

## Partición prismática de paralelepípedos en seis pirámides triangulares equivalentes

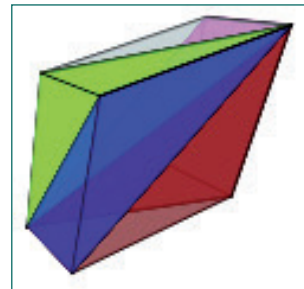
José R. Galo Sánchez

Red Educativa Digital Descartes

[reddescartes.org](http://reddescartes.org) [proyectodescartes.org](http://proyectodescartes.org)

**Resumen:** *En este artículo se analiza en detalle la descomposición de los diferentes tipos de paralelepípedos en pirámides cuadriláteras y en pirámides triangulares. Se obtienen de manera constructiva las particiones con cardinal mínimo y se profundiza en aquellas que, sin tener cardinal mínimo, están formadas por seis pirámides que forman dos prismas. Se cuantifican y detallan todas las particiones posibles y se proporcionan enlaces a recursos interactivos que permiten verlas digitalmente y, a su vez, también obtener los desarrollos planos con los que abordar su reproducción real o tangible y su manipulación. Para cualquier paralelepípedo que defina el interesado se obtiene un entretenido puzle, no siempre fácil de componer.*

**Palabras clave:** *Partición poliedros, paralelepípedo, pirámide.*



## Prismatic dissection of parallelepipeds into six equivalent triangular pyramids

**Abstract:** *In this article we analyze in detail the decomposition of the different types of parallelepipeds in quadrilateral pyramids and triangular pyramids. Partitions with minimal cardinal are obtained in a constructive way and deepened in those that, without having minimum cardinal, are formed by six pyramids that form two prisms. All the possible partitions are quantified and detailed and links to interactive resources are provided that allow them to be viewed digitally and, in turn, also obtain the flat developments with which to address their real or tangible reproduction and manipulation. For any parallelepiped defined by the interested party, an entertaining puzzle is obtained, not always easy to compose.*

**Keywords:** *Polyhedrom dissection, parallepiped, pyramid.*

## INTRODUCCIÓN

En el artículo “Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes” (Galo-Sánchez, 2018) se realiza un análisis constructivo, global y unificador de la descomposición de un cubo o hexaedro regular en pirámides cuadradas y triangulares y, en particular, se incide en las particiones que sin tener cardinal mínimo están formadas por pirámides equivalentes. Era de esperar que la innata inquietud matemática que trata de extender todo lo que se aprende, apareciera y sirviera como catalizador para dar el salto a su generalización al caso de los paralelepípedos, de los que es un caso particular el cubo. Y eso es lo que se realiza en este artículo. Se sigue un esquema y método global para los cuatro tipos de paralelepípedos (cubo, ortoedro, romboedro y romboiedro), pero también se profundiza en las particularidades intrínsecas a cada uno de ellos cuando se introducen situaciones o restricciones que introducen regularidades adicionales, por ejemplo, entre otros casos analizados, un ortoedro con dos caras cuadradas.

En la primera parte se aborda la partición en pirámides cuadriláteras. El procedimiento es común en todos los casos y consiste en la elección de un punto interior o de la frontera del paralelepípedo, que será la cúspide común a todas las pirámides de la partición, y el trazado de segmentos desde dicho punto a los vértices del poliedro, los cuales se configuran como las aristas de las pirámides. La partición mínima está formada por tres pirámides y coincide cuando la cúspide común es un vértice del poliedro. Si la cúspide se ubica en una arista del paralelepípedo se obtienen cuatro pirámides, cinco si se sitúa en una cara y seis si es un punto del interior.

En la segunda parte se efectúa la partición de un paralelepípedo en pirámides triangulares. Ésta puede realizarse partiendo de una partición del mismo en pirámides cuadriláteras con cardinal mínimo (tres) y dividiendo cada una de esas pirámides en dos triangulares, así se obtienen particiones con seis pirámides entre las que distinguiremos particiones prismáticas o no prismáticas según el paralelepípedo original quede dividido en dos prismas triangulares o no. Aquí se realiza, para cada tipo de paralelepípedo, un detallado análisis que cuantifica las diferentes particiones que se pueden obtener y las pirámides que las componen. No obstante, la obtención de la partición de cardinal mínimo, compuesta por cinco pirámides, requiere de un proceso constructivo independiente que también se detalla.

Todo el estudio puede verse digitalmente en escenas interactivas desarrolladas con la herramienta de autor denominada *DescartesJS* (RED Descartes, 2018). Esas escenas también facilitan los desarrollos planos de las pirámides que constituyen la partición, pudiéndose imprimir y consecuentemente permite abordar su reproducción real o tangible y su manipulación. Para cualquier paralelepípedo que defina el interesado se obtiene un entretenido puzle, no siempre fácil de componer.

## 1. PARTICIÓN DE UN PARALELEPÍPEDO EN PIRÁMIDES DE BASE CUADRILÁTERA

Un cubo es un caso particular de paralelepípedo, es decir, de un poliedro convexo que cuenta con ocho vértices, doce aristas y seis caras que son paralelogramos. Por la

similitud de forma y propiedades entre estos poliedros es lógico plantearse la extensión del análisis realizado en la partición del cubo en pirámides cuadradas (Galo Sánchez, 2018) a la partición de dichos hexaedros en pirámides de base cuadrilátera y es lo que se realiza a continuación.

El procedimiento para efectuar la partición en pirámides cuadriláteras es el mismo abordado en el caso del cubo, es decir, elegir un punto del interior o de la frontera del poliedro considerado y desde él trazar segmentos que lo unan con los ocho vértices; y también se reproducen las situaciones observadas en el cubo:

- Si el punto considerado es un vértice la descomposición estará compuesta por tres pirámides cuadriláteras (partición de cardinal mínimo).
- Si el punto pertenece a una arista serán cuatro las pirámides obtenidas.
- Si el punto es del interior de una cara son cinco las pirámides.
- Si el punto es del interior del hexaedro serán seis las pirámides.

Lo que obviamente cambia es la regularidad y la congruencia entre las pirámides obtenidas ya que ésta depende de la regularidad del paralelepípedo inicial considerado. En las imágenes de la figura 1 se muestra un ejemplo de la partición de un romboiedro en tres, cuatro, cinco y seis pirámides cuadriláteras, y en la figura 2 se reflejan los desarrollos respectivos de cada una de estas particiones.

Se dispone de un recurso interactivo<sup>1</sup> que permite definir el paralelepípedo que se desea partir y, seleccionando el punto que actúa como cúspide común, se obtiene la partición correspondiente, su desarrollo tridimensional y el desarrollo plano de cada una de las pirámides que intervienen (ver figura 3). Así pues, se pueden imprimir los desarrollos planos de las pirámides de la partición, construir éstas y con ellas reproducir tangiblemente el paralelepípedo considerado.

---

1. Descomposición de un paralelepípedo en pirámides cuadriláteras: [http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales\\_didacticos/Paralelepipedo3456PiramidesCuadrilateras-JS/index.html](http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Paralelepipedo3456PiramidesCuadrilateras-JS/index.html)

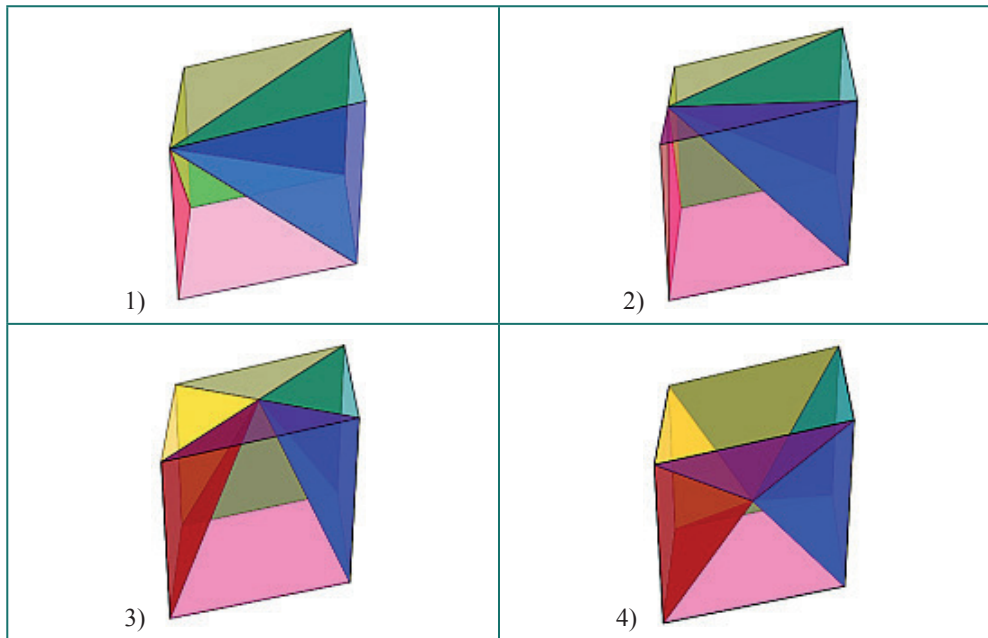


Figura 1. Partición de un paralelepípedo en tres, cuatro, cinco y seis pirámides cuadriláteras, imágenes etiquetadas como 1), 2), 3) y 4) respectivamente.

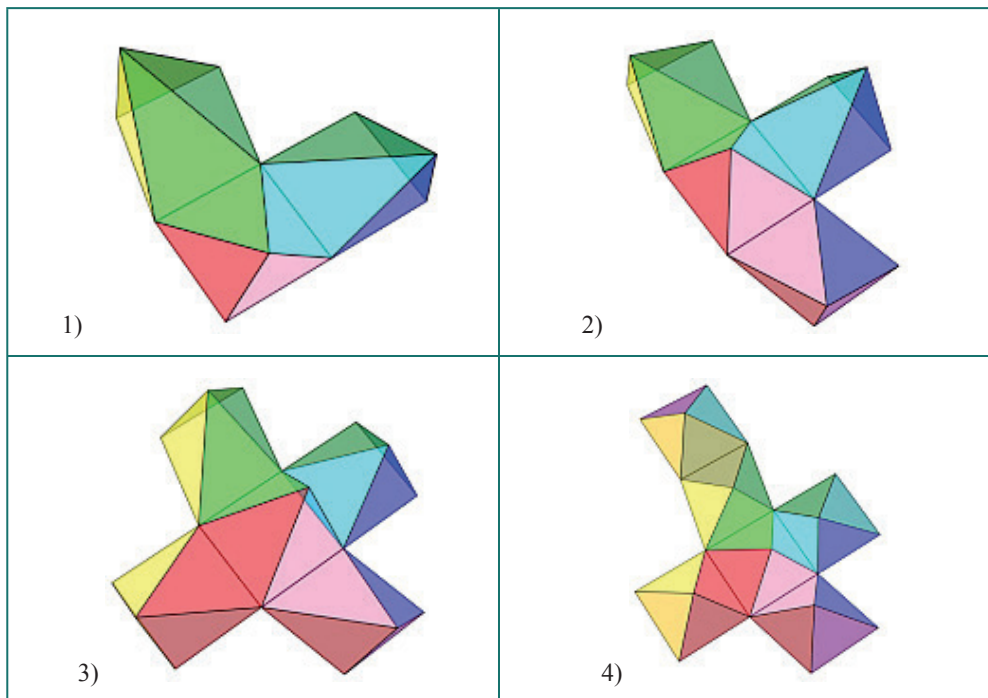


Figura 2. Pirámides cuadriláteras correspondientes a las particiones del romboiedro reflejadas en la Fig. 1, imágenes etiquetadas como 1), 2), 3) y 4) respectivamente.

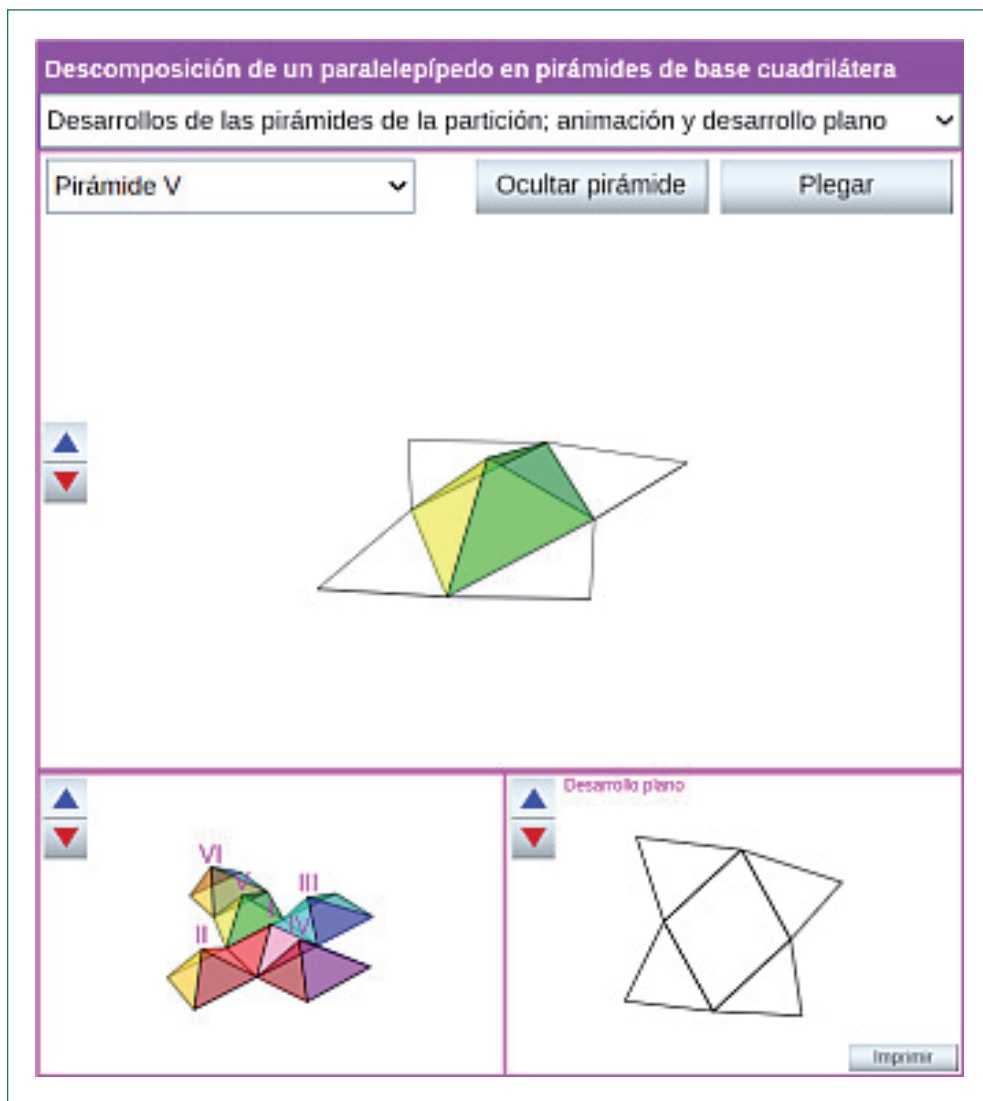


Figura 3. Obtención y/o impresión de los desarrollos planos de una partición.

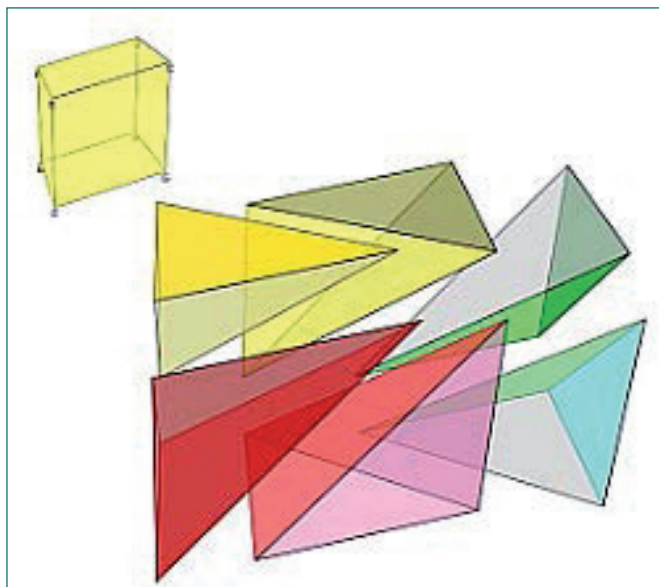


Figura 4. Partición de un paralelepípedo en prismas triangulares por división de pirámides cuadriláteras

## 2. PARTICIÓN DE UN PARALELEPÍPEDO EN PIRÁMIDES DE BASE TRIANGULAR

La partición de un paralelepípedo en pirámides de base triangular puede abordarse desde dos perspectivas o procedimientos:

- Descomposición de cada una de las pirámides cuadriláteras obtenidas en la sección anterior en dos triangulares<sup>2</sup> mediante la elección de una de las dos diagonales de la base cuadrilátera (ver figura 4). Consecuentemente tendremos:
  - Si el punto considerado es un vértice del hexaedro la descomposición estará compuesta por tres pirámides cuadriláteras que conducen a seis triangulares.
  - Si el punto pertenece a una arista serán cuatro las pirámides cuadriláteras obtenidas y ocho las triangulares.
  - Si el punto es del interior de una cara son cinco las pirámides cuadriláteras y diez las triangulares.
  - Si el punto es del interior del hexaedro serán seis las pirámides cuadriláteras y doce las triangulares.

En este caso la partición mínima estará compuesta por seis pirámides triangulares, y acontecen dos situaciones que analizaremos posteriormente y que clasificaremos como particiones prismáticas y particiones no prismáticas.

- Construcción específica, la cual es imprescindible para poder obtener la partición con menor número de elementos que es la compuesta por cinco pirámides triangulares.

2. Descomposición de un paralelepípedo por división de pirámides cuadriláteras: [http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales\\_didacticos/Paralelepipedo3456PiramidesTriangulares-JS/index.html](http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Paralelepipedo3456PiramidesTriangulares-JS/index.html)

## 2.1 Partición con cardinal mínimo de un paralelepípedo en pirámides triangulares

Para obtener la partición en pirámides triangulares con cardinal mínimo ha de tenerse en cuenta: que el menor número de elementos primarios que tienen que intervenir en la partición son los ocho vértices, las doce aristas y seis diagonales de las caras, una por cada una de ellas; y que una pirámide triangular de la partición queda determinada sin más que elegir dos segmentos con distinta dirección y que no sean coplanarios.

En caso de ser un paralelepípedo las diagonales de las caras opuestas o bien son paralelas o bien tienen distinta dirección. Por tanto, pueden darse las siguientes situaciones:

- Que todas las diagonales tengan distinta dirección, de manera que:
  - Si con esas seis diagonales se construye una pirámide triangular, ésta queda ubicada en el interior del paralelepípedo y lo fracciona en cinco pirámides, obteniéndose la partición de cardinal mínimo<sup>3</sup> (ver figura 5). Se verifica que las cuatro pirámides exteriores son equivalentes entre sí y el volumen de cada una de ellas es la sexta parte del volumen total y, por tanto, el volumen de la pirámide interior es la tercera parte del total.
  - Si esas seis diagonales no conforman una pirámide única, entonces se obtienen particiones no prismáticas<sup>4</sup> (ver figura 6).
- Que al menos haya dos diagonales que sean paralelas. En este caso esas dos diagonales determinan un plano que divide al paralelepípedo en dos prismas triangulares, lo cual conduce a particiones prismáticas que analizaremos posteriormente y que contarán como mínimo con seis pirámides triangulares.

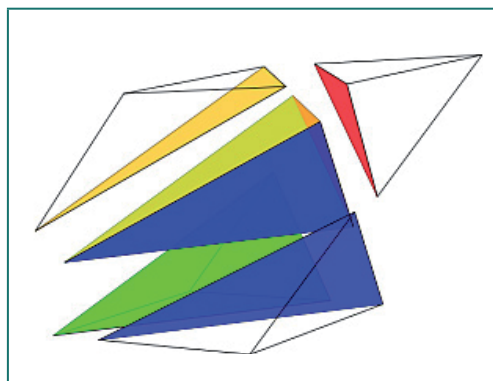


Figura 5. Partición de un paralelepípedo en cinco pirámides triangulares.

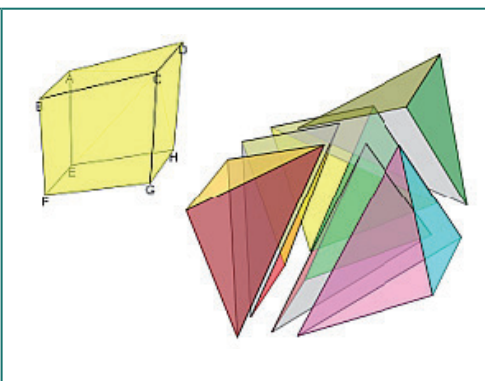


Figura 6. Partición no prismática de un romboedro en seis pirámides triangulares.

3. Descomposición de un paralelepípedo en cinco pirámides triangulares: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/Hexaedro5PiramidesTriangulares-JS/index.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/Hexaedro5PiramidesTriangulares-JS/index.html)

4. Partición no prismática de un romboedro: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/RomboedroNoPrismaticaPiramidesTriangulares-JS/index.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/RomboedroNoPrismaticaPiramidesTriangulares-JS/index.html)

## 2.2 Partición prismática de un paralelepípedo en pirámides triangulares

En el apartado anterior se ha observado que cuando en un paralelepípedo hay al menos dos diagonales de caras opuestas que son coplanarias, entonces puede descomponerse en dos prismas triangulares<sup>5</sup> y, consecuentemente, su partición en pirámides triangulares puede reducirse y realizarse mediante la partición de prismas triangulares en pirámides triangulares. Es lo que hemos denominado partición prismática del paralelepípedo.

En esa división encontramos las siguientes situaciones:

- La partición de un romboedro conduce a dos prismas oblicuos de base un triángulo escaleno.
- En un romboedro los dos prismas oblicuos tienen por base un triángulo isósceles. Distinguimos dos situaciones:
  - En la primera, el corte se efectúa por el plano determinado por dos diagonales menores coplanarias. Este corte determina un rectángulo y, por tanto, las diagonales de esa cara son iguales. Y, adicionalmente, los lados iguales del triángulo isósceles de las bases coinciden en medida con la arista lateral de los prismas. Se obtiene una regularidad que destacamos, pues se transmitirá, según observaremos posteriormente, a la partición en pirámides.
  - En la segunda, el corte se efectúa por el plano determinado por dos diagonales mayores coplanarias, que es un plano de simetría del romboedro, y que determina un romboide en el plano de corte. La arista lateral no coincide con los lados de la base y al ser un romboide sus diagonales son distintas, hay menos regularidad en la partición.
- En un ortoedro son dos prismas rectos de base un triángulo rectángulo escaleno. En el caso particular de que el ortoedro tenga algún par de caras cuadradas, la partición realizada sobre éstas conduciría a prismas rectos con bases triángulos rectángulos isósceles
- En un cubo se obtienen dos prismas rectos de base un triángulo rectángulo isósceles y los catetos tienen igual longitud que la arista lateral.

## 2.3 Partición de un prisma triangular oblicuo en pirámides triangulares

Consideremos inicialmente el caso más genérico, el de un prisma oblicuo de base un triángulo escaleno, y posteriormente iremos concretando los diferentes casos particulares. La partición de un prisma triangular oblicuo en pirámides triangulares con cardinal mínimo se obtiene considerando únicamente como elementos primarios los seis vértices  $\{A, B, C, E, F, G\}$ , las nueve aristas y las diagonales de las caras laterales. Haciendo grupos de cuatro segmentos obtenemos doce pirámides triangulares:  $\{ABCE, ABCF, ABCG, ABEG, ABFG, ACEF, ACFG, ACFG, BCEF, BCEG, BEFG, CEF, G\}$ , las cuales determinan seis particiones distintas del prisma. Estas particiones están compuestas cada

5. Descomposición de un paralelepípedo en dos prismas triangulares: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionParalelepipedo2Prismas.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionParalelepipedo2Prismas.html)



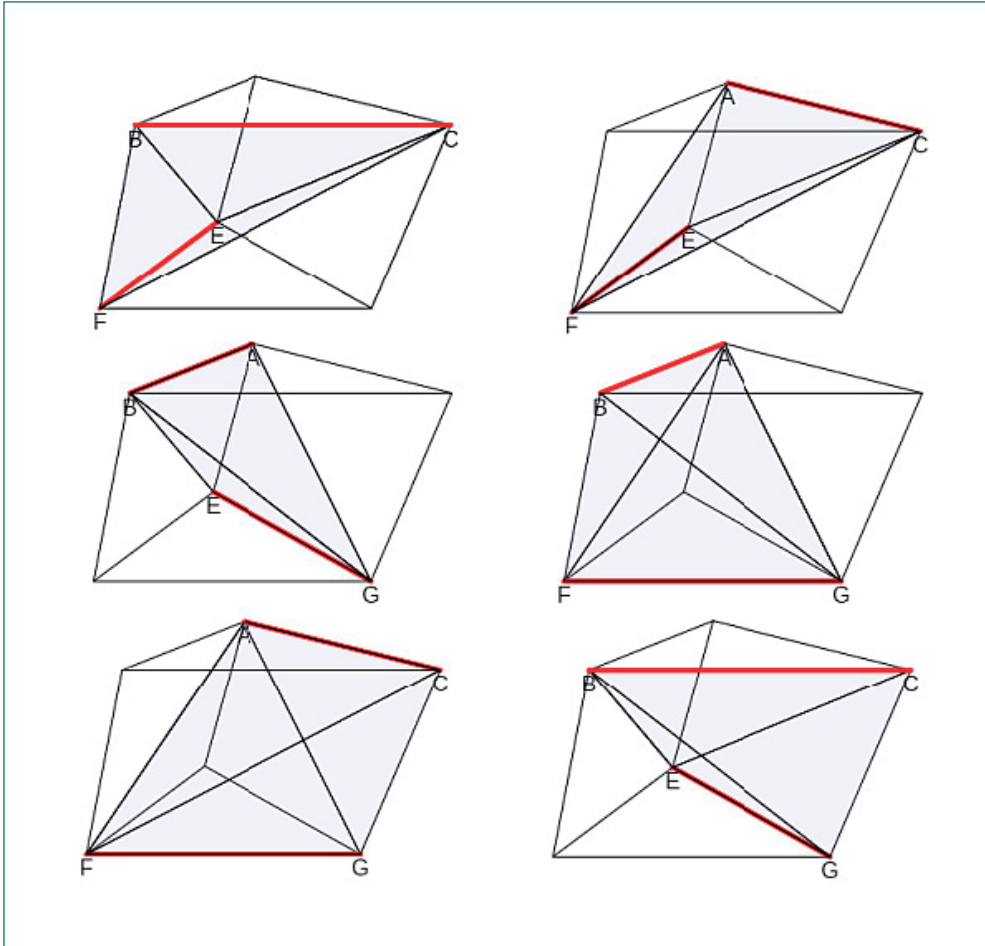


Figura 7. Partición de un prisma triangular oblicuo en pirámides triangulares.

una por tres pirámides triangulares que son equivalentes entre sí, es decir, el volumen de cada una de ellas es la tercera parte del volumen total del prisma. En la figura 7 se reflejan esas seis particiones<sup>6</sup>.

Para poder comparar esas pirámides y esas particiones denotemos:

- La longitud de las aristas como:  $a = d(BC) = d(FG)$ ,  $b = d(AC) = d(EG)$ ,  $c = d(AB) = d(EF)$  y  $l = d(AE) = d(BF) = d(CG)$ .
- La longitud de las diagonales como:  $d_1 = d(BE)$ ,  $d_2 = d(AF)$ ,  $d_3 = d(CF)$ ,  $d_4 = d(BG)$ ,  $d_5 = d(AG)$  y  $d_6 = d(CE)$ .

6. Partición de un prisma triangular oblicuo en pirámides triangulares: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Particion-PrismaOblicuoAux1.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Particion-PrismaOblicuoAux1.html)

### 2.3.1 Partición de un prisma procedente de un romboedro

Si consideramos que el prisma triangular procede de la partición de un romboedro, entonces, en general, las longitudes  $l, a, b, c, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$  son distintas. En base a ello, en la figura 8 se refleja una tabla donde se detalla cada una de las seis particiones posibles, señalando los vértices de las tres pirámides que conforman cada partición e indicando con un uno los segmentos que constituyen sus aristas<sup>7</sup>. Al tener esos diez segmentos diferente longitud, las doce pirámides son diferentes<sup>8</sup>, en la columna “Pirámide tipo” de esa tabla las hemos numerado del 1 al 12. También, al comparar las seis particiones entre sí se observa que no hay ninguna congruencia entre ellas.

### 2.3.2 Partición de un prisma procedente de un romboedro (primer caso)

Cuando un romboedro se parte por el plano determinado por dos diagonales menores, la relación que existe entre los segmentos citados es:  $a = c = l, b = d_1 = d_4, d_2 = d_3$  y  $d_5 = d_6$ . En la tabla de la figura 9 se indica cuántas aristas de igual medida intervienen en cada pirámide<sup>9</sup>.

Comparando las doce pirámides entre sí<sup>10</sup> se observa que sólo hay seis tipos diferentes, si bien pueden aparecer con distinta orientación, es decir, que son congruentes mediante una simetría central o especular (según se desee o necesite). En la tabla, esta congruencia se ha indicado incluyendo un asterisco a continuación del tipo. Por ejemplo ACEF y ACFG son ambas de tipo 4, pero tienen distinta orientación, ACFG es la simétrica de ACEF y viceversa. Las pirámides de tipo 3, 5 y 6 son simétricas y, por tanto,  $3 = 3^*, 5 = 5^*$  y  $6 = 6^*$ .

También, al comparar las particiones entre sí, encontramos que son congruentes dos a dos, pues son simétricas por parejas: la I con la IV, II y V, y III y VI (en la tabla se representan con igual color). Así pues, son tres las formas de dividir un prisma de este tipo, salvo congruencias.

7. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro.html)

8. Una escena interactiva facilita la comparación y permite obtener los desarrollos planos de las pirámides triangulares que conforman la partición de ese prisma procedente de un romboedro: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro.html)

Ha de tenerse presente que a partir de un desarrollo plano, según se pliegue en un sentido u otro, se obtienen dos pirámides con aristas iguales, pero diferente orientación, es decir, el exterior pasa a ser el interior y viceversa. Ambas son congruentes mediante una simetría central. De esto haremos uso en la partición prismática de cada paralelepípedo.

9. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (primer caso): [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro.html)

10. Comparación pirámides de la partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (primer caso) y obtención de los desarrollos planos de las pirámides: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro1.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro1.html)

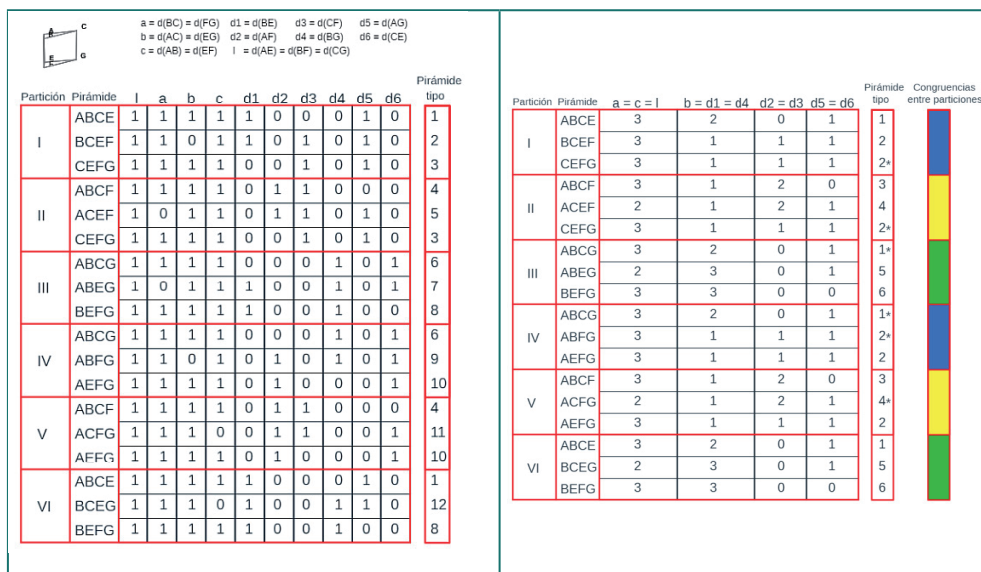


Figura 8. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares.

Figura 9. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (primer caso).

### 2.3.3 Partición de un prisma procedente de un romboedro (segundo caso)

Cuando el romboedro se parte por el plano determinado por dos diagonales mayores, la relación que existe entre los segmentos es:  $b = c = 1$ ,  $a = d2 = d6$ ,  $d1 = d5$  y  $d3$  y  $d4$  difieren de los anteriores y entre sí. Hay distinta regularidad y en la tabla de la figura 10 se muestra la nueva relación<sup>11</sup>. Comparando las doce pirámides entre sí<sup>12</sup>, de nuevo se observa que hay seis tipos diferentes. De ellas la 1 y la 2 son simétricas ( $1 = 1^*$  y  $2 = 2^*$ ); la 3 es asimétrica y aparece en las particiones tanto la 3 como la 3\*; y las 4, 5 y 6 son asimétricas y no aparecen en las particiones las pirámides 4\*, 5\* y 6\*. Estas observaciones anteriores serán de interés cuando abordemos la construcción de las particiones prismáticas del romboedro.

Comparando las particiones encontramos que son cuatro las formas de dividir un prisma de este tipo, salvo congruencias. En este caso I y V son congruentes mediante la composición de un giro alrededor del eje OY y otro alrededor de OZ (según la orientación

11. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (segundo caso): [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro2.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro2.html)

12. Comparación pirámides de la partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (segundo caso) y obtención de los desarrollos planos de las pirámides: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro2.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro2.html)

Partición	Pirámide	$b = c = l$	$a = d_2 = d_6$	$d_1 = d_5$	$d_3$	$d_4$	Pirámide tipo	Congruencias entre particiones
I	ABCE	3	2	1	0	0	1	
	BCEF	2	2	1	1	0	2	
	CEFG	3	2	0	1	0	3	
II	ABCF	3	2	0	1	0	3	
	ACEF	3	2	0	1	0	3*	
	CEFG	3	2	0	1	0	3	
III	ABCG	3	1	1	0	1	4	
	ABEG	3	0	2	0	1	5	
	BEFG	3	1	1	0	1	4	
IV	ABCG	3	1	1	0	1	4	
	ABFG	2	2	1	0	1	6	
	AEFG	3	2	1	0	0	1	
V	ABCF	3	2	0	1	0	3	
	ACFG	2	2	1	1	0	2	
	AEFG	3	2	1	0	0	1	
VI	ABCE	3	2	1	0	0	1	
	BCEG	2	2	1	0	1	6	
	BEFG	3	1	1	0	1	4	

Figura 10. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (segundo caso).

Partición	Pirámide	$l$	$a$	$b$	$c$	$d_1 = d_2$	$d_3 = d_4$	$d_5 = d_6$	Pirámide tipo	Congruencias entre particiones
I	ABCE	1	1	1	1	1	0	1	1	
	BCEF	1	1	0	1	1	1	1	2	
	CEFG	1	1	1	1	0	1	1	3	
II	ABCF	1	1	1	1	1	1	0	4	
	ACEF	1	0	1	1	1	1	1	5	
	CEFG	1	1	1	1	0	1	1	3	
III	ABCG	1	1	1	1	0	1	1	3*	
	ABEG	1	0	1	1	1	1	1	5*	
	BEFG	1	1	1	1	1	1	0	4*	
IV	ABCG	1	1	1	1	0	1	1	3*	
	ABFG	1	1	0	1	1	1	1	2*	
	AEFG	1	1	1	1	1	0	1	1*	
V	ABCF	1	1	1	1	1	1	0	4	
	ACFG	1	1	1	0	1	1	1	6	
	AEFG	1	1	1	1	1	0	1	1*	
VI	ABCE	1	1	1	1	1	0	1	1	
	BCEG	1	1	1	0	1	1	1	6*	
	BEFG	1	1	1	1	1	1	0	4*	

Figura 11. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un ortoedro en pirámides triangulares (primer caso).

inicial con la que se representa el prisma en la escena), e igualmente ocurre con IV y VI. Adicionalmente se da la particularidad que la partición II está formada por pirámides que son sólo de un tipo, es decir, que son congruentes entre sí.

### 2.3.4 Partición de un prisma procedente de un ortoedro (primer caso)

En el caso de que el prisma triangular proceda de un ortoedro cuyas tres dimensiones espaciales sean distintas tenemos que  $a$ ,  $c$  y  $l$  tienen longitudes diferentes; pero  $d_1 = d_2$ ,  $d_3 = d_4$  y  $d_5 = d_6$  porque las caras laterales son rectangulares, y  $b$ , en general, será distinto a cualquier valor anterior. En la tabla de la figura 11 se detallan las relaciones existentes<sup>13</sup>. Comparando las doce pirámides<sup>14</sup> y se puede comprobar que hay seis tipos diferentes, que todas son asimétricas y que en las diferentes particiones aparecen los seis tipos por parejas, es decir, una pirámide y su simétrica. Las doce pirámides son 1, 1\*, 2, 2\*, 3, 3\*, 4, 4\*, 5, 5\*, 6 y 6\*.

Comparando las particiones se obtiene que son tres las formas de dividir un prisma de este tipo, salvo congruencias. I y IV, II y III, V y VI coinciden respectivamente mediante una simetría especular y un giro, o bien de manera equivalente mediante una simetría central.

13. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un ortoedro en pirámides triangulares (primer caso): [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaOrtoedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaOrtoedro.html)

14. Comparación pirámides de la partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un ortoedro en pirámides triangulares (primer caso) y obtención de los desarrollos planos de las pirámides: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaOrtoedro1.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaOrtoedro1.html)



### 2.3.6 Partición de un prisma procedente de un ortoedro (tercer caso)

Si el ortoedro con dos dimensiones iguales lo dividimos a través de las dos caras cuadradas, el prisma obtenido puede partirse en pirámides triangulares<sup>17</sup> de acuerdo a lo reflejado en la tabla de la figura 13. En este caso sólo tenemos cuatro tipos de pirámides diferentes<sup>18</sup>, apareciendo en las dos orientaciones posibles. Las tipo 1, 2 y 4 son asimétricas y la 3 es simétrica ( $3 = 3^*$ ).

Salvo congruencias solamente tenemos dos formas de partir este prisma. La partición I y la IV son congruentes mediante una simetría especular o bien una simetría central. Las cuatro particiones II, III, V y VI son congruentes entre sí: II y III mediante una simetría central; II y V con una simetría especular y II y VI realizando un giro.

### 2.3.7 Partición de un prisma procedente de un cubo

En el caso de que el prisma triangular proceda de un cubo, ortoedro con las tres dimensiones espaciales iguales, obtenemos que el número de tipos de pirámides son tres y el de particiones dos, lo cual ya se detalló en (Galo-Sánchez J.R., 2018) y ahora lo obtenemos como un caso particular de la partición de un ortoedro. En la tabla<sup>19</sup> de la figura 14 mostramos este resultado siguiendo el esquema general planteado en el análisis de todos los casos anteriores.

De los tres tipos de pirámides<sup>20</sup>, el 1 es una pirámide asimétrica y aparecen las dos orientaciones posibles: 1 y 1\*. Las pirámides tipo 2 y 3 son simétricas.

La partición I y la IV son congruentes mediante una simetría especular o bien una simetría central. Las cuatro particiones II, III, V y VI son congruentes entre sí: II y III mediante una simetría central; II y V con una simetría especular y II y VI realizando un giro. Así pues, salvo congruencias, solamente tenemos dos formas de partir este prisma, por ejemplo, las particiones I y II. Y, en particular, la I está formada por pirámides que también son congruentes entre sí.

17. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un ortoedro en pirámides triangulares (tercer caso): [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaOrtoedro3.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaOrtoedro3.html)

18. Comparación pirámides de la partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un ortoedro en pirámides triangulares (tercer caso) y obtención de los desarrollos planos de las pirámides: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaOrtoedro3.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaOrtoedro3.html)

19. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un cubo en pirámides triangulares: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaCubo.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaCubo.html)

20. Comparación pirámides de la partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un cubo en pirámides triangulares y obtención de los desarrollos planos de las pirámides: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaCubo.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaCubo.html)

Figura 14. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un cubo en pirámides triangulares.

Partición	Pirámide	l	a = c	b	d1 = d2 = d3 = d4	d5 = d6	Pirámide tipo	Congruencias entre particiones
I	ABCE	1	2	1	1	1	1	
	BCEF	1	2	0	2	1	2	
	CEFG	1	2	1	1	1	1	
II	ABCF	1	2	1	2	0	3	
	ACEF	1	1	1	2	1	4	
	CEFG	1	2	1	1	1	1	
III	ABCG	1	2	1	1	1	1*	
	ABEG	1	1	1	2	1	4*	
	BEFG	1	2	1	2	0	3	
IV	ABCG	1	2	1	1	1	1*	
	ABFG	1	2	0	2	1	2*	
	AEFG	1	2	1	1	1	1*	
V	ABCF	1	2	1	2	0	3	
	ACFG	1	1	1	2	1	4*	
	AEFG	1	2	1	1	1	1*	
VI	ABCE	1	2	1	1	1	1	
	BCEG	1	1	1	2	1	4	
	BEFG	1	2	1	2	0	3	

## 2.4 Partición prismática de los paralelepípedos

Conocidas las diferentes particiones de cada uno de los prismas que se obtienen al dividir un paralelepípedo estamos en condiciones de poder analizar cuáles son las diferentes particiones prismáticas de los paralelepípedos. En este caso, y siguiendo el orden inverso al considerado en la sección anterior 2.3, partiremos del caso más regular —el ortoedro—, y avanzaremos hacia el más irregular —el romboiedro—. Seguiremos un mismo esquema para todos los casos y dado que el cubo ya fue analizado y descrito en (Galo-Sánchez J.R., 2018) se omite aquí.




### 2.4.1. Partición prismática de un ortoedro (tercer caso)

Un ortoedro con dos dimensiones diferentes puede partirse en dos prismas dividiéndolo por las dos caras cuadradas opuestas. Salvo congruencias hay una única forma de hacerlo. Esos dos prismas tienen simetría especular respecto al plano de corte y simetría central respecto al punto de intersección de las diagonales del ortoedro.

Según lo analizado en el apartado 2.3.6, cada uno de esos prismas puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I, II, III, IV, V y VI).

I	1	II	3	III	1*	IV	1*	V	3	VI	1
	2		4		4*		2*		4*		4
	1		1		3		1*		1*		3

Aplicando un giro, una simetría especular y una simetría central se obtienen las siguientes congruencias entre las seis particiones:

	I	II	III	IV	V	VI
	I	VI	V	IV	III	II
	IV	V	VI	I	II	III
	IV	III	II	I	VI	V

La situación es similar, casi idéntica, al caso del cubo. Así pues, salvo transformaciones isométricas, hay sólo dos particiones diferentes (en las tablas anteriores se han reflejado usando el mismo color para las particiones congruentes). Basta considerar, por ejemplo, la I y la II.

La construcción del ortoedro se aborda considerando dos de las particiones del prisma anterior y yuxtaponiéndolas. Son 36 las posibilidades, resultado de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I, II, III, IV, V, VI\}$ . Pero, por las congruencias indicadas, basta considerar las posibles combinaciones de  $\{I, II\}$  con  $\{I, II, III, IV, V, VI\}$ , obteniéndose las siguientes posibilidades:

I-I	I-II	I-III	I-IV	I-V	I-VI
	II-II	II-III	II-IV	II-V	II-VI

Pero entre ellas es necesario buscar posibles congruencias y detectamos que aplicando un giro alrededor de Oy, I-V se transforma en I-III; con un giro alrededor de Oy, I-VI se transforma en I-II y con una simetría central, II-IV se transforma en I-III. Por ello, las posibilidades de partir un ortoedro, que cumpla las condiciones especificadas, en seis pirámides triangulares equivalentes son sólo ocho:



I-I	I-II	I-III	I-IV		
	II-II	II-III		II-V	II-VI

En la figura 15 se reflejan esas ocho particiones y los desarrollos planos de las seis pirámides de una de esas particiones. El recurso interactivo enlazado en la nota al pie<sup>21</sup> pueden observarse estas ocho particiones del ortoedro y obtenerse las que son congruentes con ellas. También pueden imprimirse los desarrollos planos de cada partición y reproducirse un modelo tangible de las mismas.

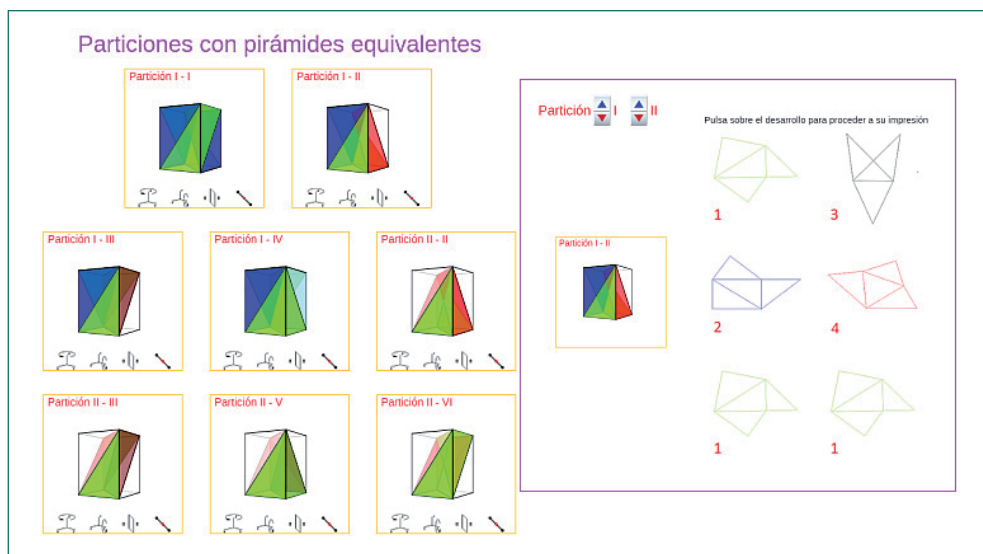


Figura 15. Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso tercero) y desarrollos planos de la partición.

#### 2.4.2 Partición prismática de un ortoedro (segundo caso)

Un ortoedro con dos dimensiones diferentes puede partirse en dos prismas si lo dividimos por dos caras rectangulares opuestas. Salvo congruencias hay una única forma de hacerlo. Esos dos prismas tienen simetría central respecto al punto de intersección de las diagonales del ortoedro.


Según lo analizado en el apartado 2.3.5, cada uno de esos prismas puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I, II, III, IV, V y VI).

<sup>21</sup> Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso tercero) y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro3/particionesOrtoedro3.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro3/particionesOrtoedro3.html)

I	1	II	3	III	2*	IV	2*	V	3	VI	1
	1*		4		4		1		5		5*
	2		2		3*		1*		1*		3*

A su vez, cada partición está compuesta por tres pirámides y en ellas aparecen cinco tipos que identificamos como 1, 2, 3, 4 y 5.

Aplicando una simetría central se obtienen las siguientes congruencias entre las seis particiones:

	I	II	III	IV	V	VI
	IV	III	II	I	VI	V

La construcción del ortoedro se aborda considerando dos de las particiones del prisma anterior y yuxtaponiéndolas. Son 36 las posibilidades, resultado de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I, II, III, IV, V, VI\}$ , pero analizando las congruencias son doce las posibilidades<sup>22</sup> (ver figura 16):

I-I	I-II	I-III	I-IV	I-V	I-VI
	II-II	II-III		II-V	II-VI
				V-V	V-VI

### 2.4.3 Partición prismática de un ortoedro (primer caso)

Un ortoedro con sus tres dimensiones diferentes puede partirse en dos prismas usando el plano determinado por dos diagonales paralelas de dos caras rectangulares opuestas. Salvo congruencias, hay tres formas de hacerlo ya que encontramos que hay tres diagonales de longitudes distintas y cada una de éstas conduce a prismas diferentes. Esos dos prismas tienen simetría central respecto al punto de intersección de las diagonales del

22. Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso segundo) y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro2/particionesOrtoedro2.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro2/particionesOrtoedro2.html)

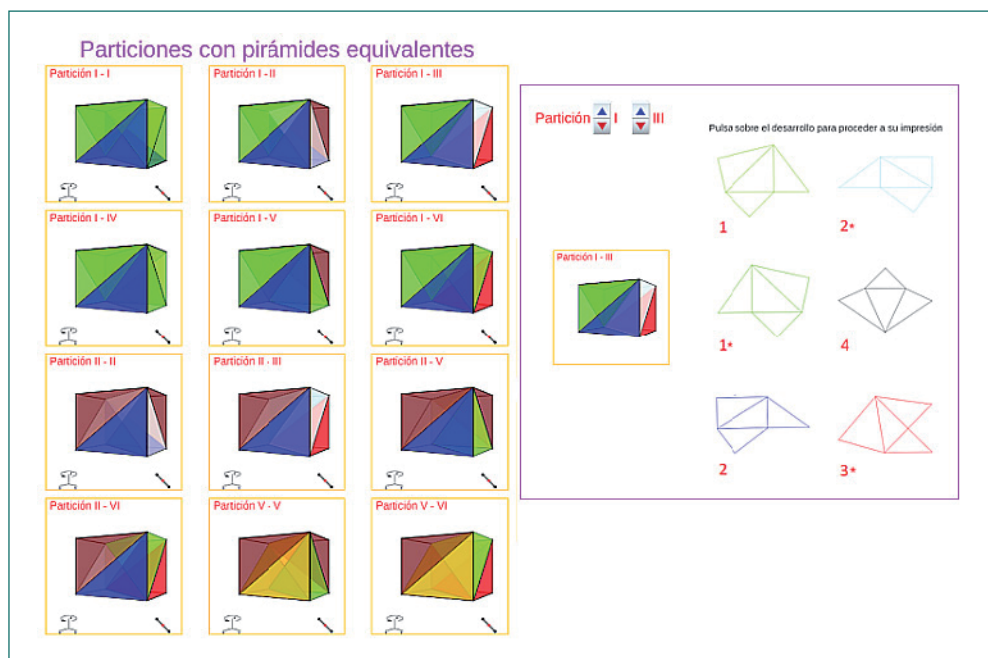


Figura 16. Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso segundo) y desarrollos planos de la partición.


ortoedro. De las tres posibilidades indicadas mostraremos a continuación una de ellas. Las otras dos son análogas.

Según lo analizado en el apartado 2.3.4, cada uno de esos prismas puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I, II, III, IV, V y VI).

I	1	II	4	III	3*	IV	3*	V	4	VI	1
	2		5		5*		2*		6		6*
	3		3		4*		1*		1*		4*

A su vez, cada partición está compuesta por tres pirámides y en ellas aparecen seis tipos que identificamos como 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Aplicando una simetría central se obtienen las siguientes congruencias entre las seis particiones:

	I	II	III	IV	V	VI
	IV	III	II	I	VI	V

La construcción del ortoedro se aborda considerando dos de las particiones del prisma anterior y yuxtaponiéndolas. Son 36 las posibilidades, resultado de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I, II, III, IV, V, VI\}$ , pero analizando las congruencias son doce las posibilidades<sup>23</sup> (ver figura 17):

I-I	I-II	I-III	I-IV	I-V	I-VI
	II-II	II-III		II-V	II-VI
				V-V	V-VI

#### 2.4.4 Partición prismática de un romboedro (segundo caso)

Un romboedro puede partirse en dos prismas usando el plano determinado por dos diagonales mayores que sean paralelas. Salvo congruencias, hay una única forma de hacerlo. Esos dos prismas tienen simetría central respecto al punto de intersección de las diagonales del romboedro y también tienen simetría especular respecto al plano de corte. Analizaremos a continuación la partición de ambos prismas.

- a) Según lo analizado en el apartado 2.3.3, uno de esos prismas puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I, II, III, IV, V y VI), donde se indican las particiones congruentes con el mismo color.

I	1	II	3	III	4	IV	4	V	3	VI	1
	2		3*		5		6		2		6
	3		3		4		1		1		4

23. Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso primero) y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro1/particionesOrtoedro1.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro1/particionesOrtoedro1.html)



Figura 17. Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso primero) y desarrollos planos de la partición.

b) De manera análoga, el otro prisma puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I', II', III', IV', V' y VI').

	1		3*		4*		4*		3*		1
I'	2	II'	3	III'	5*	IV'	6*	V'	2	VI'	6*
	3*		3*		4*		1		1		4*

La construcción del ortoedro se aborda considerando una de las particiones del primer prisma analizado y otra del segundo, yuxtaponiéndolas. Son 36 las posibilidades resultado de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I', II', III', IV', V', VI'\}$ . Pero por las congruencias indicadas basta considerar las resultantes de  $\{I, II, III, IV\} \times \{I', II', III', IV', V', VI'\}$ , que a su vez quedan reducidas a diez<sup>24</sup> (ver figura 18):

24. Particiones del romboedro en pirámides triangulares (caso segundo) y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboedro2/particionesRomboedro2.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboedro2/particionesRomboedro2.html)

I-I'	I-II'	I-III'	I-IV'
	II-II'	II-III'	II-IV'
		III-III'	III-IV'
			IV-IV'

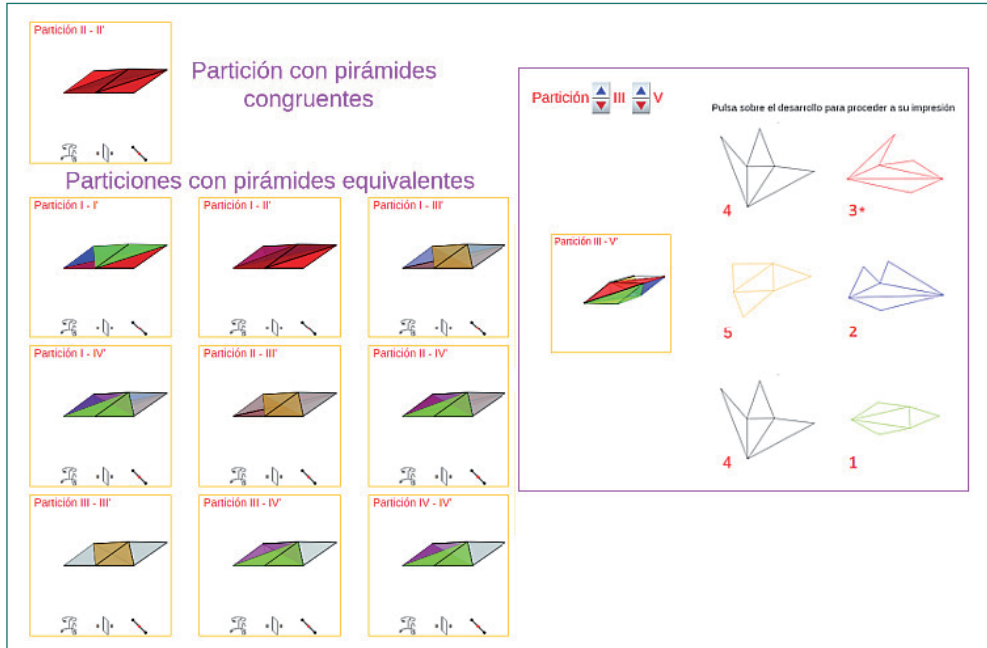


Figura 18. Particiones del romboedro en pirámides triangulares (caso segundo) y desarrollos planos de la partición.

### 2.4.5 Partición prismática de un romboedro (primer caso)

Un romboedro puede partirse en dos prismas usando el plano determinado por dos diagonales menores que sean paralelas. Salvo congruencias, hay una única forma de hacerlo. Esos dos prismas tienen simetría central respecto al punto de intersección de las diagonales del romboedro. Analizaremos a continuación la partición de ambos prismas.

- a) Según lo analizado en el apartado 2.3.2, uno de esos prismas puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I, II, III, IV, V y VI), donde se indican las particiones congruentes con el mismo color.

I	1	II	3	III	1*	IV	1*	V	3	VI	1
	2		4		5		2*		4*		5
	2*		2*		6		2		2		6

b) De manera análoga, el otro prisma puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I', II', III', IV', V' y VI').

I'	2	II'	2	III'	6	IV'	2*	V'	2*	VI'	6
	2*		4*		5		2		4		5
	1*		3		1		1		3		1*

La construcción del ortoedro se aborda considerando una de las particiones del primer prisma analizado y otra del segundo, yuxtaponiéndolas. Son 36 las posibilidades resultado de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I', II', III', IV', V', VI'\}$ . Pero por las congruencias indicadas basta considerar las resultantes de  $\{I, II, III\} \times \{I', II', III', IV', V', VI'\}$ , que a su vez quedan reducidas a doce<sup>25</sup> (ver figura 19):

I-I'	I-II'	I-III'	I-IV'	I-V'	I-VI'
	II-II'	II-III'		II-V'	II-VI'
		III-III'			III-VI'

25. Particiones del romboedro en pirámides triangulares (caso primero) y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboedro1/particionesRomboedro1.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboedro1/particionesRomboedro1.html)

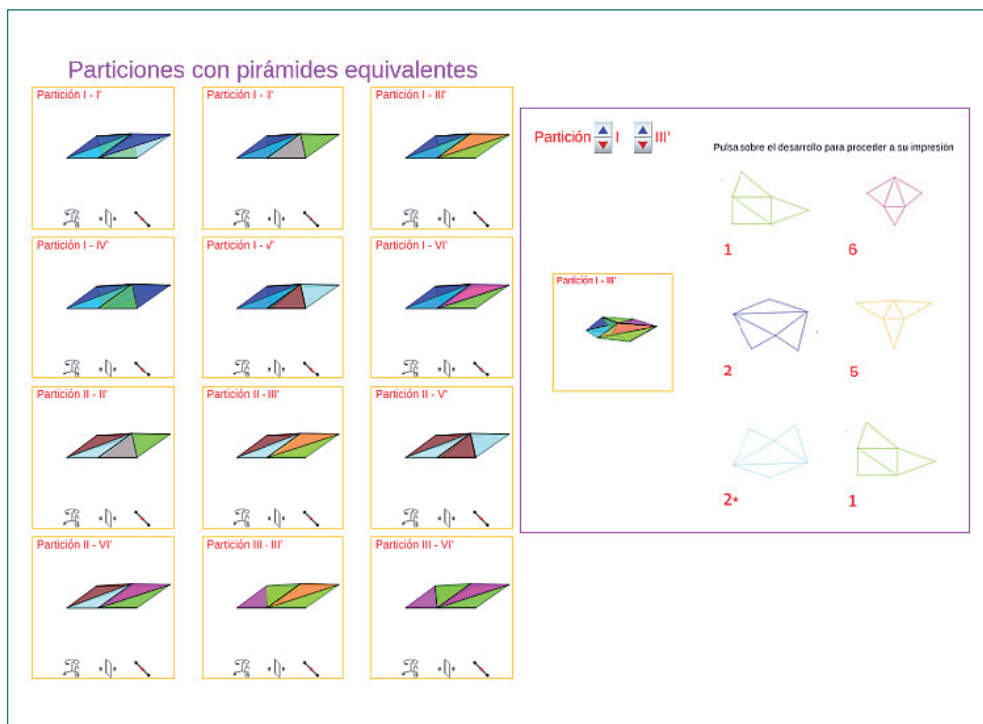


Figura 19. Particiones del romboedro en pirámides triangulares (caso primero) y desarrollos planos.

### 2.4.6 Partición prismática de un romboedro

Según lo analizado en el apartado 2.3.1 un prisma procedente de un romboedro puede descomponerse en seis particiones en las que intervienen doce pirámides triangulares diferentes y asimétricas. No existe ninguna congruencia entre estas particiones.

	1		4		6		6		4		1
I	2	II	5	III	7	IV	9	V	11	VI	12
	3		3		8		10		10		8

A partir de ese prisma, la construcción del romboedro sólo es posible mediante la aplicación de una simetría central. Este prisma simétrico podrá descomponerse a su vez en seis particiones que son simétricas de las anteriores y que estarán compuestas por las



respectivas pirámides simétricas<sup>26</sup> (de nuevo denotamos por 1\* la pirámide simétrica de la I, y análogamente el resto).

	3*		3*		8*		10*		10*		8*
I'	2*	II'	5*	III'	7*	IV'	9*	V'	11*	VI'	12*
	1*		4*		6*		6*		4*		1*

La yuxtaposición de esos dos prismas da lugar al romboiedro. Y consecuentemente las posibles particiones<sup>27</sup> del mismo son 36, resultantes de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I', II', III', IV', V', VI'\}$ .

Pero para realizar una cuantificación de todas las particiones prismáticas de un romboiedro hemos de tener en consideración que hay seis formas posibles de partirlo en dos prismas. Para cada pareja de caras opuestas hay dos posibilidades correspondientes a las dos diagonales, luego tres parejas por dos diagonales conducen a esas seis formas. Así pues, en el caso más general, son seis posibles particiones prismáticas del romboiedro y para cada una de ellas treinta y seis particiones diferentes en pirámides triangulares, por tanto, un total de 216 particiones. En ellas intervienen  $24 \times 6 = 144$  pirámides (72 pirámides y sus simétricas).

## 2.5. Escena interactiva general para la partición prismática de un paralelepípedo

Para dar la posibilidad de que cualquiera pueda seleccionar un tipo de paralelepípedo, aportar las dimensiones que desee al mismo, elegir la partición prismática que quiera y que pueda reproducirla en un modelo tangible, se aporta una escena interactiva<sup>28</sup> (ver figura 20) la cual cuenta con un menú con las siguientes opciones:

- Selecciona el paralelepípedo ABCDEFGH:
  - Cubo. La partición en dos prismas es única y la longitud de la arista no es significativa, por tanto, no es necesario introducir ningún dato adicional.
  - Ortoedro. Con dos controles numéricos Bx y Dy puede definirse cualquier ortoedro. La partición en dos prismas se efectúa siempre considerando el plano determinado por la diagonal AC y su paralela EG, por tanto, para

26. Pirámides en la partición de un romboiedro: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboiedro/desarrolloPiramidesRomboiedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboiedro/desarrolloPiramidesRomboiedro.html)

27. Particiones del romboiedro en pirámides triangulares y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboiedro/desarrolloParticionesRomboiedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboiedro/desarrolloParticionesRomboiedro.html)

28. Escena interactiva genérica para la partición prismática de un paralelepípedo: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasCasoGeneral/index.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasCasoGeneral/index.html)

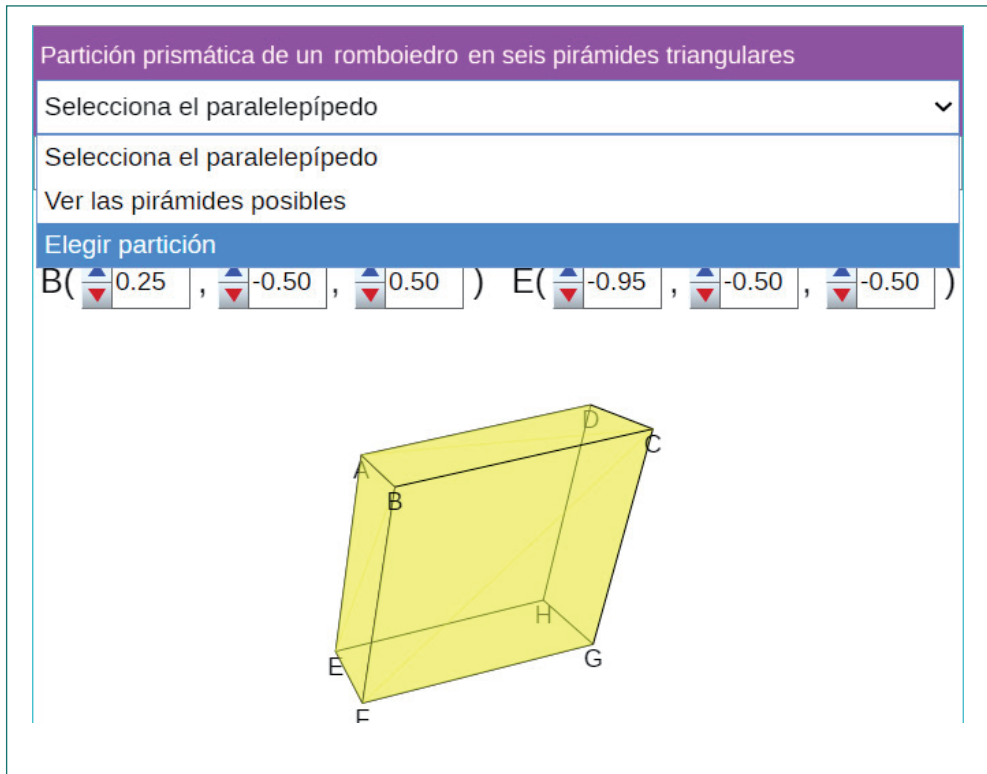


Figura 20. Menú en la escena interactiva genérica para la partición prismática de un paralelepípedo.

- obtener cada uno de los tres casos analizados anteriormente es necesario definir adecuadamente dichos controles.
- Romboedro cortando por la diagonal menor. Puede cambiarse el ángulo que define al romboedro y el corte en dos prismas se realiza por el plano ACGE determinado por dos diagonales menores paralelas.
  - Romboedro cortando por la diagonal mayor. Puede cambiarse el ángulo y en este caso el corte por el plano ACGE se corresponde con dos diagonales mayores paralelas.
  - Romboedro. Pueden cambiarse las coordenadas de los vértices A, B, D y E y el corte se efectúa, de nuevo, siempre por el plano ACGE.
  - Ver las pirámides posibles. Opción mediante la que se muestran los desarrollos planos de las diferentes pirámides que pueden aparecer en las particiones. Aquí, en una rápida visión, puede interpretarse que algún desarrollo no coincide con los observados en los casos particulares analizados, pero una atenta observación conducirá a que no es más que un desarrollo equivalente.
  - Elegir partición. Puede seleccionarse una de las 36 particiones posibles, ver las pirámides que intervienen en ella e imprimir su desarrollo.

## CONCLUSIONES

En este artículo se ha abordado la partición de un paralelepípedo en pirámides de caras cuadriláteras y pirámides triangulares estudio que generaliza otro anterior realizado por el autor y que estaba restringido al caso particular del cubo.

La partición en pirámides de base cuadrilátera presenta un esquema único basado en la consideración de un punto que se ubique bien en la frontera o bien en el interior del poliedro que vamos a partir, y considerando éste como cúspide común de las pirámides que conforman la partición se obtiene la partición mínima, formada por tres pirámides, cuando la cúspide coincide con un vértice del hexaedro. Si el punto seleccionado se ubica en una arista, en una cara o en el interior se generan sendas particiones formadas por cuatro, cinco y seis pirámides respectivamente.

La partición en pirámides de base triangular se aborda desde dos perspectivas: una basada en la división en dos de cada una de las pirámides cuadriláteras obtenidas en las particiones anteriores y otra mediante una construcción específica. La primera conduce a un mínimo de seis pirámides y la segunda permite obtener la partición mínima constituida por cinco pirámides. En el caso de seis pirámides las particiones se clasifican en prismáticas y no prismáticas.

Para cada tipo de paralelepípedo, según la regularidad intrínseca a cada uno, se han abordado las diferentes formas de partirlo en prismas y en cada caso se han analizado cuántas particiones diferentes, salvo congruencias, pueden obtenerse y los diferentes tipos de pirámides que las componen. En todos los casos se aportan escenas interactivas que permiten definir las dimensiones del paralelepípedo deseado y observar digitalmente las particiones, así como la posibilidad de imprimir los desarrollos planos de las pirámides.

En definitiva un estudio exhaustivo que comprende una amplia casuística y que surgió a raíz de la adaptación a *DescartesJS* de una escena<sup>29</sup> en la que se observaba una partición prismática de un cubo (Núñez Castaín, 2017) y en cada uno de los prismas, en los que quedaba dividido, aparecían diferentes tipos de pirámides equivalentes entre sí. Al abordar el análisis de la situación se comprobó que las referencias a las particiones de un cubo en pirámides quedaban planteadas de manera deslavazada o inconexa, mostrando sólo aquellos casos particulares en los que se encuentra mayor regularidad, pero no desde un punto de vista global e integrador. Eso fue el objetivo primario de estudio realizado en un artículo anterior (Galo-Sánchez, 2018) y el objetivo secundario su generalización a los paralelepípedos que es lo que aquí ha quedado realizado. La extensión a hexaedros convexos de caras cuadriláteras  $\{4,4,4,4,4,4\}$ , como poliedro no regular que puede considerarse similar al cubo, también ha sido realizada por el autor e implica algunas particularidades adicionales interesantes que serán objeto de una publicación ulterior.

<sup>29</sup>. Una descomposición del cubo [http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales\\_didacticos/cubo-JS/index.htm](http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/cubo-JS/index.htm)

## REFERENCIAS

- Galo Sánchez, J. (2018). Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(2), 1-20. Recuperado el 18/10/2018, de <http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/12>.
- Nuñez Castaín, A. (2018). Una descomposición del cubo. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes"*, Vol. III, Núm. 1. Recuperado el 18/10/2018, de <http://proyectodescartes.org/descartescms/descargas>.
- RED Descartes (2018). Recursos interactivos. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes"*, Vol. III, Núm. 1. Recuperado el 18/10/2018, de <http://proyectodescartes.org/descartescms/descargas>.