Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2018, nº 100, 89-97**

Introducción del Teorema de Pitágoras y del Teorema del Coseno mediante el uso de balanzas

David Gutiérrez-Rubio
Universidad de Córdoba

Carmen León-Mantero
Universidad de Córdoba

María José Madrid-Martín
Universidad Pontificia de Salamanca

María Teresa Sánchez-Compaña
Universidad de Málaga

Resumen: *Se presenta una propuesta de clase para la enseñanza del Teorema de Pitágoras en su versión general a través de materiales manipulativos y el uso de una balanza para comparar áreas de figuras planas. También se realiza una representación previa del Teorema del Coseno, sin el uso de razones trigonométricas, a través de una balanza de brazos graduados.*
Palabras clave: *Teorema de Pitágoras, Teorema del Coseno, balanza, Educación Secundaria, Geometría*

Introduction of the Pythagorean Theorem and the Cosine Theorem by using scales

Abstract: *We present a class proposal for the teaching of the Pythagorean theorem in its general version with manipulative materials and the use of a scale to compare areas of flat figures. A previous representation of the Cosine Theorem is also performed, without the use of trigonometric reasons, using a scale with graded arms.*
Keywords: *Pythagorean theorem, Cosine Theorem, scale, Secundary Education, Geometry*

INTRODUCCIÓN

El Teorema de Pitágoras es uno de los resultados de geometría plana más conocidos y más demostrados, con alrededor de 400 demostraciones conocidas (Maor, 2007). Aunque existen muchas formas de representarlo, la más utilizada es la forma algebraica $a^2 + b^2 = c^2$.

El Real Decreto 1105/2014 de contenidos de Educación Secundaria Obligatoria establece, dentro de los contenidos mínimos en 1º de Educación Secundaria Obligatoria dentro del territorio español, la enseñanza del Teorema de Pitágoras, con su justificación geométrica. Asimismo, dentro de los contenidos del bloque transversal "Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas" se incluye el "Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos".

Como señala Galo-Sánchez (2018), en muchas ocasiones un problema clásico casi siempre se expone de manera parcial a través de ejemplos particulares que no detallan la totalidad de las posibilidades de demostración o de visualización desde perspectivas diferentes. Sin embargo, entre el profesorado es un tema recurrente en cuanto a propuestas de enseñanza tanto a nivel de congresos como de revistas dirigidas a los docentes tanto de primaria como de secundaria (Troyano y Flores, 2016; Gutiérrez-Rubio, 2017).

En esta propuesta mostramos el uso de un recurso didáctico como es el de la balanza para la introducción geométrica del Teorema de Pitágoras. El uso de las balanza como forma de representación de igualdades se ha planteado por varios autores como recurso didáctico para la enseñanza de ecuaciones (Rojano, 2010) o para el cálculo de proporciones de compuestos (Altés & Real, 1995), entre muchos otros. Como afirman otros autores el uso de materiales didácticos en la clase de matemáticas crea un ambiente favorable no sólo para la comprensión de los conceptos sino también para inculcar en los alumnos actitudes positivas y de empatía hacia las matemáticas (Maz-Machado y Jiménez-Fanjul, 2012).

CONCEPTOS PREVIOS

Esta propuesta se plantea para alumnos de 1ºESO, donde se plantea por primera vez dicho Teorema. Lo introduciremos como un caso particular de un resultado más general que establece que el ángulo que forman los lados a, b es agudo (resp. obtuso) si $a^2 + b^2 > c^2$, (resp $<$). El caso intermedio donde se da la igualdad es el caso intermedio entre agudo y obtuso que corresponde a un ángulo recto.

El material que utilizaremos consistirá en una balanza que utilizaremos para comparar pesos. En principio no es necesario ningún tipo de balanza especial, aunque para la última actividad será necesario una balanza de brazos graduados, similar a la representada en la Figura 1:

Recortaremos cuadrados de varios tamaños de colores rojo (que formarán los lados a,b) y azul (que formarán el lado c), que pueden ser de madera o de un cartón lo bastante grueso para que su peso sea significativo. Para obtener una casuística suficiente hemos elegidos cuadrados de lados (en centímetros) 6, 9, 9,12 en color rojo y 10, 11.65, 12.72,

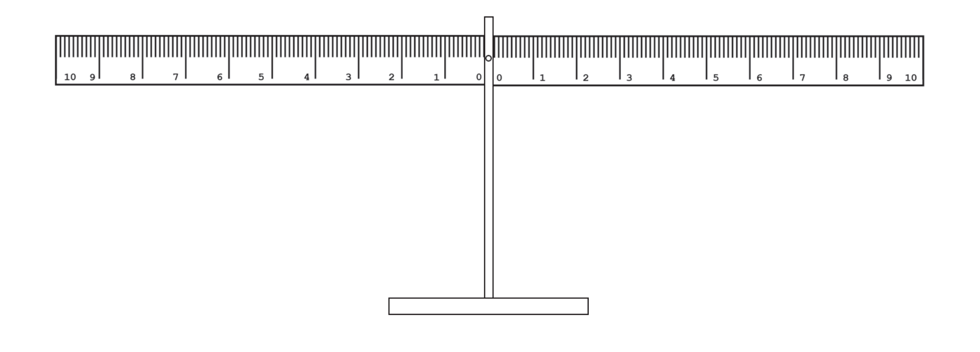

Figura 1. Balanza con brazos graduados

14, 15, 16, 20 en color azul. Cada rectángulo estará atravesado por un cordel de masa despreciable, para poder colgarlo del brazo de la balanza a la distancia que se quiera. También haremos uso de dos rectángulos de dimensiones 9x12 como introducción al Teorema del Coseno.

Utilizaremos un papel en blanco donde tenemos impreso un transportador de ángulos, a modo de tapete para realizar las construcciones de los diferentes triángulos en la actividad.

DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

Las actividades se desarrollarán en una única sesión que pasamos a describir a continuación:

Primera sesión:

Explicaremos a los alumnos que usando los lados de 3 cuadrados vamos a construir un triángulo. Para ello elegiremos dos cuadrados, colocando ambos con un vértice común en el centro del transportador de ángulos y uno de ellos alineado con el 0, como se muestra en la Figura 2.

Posteriormente se cogerá un tercer cuadrado y se formará un triángulo, procurando que los cuadrados colocados con anterioridad sigan teniendo su vértice común en el centro del transportador, como se ve en la Figura 3.

Preguntaremos qué ángulo forman los dos cuadrados rojos, no solo la medición sino que haremos énfasis en si es agudo, recto u obtuso. A continuación pediremos a los alumnos que comparen los pesos de los dos cuadrados rojos con los del cuadrado azul, colgándolos de la balanza a igual distancia del centro ¿cuál pesa más? Si efectúan la pesada correctamente y el ángulo resultante era agudo, los dos cuadrados rojos pesarán más que el azul, mientras que si el ángulo es obtuso los cuadrados rojos pesarán menos que el azul.

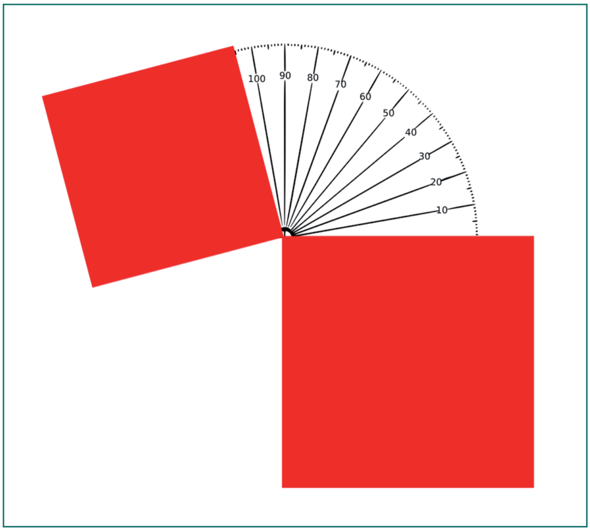

Figura 2.
Colocación de los dos primeros rectángulos.

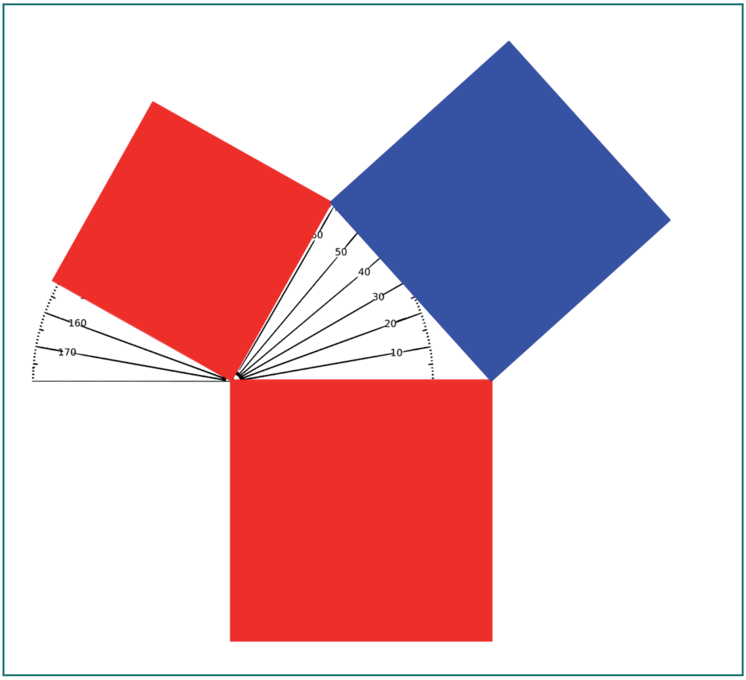

Figura 3:
Formación del triángulo

Repetiremos este experimento varias veces (evitaremos el caso del ángulo recto por ahora), rellenando la tabla de la página siguiente.

Pediremos ahora que formen el triángulo con los rojos de longitudes 6 cm y 9 cm y el azul de longitud 10cm y deberán responder, sin realizar la pesada, qué creen que pesará más, si las dos piezas rojas juntas o la azul. Llegados a este punto deberían de haber descubierto que los ángulos obtusos corresponden a piezas azules "muy grandes" que son

Lados de los rojos	**Lado del azul**	**Ángulo que forman los rojos (aprox)**	**¿Pesan más los rojos o el azul?**
9 y 12	11	61º	LOS ROJOS
9 y 12	14	82º	LOS ROJOS
9 y 12	16	98º	EL AZUL
9 y 12	20	145º	EL AZUL
6 y 9	11.65	100º	EL AZUL

más pesadas que las rojas, mientras que los agudos corresponden al caso contrario. Planteamos entonces el caso intermedio ¿y qué ocurre cuando la pieza azul pesa exactamente lo mismo que las dos piezas rojas juntas? Es decir, si la pieza azul ni es más pesada ni menos pesada que las dos rojas juntas, el ángulo que forman ni será obtuso ni será agudo. Por exclusión, deberían deducir que el ángulo que forman ha de ser recto.

Llegados a este punto, estamos en condiciones de cambiar de la representación geométrica a la algebraica, pero antes tomaremos un paso intermedio, utilizando la representación numérica. Centrándonos en un trio de figuras que equilibren la balanza (por ejemplo, los cuadrados de lados 9 cm, 12 cm y 15 cm), pediremos que, utilizando una regla, calculen sus áreas, obteniendo 81 cm^2, 144 cm^2 y 225 cm^2 respectivamente. Preguntamos si, dado que la balanza estaba equilibrada con esas piezas, la suma de las áreas de los cuadrados rojos ha de ser igual a la del cuadrado azul. Si la clase no tiene dudas al respecto, escribimos dicha igualdad en la pizarra:

$$81 + 144 = 225$$

Para hallar una ley general que nos sirva, aclaramos, debemos aclarar de dónde proceden estos números. 81 era el área de uno de los cuadrados rojos, que hemos calculado haciendo $9 \times 9 = 9^2$. De igual modo con los otros números:

$$9^2 + 12^2 = 15^2$$

Observamos que son los lados del triángulo rectángulo para poder hacer la relación. Entonces, dibujando un triángulo rectángulo de lados a, b y c, podemos generalizar el resultado anterior al Teorema de Pitágoras en su forma más conocida:

$$a^2 + b^2 < \mathrm{c}^2 \text{ (resp. } a^2 + b^2 > \mathrm{c}^2\text{)}$$

Tenemos que hacer notar que el ángulo recto ha de ser el que forman los lados de los dos cuadrados rojos. Dichos lados rojos los denominamos catetos y el lado azul hipotenusa.

Podemos preguntar cómo quedaría la ecuación si el ángulo que forman los lados rojos fuera obtuso (resp. agudo):

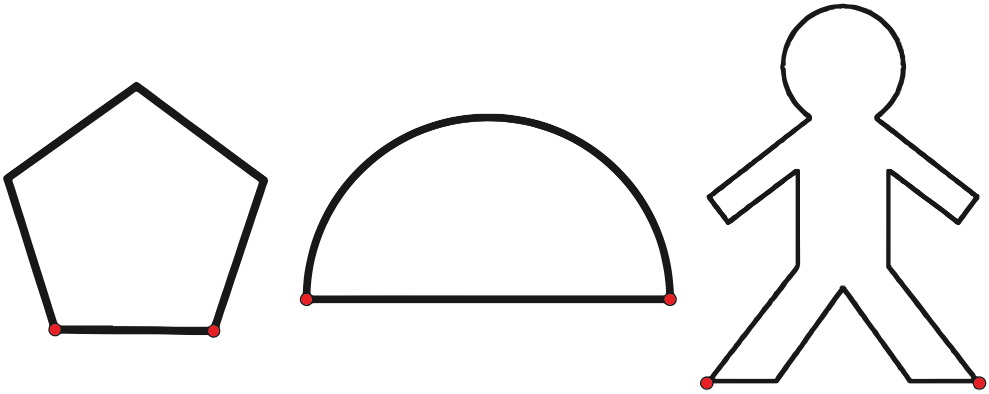

Figura 4: Figuras alternativas al cuadrado (Fuente: Elaboración propia).

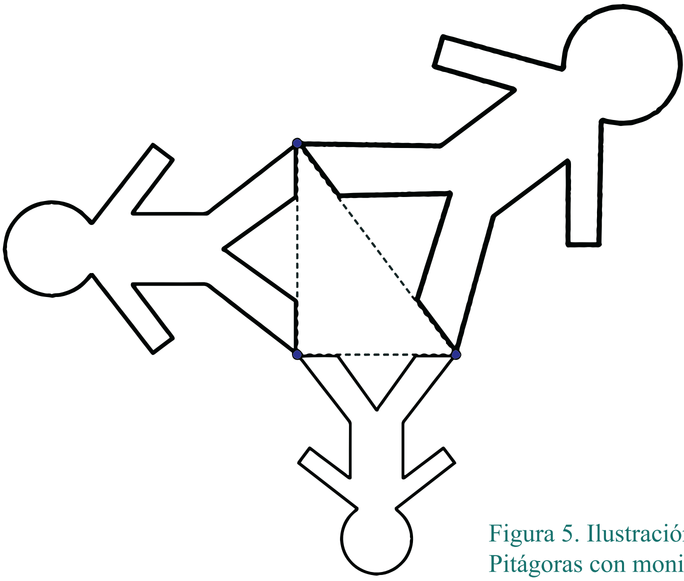

Figura 5. Ilustración del Teorema de Pitágoras con monigotes.

Podemos generalizar este resultado con figuras que no sean cuadradas, como pentágonos o cualquier contorno que tenga una base recta bien delimitada para hacer las veces de lado del triángulo. En la figura 4 se muestran algunos ejemplos:

En rojo se han marcado los puntos de referencia para crear los lados de los triángulos. Puede ser sorprendente para los alumnos comprobar que la balanza se equilibra con formas cualesquiera sin más que comprobar que se puede construir un triángulo rectángulo con sus bases (figura 5).

Para enriquecer más el uso de la balanza en la sesión, se puede terminar introduciendo un avance de el Teorema del Coseno, sin necesidad de introducir razones trigonométricas propiamente dichas, de la siguiente manera: Partimos de la siguiente construcción de los cuadrados de tamaños 6 y 9 (marcados en rojo) (figura 6):

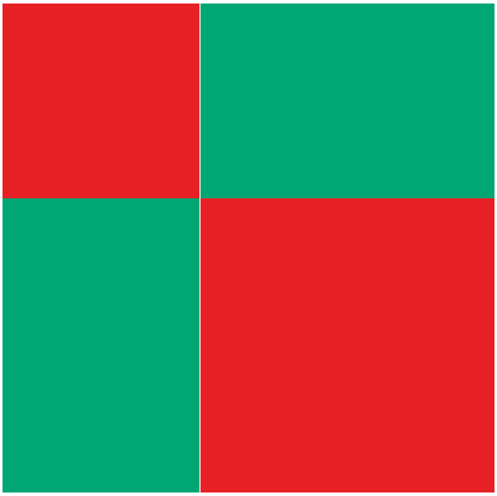

Figura 6. Cuadrados de lados 6 y 9 con rectángulos 6x9.

En verde 6 × 9 están representados los dos rectángulos necesarios para completar el cuadrado. A continuación, pediremos a la clase que realicen un triángulo con los lados rojos 6 y 9 y un lado azul cualquiera, por ejemplo 14. En este caso, el ángulo que forman los lados rojos es de 137º aproximadamente. A estas alturas ya es obvio para la clase que la pieza azul pesará más que las dos rojas juntas, lo que comprobamos con la balanza. Ahora retamos a un alumno a que cuelgue los dos rectángulos verdes juntos en algún lugar de la balanza de forma que esta quede equilibrada, pero que solo dispone de un intento, como se muestra de manera esquemática en la figura 7.

Después de pensar y colocar las piezas, lo más probable es que no consiga su objetivo. Decimos entonces que nosotros, con un simple cálculo a partir del ángulo que forman las piezas rojas, podemos colocar las piezas verdes de manera exacta para que quede la balanza equilibrada. Para ello, solo tenemos que calcular el coseno del ángulo que formaron las piezas rojas al construir el triángulo (en este caso cos(137º) = –0,73). Si nuestra balanza está graduada de 0 a 10 (como en la Figura 7), y hemos colgado las piezas rojas y azul a 10 unidades del centro, colocaremos las piezas verdes a una distancia de –7,3 unidades (en este caso el valor negativo indica que las colgamos del brazo de las piezas rojas), consiguiendo que la balanza esté equilibrada, como se muestra en la Figura 8.

Podemos repetir esta acción varias veces para convencerles de que no es pura suerte, sino que la matemática nos permite saber de antemano muchas cosas sin necesidad de probar por el método de ensayo y error. Por último les diremos que hemos utilizado una función que existe en las calculadoras científicas como las que ellos tienen llamada coseno, que se calcula a partir del ángulo que forman las piezas rojas al construir el triángulo con la azul, y que verán en cursos posteriores.

CONCLUSIONES

Hemos presentado una propuesta que va en línea con el planteamiento de Iglesias (2017) respecto a que la geometría hay que verla, construirla, tocarla y manipularla. El uso de balanzas y de la correspondencia área-peso a igual densidad/grosor como en el caso de planchas de madera o de cartón, nos permite utilizar un modelo físico para el trabajo con áreas, permitiendo su comparación con materiales manipulativos, y permitiendo al alumnado una introducción intuitiva al Teorema de Pitágoras siguiendo el orden deseable de menos abstracto a más abstracto. Por su parte, el estudio de los casos de ángulo obtuso y

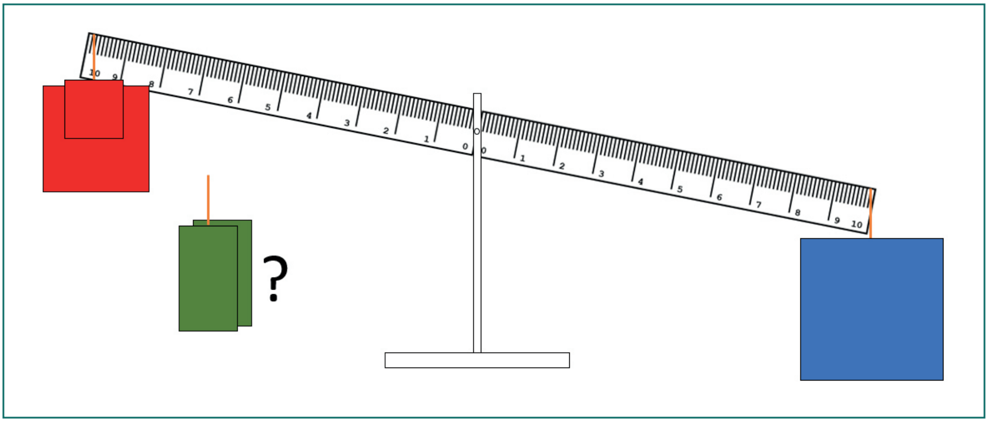

Figura 7. Teorema del Coseno representado como un problema de balanza.

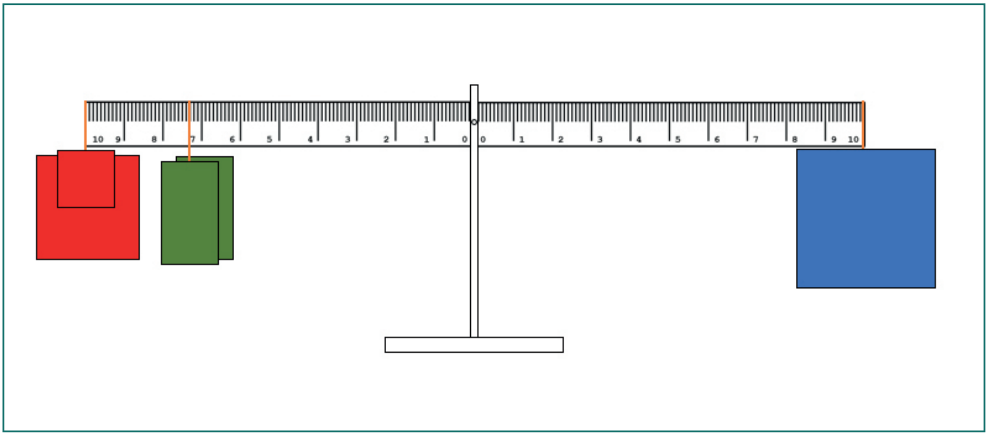

Figura 8: Solución con la balanza del Teorema del Coseno.

agudo permite el uso del pensamiento deductivo para concluir el Teorema de Pitágoras como un caso frontera entre ambos.

REFERENCIAS

Altés, A. S., & Real, J. S. (1995). Aplicación didáctica de la balanza” pesaoro” de Arquímedes. *Enseñanza de Las Ciencias*, *13*(1), 107–112.

Galo-Sánchez, J.R. (2018). Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1*(2), 1-20.

Gutiérrez-Rubio, D. (2017). Uso de representaciones verbales en la enseñanza del Teorema de Thales. *Épsilon, Revista de Educación Matemática,* 97, 75-80.

Troyano, J. y Flores, P. (2016). Percepción de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras. *Épsilon, Revista de Educación Matemática,* 33(3), 51-60.

Iglesias, L. M. (2017). Demostraciones del Teorema de Pitágoras con goma EVA. STEEAM en el aula de matemáticas. *Épsilon, Revista de Educación Matemática,* 97, 57-64,

Maor, E. (2007). *The Pythagorean theorem: a 4,000-year history*. New Jersey: Princeton University Press.

Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en educación primaria. *Épsilon. Revista de Educación Matemática,* 81, 105-112.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado,* 3 de enero de 2015, núm. 3, p. 179, p. 193, pp. 395-398.

Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números. Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *75*, 5–20.