Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2018, nº 99, 7-28*

La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo: Actividad Provocadora de Modelos

Verónica Vargas-Alejo
Universidad de Guadalajara
veronica.vargas@academicos.udg.mx
Aarón V. Reyes-Rodríguez
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
rrav76@yahoo.com.mx
César Cristóbal-Escalante
Universidad de Quintana Roo
cescrist@uqroo.edu.mx

Resumen: *En este artículo se describen los resultados de la implementación de una actividad provocadora de modelos [APM1] relacionada con el problema de la deforestación en el estado de Michoacán, México. La actividad es una de tres APM que se diseñaron como parte de una investigación de corte cualitativo. Las tareas se implementaron con un grupo de ocho docentes de nivel medio superior. El marco teórico se estructuró en torno a una perspectiva de Modelos y Modelación. Los resultados indican que la APM1 contribuyó al surgimiento, modificación, ampliación y refinamiento de formas de pensar de los profesores relacionadas con modelos lineales y exponenciales.*
Palabras clave: *Actividad Provocadora de Modelos, Modelos y Modelación, Docentes, Función lineal, Función exponencial*

Deforestation as a consequence of the increase in cultivation areas: Model Eliciting Activity

Abstract: *In this article we describe the results of the implementation of a model-eliciting activity, related to deforestation problem in the state of Michoacán, Mexico. This task is one of three model-eliciting activities designed into a qualitative research project.*

Participants were a group of eight teachers of upper secondary level. The theoretical framework was based on Richard Lesh' Models and Modeling perspective. We provide evidence that the task supported the emergence, modification, extension and refinement of teachers' ways of thinking about linear and exponential models.
Keywords: *Model Eliciting Activity, Models and Modeling, Teachers, Linear Function, Exponential Function*

1. INTRODUCCIÓN

Existen diversos estudios que han analizado el desarrollo de comprensión de los estudiantes respecto del concepto función, fundamentados en el uso de la modelación en el aula (Lesh y Doerr, 2003; NCTM, 2000; Yanagimoto y Yoshimura, 2013). En algunos de ellos, se señala que muchos estudiantes tienen dificultades para comprender el concepto; para establecer relaciones entre éste y otras ideas matemáticas, tales como variación, ecuación o modelo (Ärlebäck, Doerr y O'Neil, 2013); para comprender y utilizar la notación algebraica, y conectarla con otras representaciones como la gráfica o la tabular (Duval, 1996).

La construcción de modelos que nos permitan entender, explicar, comunicar, y pronosticar el comportamiento de fenómenos o situaciones no es una tarea sencilla. En los individuos existe una tendencia a generalizar a partir de poca información, la cual no siempre es pertinente al tomar decisiones. Sin conocimiento conceptual suficiente, y habilidades matemáticas básicas, las personas pueden tener dificultades para entender las ventajas y desventajas de adquirir cierto crédito o las consecuencias de la administración errónea de dosis de medicamento. Esto nos lleva a preguntarnos ¿Qué formación matemática mínima debe poseer cualquier individuo para enfrentar los retos de la vida diaria? ¿Cómo promover esta formación matemática en la escuela?

Pensar matemáticamente va más allá de hacer cálculos, "con frecuencia implica describir situaciones matemáticamente" (Lesh y Doerr, 2003: 15). Esta descripción requiere de análisis cualitativos y cuantitativos de la información, atribuir dimensiones al espacio y ubicar eventos en marcos de referencia. Conceptos matemáticos como función y variación son clave en la formación de los individuos (NCTM, 2000). Comprender el concepto de función implica que los estudiantes relacionen e integren distintas representaciones (Lesh, 2010), además, que identifiquen lo variable y lo invariante en una situación (Kaput, 1999). Al resolver un problema, los estudiantes deben entender que cada representación (tablas, gráficas, metáforas basadas en la experiencia, diagramas o dibujos, modelos concretos, lenguaje hablado, símbolos escritos, ecuaciones) proporciona información diferenciada, la cual permite visualizar una situación o problemática desde diversas perspectivas e incrementar el nivel de comprensión sobre ésta y conceptos subyacentes.

¿Cómo se aprende un concepto? Un concepto no se aprende en forma aislada de otros conceptos, fenómenos y procesos relacionados que le dan sentido y significado. De acuerdo con la perspectiva de Modelos y Modelación propuesta por Doerr y Lesh (2003), las Actividades Provocadoras de Modelos [*Model Eliciting Activities*] posibilitan la construcción e integración de conocimiento y habilidades matemáticas. ¿Qué tipo de actividades son éstas?, ¿qué características poseen?, ¿cómo se construyen? Nos referiremos en adelante a esta Perspectiva de Modelos y Modelación como *PMM*. Estamos conscientes de que hay varias perspectivas de modelos y modelación (Kaiser y Sriraman, 2006) pero, por cuestiones de espacio, en este documento no se hace una revisión y diferenciación de las aportaciones de cada una de ellas.

En este artículo se describen resultados de una investigación relacionado con el surgimiento, modificación, ampliación y refinamiento de formas de pensar de docentes acerca de conceptos tales como función, variación, ecuación, así como la relación de estos conceptos entre sí, y con las representaciones gráficas y tabulares, que dieron lugar a modelos lineales y exponenciales. Se muestran las características de una actividad que se diseñó con base en la *PMM*. Interesaba conocer si la actividad propiciaba la construcción de sistemas conceptuales compartibles, manipulables, modificables y reutilizables (modelos) y determinar las características de tales modelos al responder a las preguntas siguientes: ¿Cumple la actividad con los principios de diseño de una APM? ¿Qué significa que cumpla con ellos? ¿Qué formas de pensar o modelos emergieron al realizarla? ¿Qué conocimientos, conceptos y habilidades matemáticas se utilizaron? ¿Es posible observar el surgimiento, modificación, ampliación y refinamiento de estas formas de pensar?

2. REVISIÓN DE LITERATURA

De acuerdo con la perspectiva de Modelos y Modelación (*PMM*) propuesta por Richard Lesh y colaboradores (Lesh y Doerr, 2003; Doerr, 2016; Lesh, 2010; Lesh, Yoon y Zawojewski, 2007), el aprendizaje de las matemáticas es un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales, que cambian de manera continua, se modifican, extienden y refinan a partir de las interacciones del estudiante con sus compañeros y profesores al resolver problemas.

> Los modelos son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda manipularse o predecirse de manera inteligente. (Lesh y Doerr, 2003, p. 10)

Los modelos, por lo tanto, se pueden compartir, manipular, modificar y reutilizar, para describir, interpretar, construir, manipular, predecir o controlar sistemas. El aprendizaje de un concepto se asocia con el desarrollo de modelos, esto es, de sistemas conceptuales construidos a partir de las situaciones que enfrenta un individuo; se asocia con las actividades que se realizan para entender un fenómeno, como la cuantificación de información cualitativa, medición, ubicación de eventos en sistemas de referencia, organización y análisis de datos, realización de cálculos numéricos, resolución de ecuaciones o aplicación de procedimientos (Lesh y Doerr, 2003). Alcanzar una comprensión conceptual implica considerar los conceptos en diversas dimensiones: concreto–abstracto, particular–general, en contexto–sin contexto, intuitivo–analítico– axiomático, fragmentado–integrado (Doerr y Lesh, 2003).

La construcción de conocimiento es un proceso social que implica fases de diferenciación, integración y refinamiento, durante las cuales se construyen, modifican, extienden y refinan modelos. La interacción entre los estudiantes durante el proceso de instrucción es una oportunidad para contrastar y refinar los sistemas conceptuales de cada participante. La comunicación y la confrontación de ideas ayudan a resaltar información, relaciones, y concepciones no consideradas o consideradas inadecuadamente, así como para explicitar criterios de evaluación. La comprensión conceptual cambia en la medida que el individuo comunica y comparte sus modelos con otras personas. El conocimiento no es algo inerte, sino algo más parecido a un organismo vivo, a un sistema complejo, dinámico, inmerso en un proceso de adaptación continua, que se autorregula, y cuya existencia es, parcialmente, el resultado de construcciones humanas (Lesh y Yoon, 2004).

Los modelos residen en la mente y en los medios representacionales: "los significados asociados con un sistema conceptual dado tienden a estar distribuidos a través de una variedad de medios representacionales" (Lesh y Doerr, 2003, p. 12). Los modelos son personales porque reflejan la experiencia del estudiante o individuo al abordar situaciones problemáticas. La construcción de un modelo pertinente para describir, explicar y pronosticar la evolución o aspectos de esa situación, es un proceso que permite a los estudiantes relacionar los diferentes factores que inciden en esa situación o fenómeno. Los sistemas conceptuales internos, al ser exteriorizados mediante representaciones, sufren modificaciones. Algo semejante ocurre cuando se comparten y discuten estos modelos con otras personas. ¿Cómo saber que un modelo es pertinente? Cuando el modelo se utiliza para describir una situación, para explicar sus cambios, para predecir su comportamiento, esto es, cuando es útil para responder preguntas que se plantean sobre dicha situación. En este sentido, la construcción de sistemas conceptuales permite a una persona desarrollar habilidades para crear nuevos modelos, a partir de sus experiencias previas (Lesh y Doerr, 2003, p. 24-25; Lesh, Cramer, Doerr, Post, y Zawojewsky, 2003). Esto hace que en la PMM se considere que el producto del aprendizaje es el proceso de construcción del modelo y no sólo el modelo.

En la *PMM* se propone que los alumnos resuelvan situaciones cercanas a la vida cotidiana, denominadas Actividades Provocadoras de Modelos, con el fin de "describir, explicar o predecir el comportamiento de situaciones significativas" (Ärlebäck, Doerr, y O'Neil, 2013, p. 316). Lo anterior significa que los estudiantes, partir de su conocimiento matemático previo, darán significado a las situaciones problemática mediante la construcción de herramientas matemáticas. La actividad de modelación propicia que los estudiantes realicen acciones como: cuantificar información, dimensionar espacios, ubicar eventos en marcos de referencia, organizar y analizar datos, realizar cálculos, establecer relaciones y funciones matemáticas, desarrollar criterios de comparación o decisión, resolver ecuaciones y aplicar procedimientos, (Lesh y Doerr, 2003). Se busca, además, fomentar el planteamiento de preguntas, formulación de conjeturas, la argumentación, la toma de decisiones, comunicación, evaluación de respuestas y procedimientos.

El abordaje de una APM demanda del estudiante la construcción de una interpretación cuantitativa de las situaciones, así como realizar varios ciclos de modelación, que requieren diferentes formas de pensamiento. El proceso de solución exige más que procesar la información mediante el uso de un modelo invariante y único, requiere también la transformación del modelo, su ampliación o refinamiento. Para lograr todo lo antes señalado, las APM deben diseñarse siguiendo seis principios, descritos por Lesh, Cramer, Doerr, Post, y Zawojewsky (2003) y Doerr (2016), los cuales se mencionan enseguida.

- *Principio de la realidad*. Las situaciones deben estar cercanas a los intereses de los estudiantes, sus experiencias y conocimientos para que le den sentido. Al diseñar la actividad el profesor debe responder lo siguiente ¿esto puede suceder en la vida real? El problema no necesariamente debe ser real, en el sentido absoluto, pero sí estar cercano a alguna experiencia cotidiana del alumno. Para ello se propone que el profesor se pregunte ¿La actividad impulsa a los estudiantes a dar sentido a la situación con base en la ampliación de sus experiencias y conocimientos personales?
- *Principio de la construcción de modelos*. La meta de la actividad debe ser el desarrollo explícito de una construcción, descripción, explicación, o de una predicción justificada. Uno de los productos más importantes que los alumnos deben crear, es un modelo. Ello implica utilizar una amplia variedad de sistemas de representación, gráfica, simbólica o basada en el lenguaje común; necesarios para describir las relaciones, operaciones, y patrones subyacentes. Una pregunta útil para satisfacer este criterio es: ¿La tarea pone a los alumnos en una situación donde ellos reconocen la necesidad de desarrollar un modelo para interpretar datos, metas, y el posible proceso de solución?
- *Principio de la autoevaluación***.** Si los problemas son significativos para los estudiantes, y ellos reconocen la necesidad de hacer construcciones, descripciones, explicaciones, entonces puede ocurrir una aparición de ideas novedosas y relevantes en un grupo. Para que estas ideas o los sistemas conceptuales evolucionen, son necesarias la selección y el refinamiento. Por ello, se sugiere preguntarse: ¿El enunciado del problema sugiere criterios para evaluar la utilidad de soluciones alternativas?, ¿es claro el propósito (qué, cuando, porqué, donde, y por quién)?, ¿permite a los estudiantes juzgar cuándo sus respuestas requieren mejorarse, o cuando necesitan refinarse o ampliarse para un propósito dado?, ¿permite que los alumnos conozcan cuándo han obtenido una buena respuesta?, o ¿tienen que preguntar continuamente al profesor si "ya alcanzaron la solución"?
- *Principio de documentación del modelo*. Las situaciones deben ser reveladoras de pensamiento; es decir, deben responder las preguntas siguientes: ¿Permitirá revelar explícitamente lo que piensan los alumnos acerca de la situación? En particular, ¿permitirá que los estudiantes proporcionen información que pueda examinarse para identificar el tipo de sistema que pensaron y utilizaron (objetos, relaciones, operaciones, patrones, y regularidades)? Para determinar si se satisface este principio, se sugiere revisar si los productos elaborados por los alumnos revelan, tanto como es posible, la forma como pensaron los datos, las metas, y los procesos de solución. Las descripciones y explicaciones deben responder a preguntas del tipo: ¿Qué objetos matemáticos (por ejemplo; razones, tendencias, coordenadas) utilizaron los estudiantes? ¿Qué tipo de relaciones o comparaciones (de equivalencia, de orden, e invariancia bajo transformaciones) entre los objetos consideraron? ¿Qué tipo de operaciones e interacciones (combinaciones aditivas e interacciones multiplicativas) entre los objetos utilizaron? ¿Qué principios (transitividad y conmutatividad) dirigieron las comparaciones e interacciones

anteriores? ¿Qué sistemas de representación (gráficas, diagramas, símbolos alfanuméricos, y metáforas) utilizaron?

- *Principio de la reutilización del modelo.* Es importante preguntarse ¿El modelo desarrollado es útil sólo para quién lo construyó y puede aplicarse únicamente a la situación particular presentada en el problema?, o ¿proporciona una forma de pensamiento que es transferible, transportable, fácil de modificar, y reutilizable? Como herramientas conceptuales, los modelos matemáticos, y los procedimientos que se derivan de ellos, al ser generalizables varían ampliamente; aunque algunos están bastantes restringidos a las peculiaridades de situaciones problema particulares.
- *Principio de la generalización del modelo.* Este principio propone revisar si la actividad diseñada responde a las siguientes preguntas: ¿La solución proporciona un prototipo útil, o una metáfora para interpretar otras situaciones que pueden ser más complejas? Mucho tiempo después de que el problema ha sido resuelto ¿podrían los estudiantes recordarlo cuando se encuentran con otra situación estructuralmente semejante?

Matematizar situaciones (o actividades provocadoras de modelos) es un medio para apoyar la construcción y el desarrollo de comprensión conceptual. De acuerdo con Doerr (2016) es necesario establecer secuencias de actividades relacionadas estructuralmente. La tarea del estudiante consiste en identificar las similitudes y diferencias entre las actividades, lo cual implica centrar su atención en el sistema conceptual común subyacente. La necesidad de analizar y describir fenómenos naturales y sociales hace importante el aprendizaje del concepto de función. Las funciones son herramientas que permiten interpretar y describir fenómenos que cambian. Las funciones y sus representaciones (gráficas, tablas y ecuaciones) pueden conceptualizarse "como la descripción de relaciones entre cantidades, determinadas por la medida de los atributos de los objetos" (Ärlebäck, Doerr, y O'Neil, 2013, p. 317).

El diseño de actividades de esta investigación se basó en las recomendaciones de la *PMM* (seis principios señalados). Es nuestro interés propiciar el desarrollo de conocimiento y habilidades matemáticas en los docentes, relacionadas con conceptos de función, ecuación y variación, de una manera no aislada de otros conceptos, fenómenos y procesos relacionados que le dieran sentido y significado; y de una concepción del aprendizaje –visto como sistemas conceptuales en continuo cambio– en el marco de la interacción social mientras se realizan actividades.

3. METODOLOGÍA

La metodología del proyecto fue de cualitativa porque se documentó y analizó el desarrollo de conocimiento, su modificación, extensión y refinamiento por los docentes, al interactuar entre ellos y con el investigador para realizar actividades. Por ende, se diseñaron actividades, se implementaron y se documentaron resultados de la implementación en términos del uso de conceptos como variación, ecuación, función lineal, función exponencial a través de la creación de modelos por los docentes al abordar las situaciones.

3.1. Población de estudio

Los participantes en este estudio fueron ocho profesores de nivel bachillerato que imparten clases de matemáticas en escuelas del estado de Michoacán, México, quienes contaban con distintas formaciones profesionales como ingenieros o físico matemáticos. Las tareas se implementaron durante un taller de verano, que fue parte de un evento regional dirigido a profesores de matemáticas. Es decir, había un interés genuino por parte de los docentes para aprender nuevas formas de trabajar en el aula que condujeran hacia aprendizajes significativos. El taller tuvo una duración de 10 horas, distribuidas en tres sesiones. En la primera sesión se introdujo la perspectiva de Modelos y Modelación y se implementó la APM1. Se continuó la discusión en la segunda sesión y se implementó la APM2. En la tercera sesión se hizo el cierre de la APM2 y del taller.

3.2. Actividades Provocadoras de Modelos

La Actividad Provocadora de Modelos que aquí se discute (Figura 1) se denomina: La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo (APM1). A esta actividad le siguió otra llamada: Propuesta de Reforestación (APM2). Los objetivos, al implementar las APM fueron apoyar la modificación y extensión del sistema conceptual de los profesores alrededor de los conceptos de función, variación, ecuación, incógnita, solución y sistemas de ecuaciones lineales; incidir en el desarrollo de habilidades para la modelación matemática, y concientizar a los docentes sobre las consecuencias que ha tenido el incremento en la producción y venta del aguacate sobre la deforestación en el estado de Michoacán. De acuerdo con lo revelado por Greenpeace (2017), la acelerada destrucción de los bosques ha puesto en riesgo de extinción a una gran variedad de plantas y animales que dependen de ese ecosistema.

Las APM se diseñaron con base en los seis principios mencionados previamente. Los conceptos de función, ecuación y variación están implícit amente involucrados en cada APM; así como los de crecimiento y razón de cambio. La APM1 cuenta con información numérica, tomada de diversas fuentes (periódicos, tesis y documentos oficiales) lo cual hace que los datos sean diferentes entre sí y, por lo tanto se deban revisar, analizar y seleccionar.

Morelia, Michoacán
Lunes, 7 de agosto de 2017

Cambios
EN MICHOACÁN

SECCIONES: Primera plana Michoacán México Deportes Economía Cultura Internacional Campus Viviente

El cultivo de Aguacate

Bosques michoacanos convertidos en cultivo de aguacate 1

Contenido extra

El enfoque 3

Ayúdanos 4

No olvides escribirnos

¡Tu aportación es muy importante! No olvides escribirnos tu carta con posibles propuestas para encontrar solución a las problemáticas aquí planteadas

Campus Viviente

Entérate

Morelia, Mich. - En la Meseta Purépecha, de Michoacán, se produce el 75 por ciento del aguacate de ese estado y el 65 por ciento de todo el país. Sin embargo, ante la ausencia de una regulación efectiva para delimitar las áreas de conservación forestal, así como de alternativas reales y competitivas para el buen manejo de los recursos forestales, el cultivo de aguacate sigue creciendo de manera desmedida sobre los bosques.

Continúa en la página 2

Morelia, Mich. a 7 de agosto de 2017

(Continuación)

Desde hace varios años, las siembras del aguacate han provocado la deforestación de miles de hectáreas de bosques de pino y encino, según datos oficiales. La desaparición de los bosques purépechas se debe principalmente al crecimiento de la superficie dedicada a monocultivos de aguacate y a la urbanización. Sin considerar la conversión de parcelas que tradicionalmente se destinaban al cultivo de temporal o a la ganadería.

Muchos de los cultivos de aguacate son ilegales. Se cultiva aguacate en zonas boscosas sin permiso de la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (Semarnat) para el cambio de uso de suelo. Incluso, algunos incendios forestales son provocados para sembrar aguacates.

El cultivo de aguacate ha traído una serie de efectos sociales positivos y negativos. Entre los positivos destaca, sin duda, el incremento del ingreso en la región por lo bien cotizado del producto. En torno a la actividad ha crecido un conjunto de servicios asociados, como empresas de fertilizantes e insecticidas, sistemas de irrigación, servicios agronómicos, etc. Adicionalmente, se ha abierto una fuente de empleo temporal que permite a un importante número de jornaleros ocuparse en la temporada de cosechas; también ha dado lugar al crecimiento de la infraestructura de los pueblos aguacateros la región.

Sin embargo, los grandes ganadores de la actividad son connotadas familias ubicadas sobre todo en la ciudad de Uruapan, que controlan, además de importantes áreas de producción, la venta de insumos, el empaque y comercialización de la fruta en el mercado internacional y nacional. Por otra parte, el éxito comercial se ha convertido en una amenaza para los bosques de Michoacán, donde existen algunas de las reservas forestales más importantes del país.

El problema se agrava, porque además el desplazamiento de las superficies boscosas puede tener impacto ambiental sobre la captura y disponibilidad de agua en la región. Otros factores que pueden tener efectos negativos sobre las condiciones ambientales de la zona y sobre el bienestar de su población son el elevado uso de agroquímicos y la demanda de grandes volúmenes de madera para el empaque y transporte del aguacate.

ENFOQUE

Morelia, Mich. A 7 de agosto de 2017 https://plus.google.com/u/0/communities/100320204402382732939

De acuerdo con el texto contesta las siguientes preguntas

¿Qué estado de la República Mexicana es el mayor productor de aguacate?

¿Por qué el cultivo de aguacate afecta los bosques? ¿Cómo afecta el cultivo de aguacate los bosques? O ¿Qué efectos produce en los bosques el cultivo de aguacate?

¿Por qué es importante el cultivo de aguacate?

Vargas, V. & Cristóbal, C. (2017). El cultivo de aguacate. Recuperado de https://plus.google.com/u/0/communities/100320204402382732939

AYÚDANOS

Morelia, Mich. A 7 de agosto de 2017

Yuri, funcionaria joven de la comunidad de Tingambato, preocupada por la reciente noticia sobre la pérdida de bosque que ocurre en la Meseta Purépecha, investigó en internet la problemática con el fin de solicitar apoyo para detener la deforestación. Pero, primero se propuso informarse mejor sobre la situación, de manera que ello le permitiera describirla. Su intención es, primero, concientizar a la población y finalmente, conseguir apoyo de toda la comunidad para resolver la problemática. La información que encontró fue la siguiente.

> Un estudio realizado por el Centro de Investigaciones en Geografía Ambiental- UNAM, en los municipios de Charapan, Cherán, Los Reyes, Nahuatzen, Nuevo San Juan Parangaricutiro, Paracho, Peribán, Tancítaro, Tingambato, Uruapan y Ziracuaretiro muestra cómo se perdieron 20 mil 32 hectáreas de bosques entre 1976 y 2005. Y sólo de 2000 al 2005 esta pérdida se aceleró y adquirió un ritmo de 509 hectáreas por año.
>
> Un periódico de abril de 2017 señaló que cada año se pierden entre 600 y 1000 hectáreas de bosque en todo el estado, según datos gubernamentales del Instituto Nacional de Investigaciones.
>
> En el año 2014 de acuerdo con la Forestal la superficie con bosque (pino, pino-encino y encino) en la Meseta Purépecha era de 147 744 ha. La Meseta Purépecha tiene una extensión territorial de 381 357 ha.

Yuri, a partir de esta información, tiene muchas preguntas. Le inquieta saber ¿cuánto bosque existió en 1976?, ¿cuánto bosque existió en 2005?, ¿cuánto bosque existe actualmente?, ¿cuánto bosque existirá dentro de 10 años? Si el ritmo de pérdida de hectáreas continua siendo el señalado ¿cuándo dejará la Meseta Purépecha de tener bosques? Yuri considera que el bosque pronto desaparecerá. Sabe que la deforestación está relacionada con el crecimiento de cultivo de aguacate por lo que buscó más información para cotejar o evaluar la veracidad de los datos anteriores. Encontró la siguiente información.

> En 1960 no existían monocultivos de aguacate en la meseta purépecha; había variedades criollas que daban cobertura de sombra al cultivo del café. Hacia 1976 calculamos una superficie de agricultura frutícola de 34 606 hectáreas, cuyo cultivo dominante ya era el monocultivo de aguacate Hass, aunque aún persistían áreas de cafetales. Hacia el año 2000 el cultivo del aguacate domina la superficie frutícola y alcanza las 55 627 ha, y en el año 2006 aumenta aún más hasta las 67 181 ha. El cultivo de huertas de aguacate ha traído profundos cambios.
>
> Bocco, basándose en información del censo del aguacate de SAGAR, establece el área cubierta por aguacate en 5 municipios dentro de la Meseta Purépecha en 39 849 hectáreas para el año 1993, mientras que Coria y Martínez, a partir de la interpretación de fotografías aéreas de 1991, obtienen un total de 41 957 hectáreas para la Meseta Purépecha (62 393 para el estado de Michoacán).

Ayúdale a Yuri a encontrar un método o procedimiento para dar respuesta a cada una de sus dudas planteadas. Escríbele una carta donde expliques tu procedimiento.

Figura 1. Actividad Provocadora de Modelos APM1

Yuri, funcionaria joven de la comunidad de Tingambato, preocupada por la reciente noticia sobre la pérdida de bosque que ocurre en la Meseta Purépecha, investigó en internet la problemática con el fin de solicitar apoyo para detener la deforestación. Pero, primero se propuso informarse mejor sobre la situación, de manera que ello le permitiera describirla. Su intención es, primero, concientizar a la población y finalmente, conseguir apoyo de toda la comunidad para resolver la problemática. La información que encontró fue la siguiente.

> Un estudio realizado por el Centro de Investigaciones en Geografía Ambiental-UNAM, en los municipios de Charapan, Cherán, Los Reyes, Nahuatzen, Nuevo San Juan Parangaricutiro, Paracho, Peribán, Tancítaro, Tingambato, Uruapan y Ziracuaretiro, muestra cómo se perdieron 20 mil 32 hectáreas de bosques entre 1976 y 2005. Y sólo de 2000 al 2005 esta pérdida se aceleró y adquirió un ritmo de 509 hectáreas por año.
>
> Un periódico de abril de 2017 señaló que cada año se pierden entre 600 y 1000 hectáreas de bosque en todo el estado, según datos gubernamentales del Instituto Nacional de Investigaciones.
>
> En el año 2014 de acuerdo con la Forestal la superficie con bosque (pino, pino-encino y encino) en la Meseta Purépecha era de 147 744 ha. La Meseta Purépecha tiene una extensión territorial de 381 357 ha.

Yuri, a partir de esta información, tiene muchas preguntas. Le inquieta saber ¿cuánto bosque existió en 1976?, ¿cuánto bosque existió en 2005?, ¿cuánto bosque existe actualmente?, ¿cuánto bosque existirá dentro de 10 años? Si el ritmo de pérdida de hectáreas continua siendo el señalado ¿cuándo dejará la Meseta Purépecha de tener bosques? Yuri considera que el bosque pronto desaparecerá. Sabe que la deforestación está relacionada con el crecimiento de cultivo de aguacate por lo que buscó más información para cotejar o evaluar la veracidad de los datos anteriores. Encontró la siguiente información.

> En 1960 no existían monocultivos de aguacate en la meseta purépecha; había variedades criollas que daban cobertura de sombra al cultivo del café. Hacia 1976 calculamos una superficie de agricultura frutícola de 34 606 hectáreas, cuyo cultivo dominante ya era el monocultivo de aguacate Hass, aunque aún persistían áreas de cafetales. Hacia el año 2000 el cultivo del aguacate domina la superficie frutícola y alcanza las 55 627 ha, y en el año 2006 aumenta aún más hasta las 67 181 ha. El cultivo de huertas de aguacate ha traído profundos cambios.
>
> Bocco, basándose en información del censo del aguacate de SAGAR, establece el área cubierta por aguacate en cinco municipios dentro de la Meseta Purépecha en 39 849 hectáreas para el año 1993, mientras que Coria y Martínez, a partir de la interpretación de fotografías aéreas de 1991, obtienen un total de 41 957 hectáreas para la Meseta Purépecha (62 393 para el estado de Michoacán).

Ayúdale a Yuri a encontrar un método o procedimiento para dar respuesta a cada una de sus dudas planteadas. Escríbele una carta donde expliques tu procedimiento.

Figura 2. El problema.

El material de la APM1 consta de cuatro hojas tamaño carta. En las dos primeras hay un artículo periodístico, cuyo objetivo es familiarizar al lector con el contexto del problema. La tercera hoja contiene preguntas de comprensión lectora. La cuarta hoja (Figura 2) incluye datos sobre deforestación en el estado de Michoacán, tomados de diversas fuentes, los cuales constituyen los insumos básicos para la actividad de modelación (Comisión Forestal del Estado de Michoacán, 2014; Greenpeace, 2017; Instituto Nacional de Estadística y Geografía, 2017).

3.3. Forma de trabajo en el aula

La APM1 se implementó en un periodo de cuatro horas de la siguiente manera:

1. Fase individual. Entrega del artículo periodístico y lectura individual.
2. Fase en equipos. Resolución del problema en equipo –dos equipos de 3 profesores [denominados M1, M2, M3, N1, N2, N3] y una pareja de profesores [profesores P1 y P2]– en ambiente colaborativo. Los docentes construyeron el modelo, escribieron una carta y prepararon una exposición.
3. Fase grupal. Presentación de la carta al grupo, evaluación y discusión de modelos por todo el grupo.
4. Fase individual (tareas extra clase). Resolución del problema individualmente.

La descripción de lo ocurrido en el aula durante estas fases es la siguiente. El Investigador [I] entregó a los profesores las tres primeras hojas de la actividad; les pidió que las leyeran y respondieran las preguntas individualmente. Después de que leyeron, discutieron en grupo la situación y comentaron qué tanto conocían al respecto, como pobladores de la región. Enseguida, se les entregó el enunciado del problema y, en equipos de tres integrantes, empezaron a abordarlo. Los modelos construidos fueron presentados en la fase grupal. Una vez realizada la presentación y discusión de resultados se solicitó, como tarea individual, realizar nuevamente la carta indicada en la hoja 4 de la APM1.

El investigador participó como observador durante el proceso de resolución del problema y como facilitador de la discusión grupal. De vez en cuando intervino planteando preguntas como las siguientes: ¿ha quedado claro el problema?, ¿es similar a los que ustedes utilizan en sus clases?, ¿qué información proporciona?, ¿por qué ese modelo es útil?

Los instrumentos de recolección de datos incluyeron grabaciones de audio y video, las cartas elaboradas por los docentes, fotografías de las producciones escritas que se efectuaron en el pizarrón, archivos electrónicos de Excel y Word elaborados por los profesores, así como notas de campo registradas en la bitácora del investigador. Estos instrumentos sirvieron para identificar y analizar las formas de proceder de los profesores ante la APM1, tanto individual, en equipo como en forma grupal; la forma de comunicación de ideas, la emergencia de conceptos y uso de habilidades matemáticas; así como las modificaciones, extensiones y refinamiento de formas de pensar. Posibilitaron verificar o modificar las hipótesis construidas a partir de las observaciones –bitácora del investigador– y corroborarlas, mediante estrategias de triangulación.

3.4. Criterios de análisis

Los seis principios propuestos para el diseño de las APM (Lesh, Cramer, Doerr, Post y Zawojewsky, 2003; Doerr, 2016) sirvieron como criterios de análisis para evaluar si la APM1 propició la construcción de sistemas conceptuales compartibles, manipulables, modificables y reutilizables que apoyaran el surgimiento, modificación, ampliación y refinamiento de formas de pensar de docentes, relacionadas con conceptos de función, variación, ecuación; así como la relación de estos conceptos entre sí y con diversas representaciones. El cumplimiento de los principios permitió identificar los modelos, así como el proceso de construcción de los mismos, los conocimientos y habilidades matemáticas de los docentes a lo largo de la sesión. Es decir, durante el trabajo individual, en equipo y grupal, a través del diálogo utilizado durante las interacciones en equipo, exposiciones y cartas elaboradas.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se presenta el análisis de la actividad provocadora de modelos, con base en los seis principios de la *PMM.* Se muestran reflexiones relacionadas con la interpretacción, descripción y predicción de la situación; se analizan los modelos construidos por los docentes, así como la transformación de sus formas de pensamiento.

4.1. Principio de la realidad

Fase 1. A todos los docentes les atrajo el contexto del problema, incluido en el artículo de periódico, debido, entre otros aspectos, a que eran habitantes de la región y la situación ocurre en su entorno. Describieron, *cualitativamente*, de acuerdo con su experiencia, cómo percibían el fenómeno de la deforestación y el éxito del cultivo de aguacate; a través de narraciones de lo que conocían sobre la problemática. Manifestaron que la deforestación es motivo de preocupación para muchos michoacanos, en particular, el cambio de tipo de suelo –de bosque a zona de cultivo de aguacate– y la tala inmoderada. No todos conocían a profundidad la situación, por ejemplo, la existencia de zonas indígenas y sus programas de creación de viveros para reforestar zonas de su región. Mencionaron que hace falta el impulso de más iniciativas oficiales para resolver la problemática. Por otra parte, comentaron que les interesaba el cuidado del medio ambiente y promoverlo en sus escuelas. Esto lo señalaron durante la discusión de la lectura del artículo y al final del taller, como se observa en el siguiente extracto.

> Docente N2: Es una problemática muy interesante. En lo particular me interesa el cuidado del medio ambiente. Es algo que promuevo mucho con mis estudiantes, por lo tanto, estos problemas me cayeron del cielo.

4.2. Principios de construcción y documentación de modelos

Durante la Fase 2 de resolución en equipo de la APM1, los ocho profesores tuvieron varias inquietudes. Consideraron que el problema no era tradicional, como los incluidos comúnmente en los libros de texto, con datos e incógnitas necesarias y suficientes para resolverlo. Señalaron que había datos de diversas fuentes: artículos de periódico nacionales, tesis y documentos oficiales. La interpretación inicial de los ocho docentes fue que tenían bastante información, pero, al mismo tiempo, insuficiente para responder a las interrogantes. Los comentarios siguientes [tomados de la transcripción del audio] son ejemplo de lo comentado por los docentes.

El docente M1 comentó que había bastante información; su referente de comparación eran los problemas tradicionales que se usan en clase. El profesor P1, por otra parte, no identificó la existencia de datos pertinentes para resolverlo.

- M1: Es un problema con mucha información y no está correcta
- P1: No lo vamos a poder sacar… nos hacen falta unos datos que no nos están dando

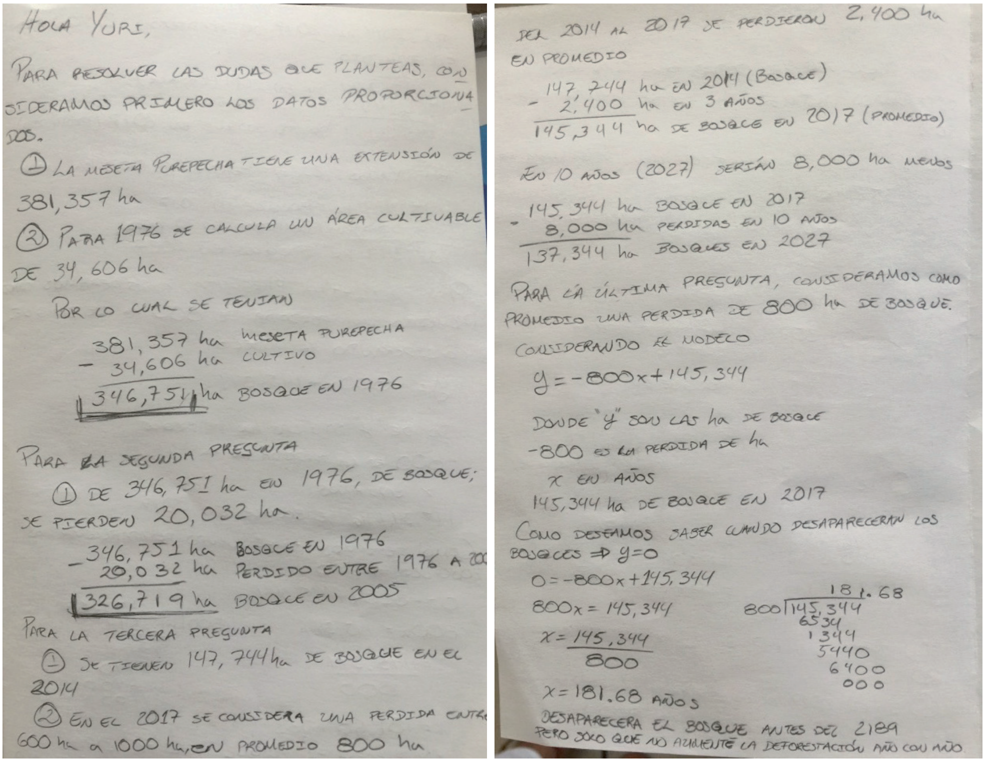
Con base en esta interpretación inicial, los equipos M y N propusieron la construcción de modelos concretos, gráficos y simbólicos (Figuras 3 y 6) para describir e ilustrar las relaciones, operaciones y patrones. El profesor M3 sugirió construir una representación gráfica, mientras que el equipo N propuso la construcción de un modelo lineal.

- M3: ¿Yo aquí qué haría? Pues… por ejemplo, plantearía una gráfica, en las cuales [sic]… ¿a partir de cuándo es el estudio? Pues de dos mil… de la fecha inicial, a la fecha, a la fecha, a la fecha final que es dos mil catorce, creo
- M1: Desde mil novecientos setenta y seis
- N1: Bueno… [inaudible], la información, un poquito más precisa, sugiere realmente una variación lineal.
- N2: Sí, sí, sí.

Ambos equipos, después de revisar la información, la seleccionaron, relacionaron y organizaron, e hicieron operaciones. Desarrollaron, de manera explícita, una descripción, explicación, y predicción de la situación de deforestación en la región purépecha de Michoacán y la documentaron (*principio de documentación del modelo*). Hubo dos formas de proceder, mediante el uso de modelos algebraicos lineales, y de modelos tabulares y gráficos exponenciales (Figuras 3 y 6). En ellos se observa la forma de pensar respecto a la problemática y el uso de objetos matemáticos, relaciones, operaciones, patrones y regularidades; utilizaron variables, relaciones funcionales lineales y exponenciales.

4.2.1. Modelo lineal del equipo N

En la carta del equipo N (Figura 3) se observan los datos empleados para analizar la situación, las relaciones establecidas entre ellos, las operaciones aritméticas que permitieron dar respuesta a las preguntas planteadas y, finalmente, un modelo algebraico. Los integrantes del equipo N decidieron utilizar una tasa de cambio (800 ha/año) para



HOLA YURI,

PARA RESOLVER LAS DUDAS QUE PLANTEAS, CONSIDERAMOS PRIMERO LOS DATOS PROPORCIONADOS.

① LA MESETA PUREPECHA TIENE UNA EXTENSIÓN DE 381,357 ha

② PARA 1976 SE CALCULA UN ÁREA CULTIVABLE DE 34,606 ha

POR LO CUAL SE TENIAN

381,357 ha MESETA PUREPECHA
− 34,606 ha CULTIVO
346,751 ha BOSQUE EN 1976

PARA LA SEGUNDA PREGUNTA

① DE 346,751 ha EN 1976, DE BOSQUE; SE PIERDEN 20,032 ha.

346,751 ha BOSQUE EN 1976
− 20,032 ha PERDIDO ENTRE 1976 A 20
326,719 ha BOSQUE EN 2005

PARA LA TERCERA PREGUNTA

① SE TIENEN 147,744 ha DE BOSQUE EN EL 2014

② EN EL 2017 SE CONSIDERA UNA PERDIDA ENTRE 600 ha A 1000 ha, EN PROMEDIO 800 ha

DEL 2014 AL 2017 SE PERDIERON 2,400 ha EN PROMEDIO

147,744 ha EN 2014 (BOSQUE)
− 2,400 ha EN 3 AÑOS
145,344 ha DE BOSQUE EN 2017 (PROMEDIO)

EN 10 AÑOS (2027) SERÍAN 8,000 ha MENOS

145,344 ha BOSQUE EN 2017
− 8,000 ha PERDIDAS EN 10 AÑOS
137,344 ha BOSQUES EN 2027

PARA LA ÚLTIMA PREGUNTA, CONSIDERAMOS COMO PROMEDIO UNA PERDIDA DE 800 ha DE BOSQUE.

CONSIDERANDO EL MODELO

$y = -800x + 145{,}344$

DONDE "y" SON LAS ha DE BOSQUE
−800 ES LA PERDIDA DE ha
x EN AÑOS
145,344 ha DE BOSQUE EN 2017

COMO DESEAMOS SABER CUANDO DESAPARECERAN LOS BOSQUES ⇒ $y=0$

$0 = -800x + 145{,}344$
$800x = 145{,}344$
$x = \frac{145{,}344}{800}$

800) 145,344 = 181.68
6534
1344
5440
6400
000

$x = 181.68$ AÑOS

DESAPARECERA EL BOSQUE ANTES DEL 2189
PERO SOLO QUE NO AUMENTE LA DEFORESTACIÓN AÑO CON AÑO.

Figura 3. Carta del equipo N.

predecir cuándo desaparecería el bosque. Al final, sumaron 2007 + 181.68 para argumentar que el bosque desaparecería antes del año 2189. Se puede observar que los integrantes del equipo N no escribieron las unidades dimensionales de la tasa (Figura 3), sin embargo, las mencionaron verbalmente durante su exposición. Se consideraron unidades de medida como hectáreas y se proporcionaron argumentos para sustentar algunas de sus respuestas; incluso se describió el significado de cada elemento de la función lineal que obtuvieron como modelo: $y = 800x + 145344$. La conclusión del equipo fue: “desaparecerá el bosque antes del 2189 pero solo que no aumente la deforestación año con año”. Los docentes estimaron que en 172 años ya no habrá bosque en Michoacán. Su carta la escribieron en lápiz y papel (Figura 3) al igual que el equipo M.

4.2.2. Modelo exponencial del equipo M

Los integrantes del equipo M mencionaron en su carta que la información [del problema] no estaba articulada (Figura 4); y verbalmente, expresaron que no estaba organizada, que no era suficiente y a veces los datos no coincidían. Este equipo seleccionó información, la organizó e hizo operaciones. Los profesores comentaron lo siguiente: “se tabularon los datos y se encontró que en 1976 habían [sic] 34606 hectáreas de cultivo de

Querida Yuri

La información de la cual disponemos no está articulada, pero consideramos la información disponible, llegamos a las siguientes conclusiones:

1. Se tabularon los datos y se encontró que en 1976 habían 34,606 hectáreas de cultivos de cinco municipios de la meseta purépecha
- Para el año 2000 en toda la región purépecha 55, 627 hectáreas
- Para el año 2006, 67,181 hectáreas de monocultivos de aguacate

En base a estos datos proyectados gráficamente, se espera que en un aproximado de 40 años alcance un total de 147,000 hectáreas de aguacate, porque en base a otro dato que tenemos del año 2014 de la región purépecha, existían 147, 744 hectáreas de bosque de un total de 381, 357 hectáreas de la región, es importante considerar que no se cuenta con información suficiente de que cada una de las hectáreas de bosque, sean cambiadas por cultivo de aguacate.

Figura 4. Carta del equipo M. Se transcribió el texto para una mejor visibilidad.

cinco municipios de la meseta purépecha". Es decir, identificaron datos y variables, y los relacionaron a través de tablas y una gráfica (Figura 5). Los profesores crearon un modelo exponencial a partir de varios supuestos. Finalmente, predijeron que en 40 años se tendrían 147000 hectáreas cultivadas de aguacate, casi equivalente al bosque existente en la actualidad.

Una descripción del proceso de construcción del modelo es la siguiente: Los integrantes del equipo M identificaron dos relaciones entre variables, (1) cantidad de hectáreas de cultivo de aguacate de la meseta purépecha [mp] vs tiempo y (2) cantidad de hectáreas perdidas de bosque en la meseta purépecha vs tiempo. Con base en los datos considerados útiles, se elaboraron tablas que permitieran entender el comportamiento de los datos (Tabla 1). El subtítulo "Pérdida" que utilizaron los integrantes del equipo en la columna 2 (Tabla 1a) tiene dos significados: 1) corresponde a la cantidad de hectáreas (ha) de bosque (fila dos, segunda columna) que se perdió en 29 años, y 2) corresponde a la tasa de cambio o hectáreas de bosque perdidas por año, de acuerdo con información contenida en el problema. A partir de los datos de la Tabla 1a, el equipo M generó una nueva tabla con datos que le permitieron analizar tanto el crecimiento del cultivo de aguacate como la pérdida de bosque michoacano (Tabla 2). Los integrantes del equipo consideraron que el cultivo de aguacate estaba creciendo con una tasa de 509 ha por año. Esto se observa en los datos de la segunda columna y en los de la tercera. El subtítulo pérdida se refiere a la cantidad de hectáreas de aguacate que existen en cada año. La tercera columna corresponde a la cantidad de hectáreas de bosque michoacano existente cada año.

Con base en los datos de la Tabla 1b (correspondientes a los años 1976, 2000 y 2006) los profesores elaboraron una gráfica para describir la situación (Figura 5). En el eje horizontal ubicaron el tiempo (periodo de 1960 a 2030); en el eje vertical la cantidad posible de hectáreas de cultivo de aguacate en la meseta purépecha (20000 ha-380000 ha). De acuerdo con la explicación verbal del equipo, les faltó tiempo para trazar (en el mismo plano cartesiano) la gráfica de tipo exponencial decreciente, correspondiente al decrecimiento del bosque. Al parecer consideraron que las hectáreas de bosque en 1960 eran las correspondientes a la extensión total de área de la región 381357 ha (dato de Tabla 1c) y en 1976 era 381357 ha menos 34606 ha (dato de Tabla 1b) de cultivo de aguacate. No consideraron que pudiera haber extensión territorial ocupada por pobladores o bien por otro tipo de cultivos.

Tabla 1. Organización de datos propuesta por los integrantes del equipo M. Se transcribió el contenido de las tablas para una mejor visibilidad

Año	Pérdida
1976-2005 **2000-2005** **2005-2006**	20032 ha 509 por año 600 a 1000

(a)

Año	Ha cultivadas con aguacate
1976 **1991** **2000** **2006**	34606 ha 41997 ha 55627 ha 67181 ha

(b)

Año	Extensión total de área de la región	hectáreas de bosque
2014	381357	147744

(c)

Tabla 2. Análisis de la situación del año 2005 al 2017. Se transcribió el contenido de la tabla para una mejor visibilidad

Año	Pérdida	Bosque
2005	20032	
2006	20541	
2007	21050	
2008	21559	
2009	22068	
2010	22577	
2011	23086	
2012	23595	
2013	24104	
2014	24613	147744
2015	25122	147235
2016	25631	146726
2017	26140	146217
2027	31230	141127

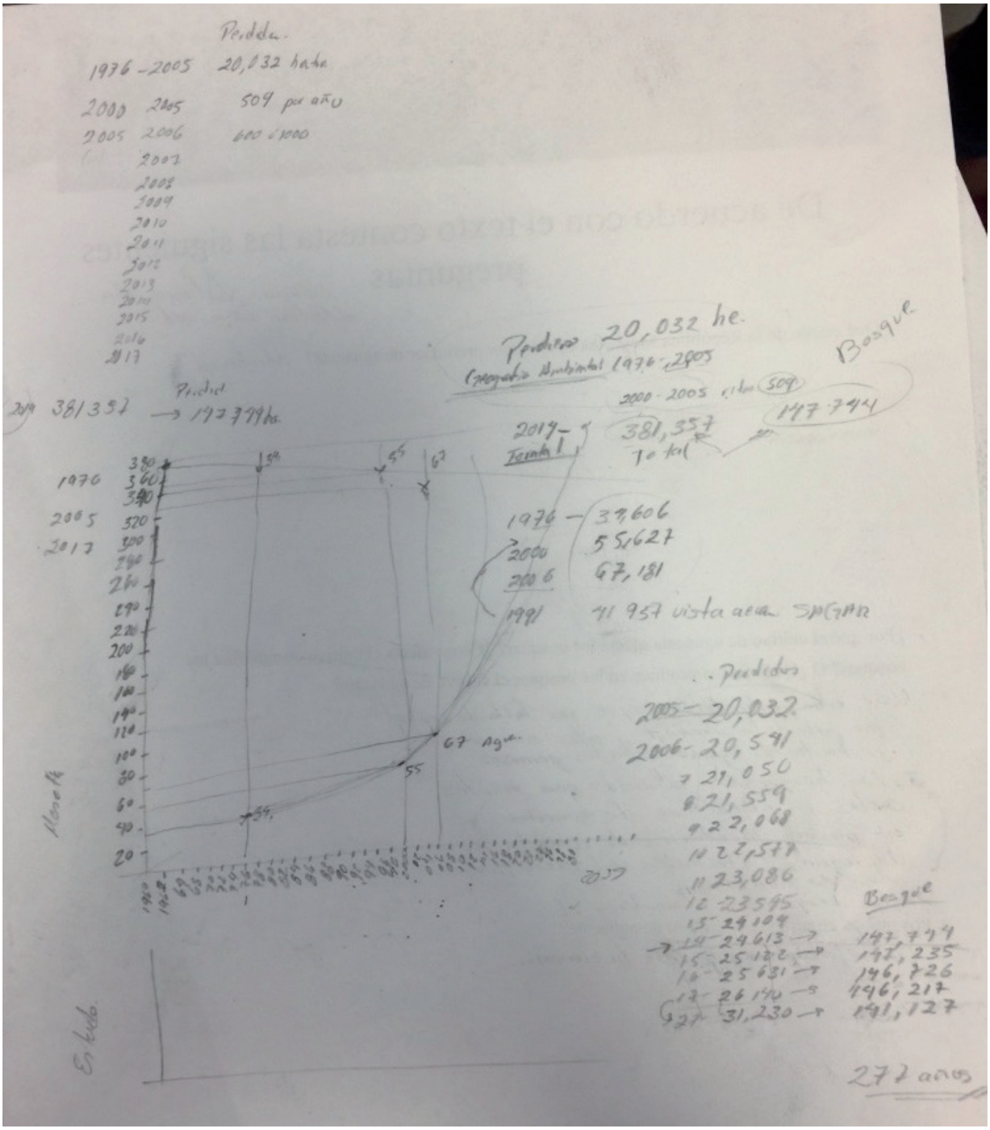


Figura 5. Gráfica elaborada por los integrantes del equipo M.

4.2.3. Modelo de la pareja P

La pareja P de profesores identificó datos e incógnitas, pero su forma de pensar, quizá influenciada por una enseñanza-aprendizaje tradicional, le condujo a considerar que el problema no podía resolverse, porque la información no era precisa para establecer una relación entre las hectáreas de bosque de la meseta purépecha y el tiempo. No logró seleccionar ni relacionar los datos, formular hipótesis y tomar decisiones para resolver el problema. Esta pareja de profesores no consideró que pensar matemáticamente va más allá de hacer cálculos, también es importante la estimación.

- P2: Quisimos hacer eso [una tabla de datos] tratando de sacar un ritmo de deforestación, pero no pude hacerlo, no pude. Al leerlo, los datos que me daban [los datos incluidos en la carta] no coinciden.

4.2.4. Reflexiones

Los profesores se involucraron en la necesidad de analizar y describir el fenómeno de deforestación. Tuvieron que relacionar cantidades para interpretar la situación, así como utilizar representaciones para comunicar sus descripciones y predicciones.

En los modelos de los equipos M y N se nota la identificación de patrones y procesos de generalización. En la carta del equipo N, aparecen procedimientos aritméticos seguidos por una identificación de patrones y formalización de estos. Generalizaron la relación mediante una expresión algebraica, la cual denota un buen manejo de conceptos matemáticos como funciones lineales, variables, ecuaciones lineales, incógnitas y solución. En el equipo M se observó algo similar, excepto que ellos procedieron con el uso de representaciones aritméticas y gráficas. Ambos equipos mostraron habilidades para identificar información, discernirla, organizarla, hacer conjeturas, tomar decisiones y evaluarlas durante el proceso de solución. Sin embargo, los equipos M y N olvidaron que en la hoja cuatro del problema se les pedía la escritura de una carta con la descripción de un procedimiento; por lo tanto, debían justificar por escrito las hipótesis o supuestos de los que partieron para construir el modelo.

Los comentarios del equipo P son característicos de lo que hemos observado en el aula, desde nuestra experiencia (Vargas-Alejo, Cristóbal-Escalante, y Carmona, 2018), cuando se resuelve una actividad provocadora de modelos. Uno de los equipos del grupo, usualmente no considera el proceso de estimación como método válido para resolver un problema. Esto posiblemente se relaciona con experiencias pasadas, relacionadas con formas de aprendizaje tradicionales.

4.3. Principio de la autoevaluación y reutilización del modelo

Durante el trabajo en equipo, pero sobre todo en la Fase 3 de discusión grupal, los profesores evaluaron sus modelos e identificaron si sus respuestas necesitaban mejorarse, o requerían refinarse o ampliarse (*Principio de la autoevaluación*) en términos de dar solución al problema de la deforestación (APM1). Esto se observa en el siguiente extracto del equipo M, quien había considerado que en 40 años se acabaría el bosque.

- M1: le digo… falta de tiempo para ir acomodando los datos para las respuestas que nos pedían, pero…
- I: y es que lo están haciendo también a mano [se refería al proceso de graficación]
- M1: si manual, y pues son información [sic] diferente [se refiere a los datos de la Tabla 4: crecimiento de hectáreas de cultivo de aguacate y decrecimiento de

hectáreas de bosque]… y ya después, esto en base, ya más clara la información, otra vez volver a hacer un análisis, volver a graficar la información; una y otra, una sube y una baja [se refiere a las gráficas que muestran cómo crece la cantidad de hectáreas de cultivo de aguacate y cómo decrece la cantidad de hectáreas de bosque, Figura 5]

Durante la discusión grupal de presentación de modelos, los ocho profesores determinaron que bajo ciertas condiciones los dos modelos construidos podían utilizarse y adecuarse. Esto puede observarse en el siguiente extracto tomado del audio de un integrante del equipo N.

- N1: Pero… lo que les digo es… no es una realidad, sino es, una adaptación para resolver y darnos una idea [se refería al modelo lineal construido, Figura 3]. Si nos vamos a la realidad, no… muy pocas veces es un modelo lineal, son exponenciales, pero con los datos que tenemos, no podemos manejar un modelo exponencial. ¿Si?

El profesor N1 identificó que el modelo lineal podía utilizarse para aplicarse a otras situaciones (*Principio de la reutilización*) y, por lo tanto, para resolver una familia de problemas cuya estructura fuera similar. Incluso, consideró que el proceso de estimar era una forma de pensamiento transferible, transportable y reutilizable. Esto puede observarse en el siguiente extracto tomado del audio del docente N1.

- N1: Yo lo que quería comentar es que… que a diferencia… Pues yo me fui luego, luego, al modelo lineal porque yo hice una actividad con mis grupos muy similar a esta. La que te comentaba. Este… la basura que se está produciendo ¿cuántas toneladas se están produciendo al año? Y ¿cuántas se van a producir en 10, 20 años? Entonces yo chequé que con la información que se tiene, no se puede hacer una… un modelo exponencial, ¿si?, es uno lineal; no es bueno a largo plazo, es cierto. Pero nos da una buena idea. Entonces los chicos con los que trabajé se quedaron con un aprendizaje significativo

Con excepción del profesor N1 (como puede observarse a continuación), el grupo no mencionó de manera explícita que el modelo podía ser un prototipo útil para interpretar otras situaciones, inclusive más complejas..

- N1: Entonces… en realidad hay muchos datos más, muchos parámetros, muchas variables que no estamos considerando por los cuales la deforestación va aumentando…

En su intervención se observa que de tener más información, la consideraría en su modelo, el cual ampliaría o modificaría (*Principio de la generalización del modelo*).

4.3.1. Reflexiones

En esta Fase 3 se observó, tal como lo menciona la *PMM* (Lesh y Doerr, 2003), que la comunicación de modelos e interacción social apoyó la construcción, modificación, ampliación y refinamiento de ideas de todos los equipos. Algo importante de resaltar es que aunque varios profesores llevaban equipo de cómputo, no hicieron uso de hojas de cálculo, ni de graficadores.

4.4. Refinamiento de formas de pensar

En la Fase 4, de resolución del problema en forma individual, sólo seis docentes entregaron su carta. Tres profesores expresaron a Yuri en sus cartas individuales que el modelo más adecuado para describir el comportamiento de la situación, a partir de los datos contenidos en el problema, era un modelo lineal (dos docentes pertenecían al equipo N y uno a la pareja P). El profesor M3 escribió que era complicado elaborar un modelo a partir de los datos (se refería al hecho de construirlo con precisión) y los docentes M1 y M2 mencionaron que el modelo exponencial era el más adecuado. Todos sin excepción comentaron que el bosque indudablemente desaparecería, pero que a partir de los datos contenidos en el problema no se sabía, de manera exacta, cuándo. Acordaron que podían usar la estimación para proponer respuestas, aunque seguían con la idea de tener datos precisos para ofrecer un modelo adecuado.

4.4.1. Reflexiones

Se notaron cambios en las formas de pensar de los profesores con respecto a la posibilidad de crear modelos, a partir de la estimación, para resolver la problemática. 80% de los docentes manifestaron que no estaban acostumbrados a realizar este tipo de actividades, menos aún a usarlas en el aula. En general, solían resolver problemas típicos de los libros de texto en sus clases, lo cual podían modificar a partir de esta experiencia para involucrar este tipo de situaciones.

5. REFLEXIONES FINALES Y CONCLUSIONES

Las preguntas planteadas inicialmente: ¿Cumple la actividad con los principios de diseño de una APM? ¿Qué significa que cumpla con ellos? ¿Qué formas de pensar o modelos emergieron al realizarla? ¿Qué conocimientos, conceptos y habilidades matemáticas utilizaron los docentes? ¿Es posible observar el surgimiento, modificación, ampliación y refinamiento de estas formas de pensar? pueden responderse de la siguiente manera.

Encontramos evidencia de que la APM1 satisface cabalmente con cinco de los seis principios establecidos: *principio de la realidad*, *principio de la construcción del modelo*, *principio de la autoevaluación, principio de documentación del modelo, principio de la reutilización del modelo*. La APM1 permitió revelar explícitamente lo que pensaban los profesores acerca de la situación durante todo el proceso de solución del problema. Es decir, durante proporcionó información para identificar el sistema conceptual y su evolución. Promovió la ampliación y refinamiento del conocimiento y habilidades matemáticas de los docentes, al involucrarlos en las tareas de elección de datos, variables, discriminación, organización de la información y uso de la estimación.

Los modelos que surgieron fueron lineales y exponenciales. Los profesores identificaron y utilizaron en sus modelos conceptos matemáticos como variación, ecuación, incógnita y función (lineal y exponencial), pero además, utilizaron y validaron las habilidades de generación de conjeturas, hipótesis, estimación y toma de decisiones para construir modelos. Los profesores discutieron la diferencia que implicaba el uso de distintos modelos en la predicción del fenómeno analizado; en este caso el de deforestación. Tuvieron conflictos con sus percepciones tradicionales de resolución de problemas rutinarios en el aula, donde basta el uso de algún algoritmo o procedimiento para encontrar soluciones. Sin embargo, el trabajo en equipo y la discusión grupal les permitió modificar, extender y refinar sus formas de pensar.

Una tarea pendiente de incluir en el proyecto de investigación es promover el uso de la tecnología para extender y refinar los modelos que emergieron para resolver la APM1. El uso de software como GeoGebra podría apoyar la construcción de modelos que fueran reutilizables, transferibles y fáciles de modificar para crear nuevos escenarios (*principio de la generalización del modelo*) o bien para analizar situaciones similares con datos distintos u otras condiciones iniciales. El carácter dinámico del software podría apoyar la profundización y análisis de conceptos como variación en modelos lineales y exponenciales.

AGRADECIMIENTO

Agradecemos a la Secretaría de Educación Pública, por el apoyo brindado para la realización de este trabajo a través del proyecto PRODEP: UDG-PTC-1377.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ärlebäck, J. B., Doerr, H., & O’Neil, A. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(4), 314-336.

Comisión Forestal del Estado de Michoacán (2014). *Inventario estatal forestal y de suelos Michoacán de Ocampo 2014.* Morelia: Gobierno del Estado de Michoacán.

Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. En C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Doerr, H. M. & Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 125-140). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1996). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Traducción de uso interno realizada por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, IPN, México. Título original Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65, IREM de Stramburgo, 1993.

Greenpeace (2017). Meseta purépecha, Michoacán: bosques convertidos en aguacate. Recuperado el 15 de agosto de 2017 del sitio de internet de Greanpeace: http://www.greenpeace.org/mexico/es/Campanas/Bosques/Geografiade-la-deforestacion/Michoacan/

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2017). *La producción forestal en la Meseta Purépecha en el estado de Michoacán.* Recuperado de http://internet.contenidos.inegi.org.mx/contenidos/productos/prod_serv/contenidos/espanol/bvinegi/productos/historicos/380/702825118310/702825118310_1.pdf

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38 (3), 302-303.

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(2), 16-48.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind in which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 205-226.

Lesh, R. Cramer, K. Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewsky, J. S. (2003). Model development sequences. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-59). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Yoon, C., & Zawojewski, J. S. (2007). John Dewey revisited: making mathematics practical versus making practice mathematical. En R. A. Lesh, E. Hamilton, & J. J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 315-348). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics.* Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Yanagimoto, A. & Yoshimura, N. (2013). Mathematical modelling of a real-world problem: the decreasing number of bluefin tuna. En G. Kaiser & G. Stillman (Eds.), *Teaching Mathematical Modeling: Conectting to Research and practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling series* (pp. 229-239). Dordrecht: Springer.

Vargas-Alejo, V., Cristóbal-Escalante, C., & Carmona, G. (2018). Competencias Matemáticas a través de la implementación de actividades reveladoras de pensamiento. *Educación Matemática, 30*(1), 213-236.