Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2017, nº 97, 7-22

Límite infinito de sucesiones y divergencia

Mónica Arnal
Universidad Rey Juan Carlos (España)

Javier Claros
Universidad Complutense de Madrid (España)

Mª Teresa Sánchez
Universidad de Málaga (España)

Miguel Ángel Baeza
Universidad Complutense de Madrid (España)

Resumen: *En este documento se muestran las dificultades para seleccionar una definición de límite infinito de sucesiones entre profesores. Estas dificultades están propiciadas por el efecto que el término divergencia ocasiona en dichas definiciones. Las dificultades, mostradas a través de una consulta a expertos, están presentes tanto en profesores como en autores de libros de texto y en este documento se muestran ejemplos de las mismas. Se aporta además una nueva acepción de sucesión divergente y se prepara el camino para un estudio posterior de la definición seleccionada.*
Palabras clave: *Sucesión, Límite, Infinito, Divergencia, Profesores, Libros de texto*

Infinite limit of sequences and divergence

Abstract: *In this paper we show the difficulties in choosing a definition for the infinite limit of sequences among teachers. These difficulties are caused by the effect that the divergence term causes in these definitions. The difficulties, shown after an expert consult, are present both in teachers and books authors and, in this document, examples about these difficulties are given. We also provide a new meaning for divergent sequence and we clear the path for the subsequent phenomenological study of the chosen definition.*
Keywords: *Sequence, Limit, Infinite, Divergence, Teachers, Schoolbook*

1. INTRODUCCIÓN

En el presente artículo mostramos la falta de homogeneidad en la definición del término "divergencia". El resultado obtenido a partir de la realización de dos cuestionarios, realizados a matemáticos en el que se buscaba una definición correcta y aceptada por la comunidad matemática del límite infinito de una sucesión, muestra la diversidad de acepciones del término divergencia entre los encuestados y las dificultades que esto origina para la selección de la citada definición.

El documento se compone de seis apartados. En el primero realizamos una introducción y presentación de los objetivos del presente documento. En el segundo, denominado antecedentes, realizamos una selección de autores que han realizado investigaciones del límite de una sucesión y del concepto de divergencia, desde una perspectiva didáctica. El tercer apartado, llamado primer cuestionario a expertos (en adelante Cuestionario 1), lo dedicaremos a presentar y analizar los resultados obtenidos en un cuestionario a profesores de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad. En dicho cuestionario presentamos 6 definiciones del límite infinito de sucesiones, obtenidas de manuales universitarios, con el fin de detectar las dificultades y discrepancias de notación y definición empleados, que pudiesen dificultar la selección de la definición buscada. Además, señalaremos la influencia que el uso del término divergencia tiene en la selección de la definición de límite infinito. En el cuarto apartado, denominado divergencia en libros de texto, analizaremos algunas definiciones de diferentes autores y como algunas de ellas son presentadas en los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad comprendidos entre los años 1969 y 2016. En el quinto apartado, denominado segundo cuestionario a expertos (en adelante Cuestionario 2), repetimos las acciones realizadas en el Cuestionario 1 pero obviando el término divergencia para que no interfiriese en el resultado final de nuestro formulario. Dicho cuestionario se compuso de 5 definiciones obtenidas de manuales universitarios y libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. En el último apartado expondremos las conclusiones y perspectivas futuras.

En los Anexos I y II se encuentran los dos cuestionarios enviados a los expertos, y en el Anexo III las puntuaciones obtenidas por cada una de las definiciones en ambos cuestionarios.

Los objetivos de este artículo son los siguientes:

1. Seleccionar una definición de límite infinito de una sucesión para un posterior estudio.
2. Mostrar las dificultades en la uniformidad sobre la noción de divergencia en los profesores cuando trabajan con sucesiones con límite infinito.
3. Señalar las dificultades que tienen los autores de manuales universitarios y de libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato para adoptar una definición común sobre el término divergencia, cuando éste es usado en sucesiones con límite infinito.

2. ANTECEDENTES

Esta investigación comienza con el estudio de las dificultades puestas de manifiesto en el aula sobre la noción de límite infinito de sucesiones en nuestra experiencia como docentes, así como con la definición de divergencia y las clasificaciones que se dan de las sucesiones con límite infinito, categorizadas de manera diferente según algunos de los autores de libros de textos de matemáticas y manuales universitarios que hemos consultado (véase Rey Pastor, 1969; Spivak, 1975; Pozniak, 2000).

Son muchos los autores que se han ocupado del estudio del límite y del infinito, señalando sobre todo las dificultades en torno a su comprensión. Del estudio del límite destacamos los trabajos realizados por Davis y Vinner (1986), Sierpinska (1990), Mamona-Downs (2001), Sacristán (2003), Hitt (2003) y Morales et al. (2013). Mientras, del estudio del infinito destacamos los trabajos realizados por Salat (2011) y Belmonte y Sierra (2011).

Según Morales et al. (2013) el concepto de límite tiene un papel muy importante en la comprensión de la mayor parte del contenido de las áreas de Cálculo y de Análisis Matemático. Identifican y caracterizan las dificultades en torno al concepto de límite infinito que desarrollan los estudiantes cuando lo analizan y lo interpretan en distintas representaciones. Además, observan que la mayoría de las investigaciones llevadas a cabo han estado centradas en el límite finito, ante escasos estudios de límite infinito. Consideran que es fundamental investigar sobre cada límite de manera particular. En el caso que nos ocupa, señalamos por lo tanto la importancia de estudiar el límite infinito de sucesiones.

En el límite infinito sobresale la dificultad del concepto de infinito el cual es necesario comprender para poder asimilar el límite infinito de una sucesión. Es la teoría APOS, comenzada por Dubinsky en 1991, la que realiza la primera investigación del desarrollo de la comprensión de los estudiantes del concepto matemático de infinito, apoyándose en el estudio de los esquemas. Dependiendo de la edad del alumno, el concepto matemático de infinito es interpretado de distinta forma. La teoría APOS, según Weller et al. (2004), puede proporcionar una explicación de cómo las personas conciben el infinito. Este es el primer paso hacia el desarrollo de estrategias pedagógicas destinadas a ayudar a los estudiantes a comprender y aplicar los tipos de transformaciones necesarias para la solución de varios problemas que involucran al infinito.

Núñez (1993) se ocupó del estudio de la construcción de los procesos infinitos por los niños de 9 a 14 años, todos en términos de infinito potencial, razón por la que afirma que el infinito actual no se plantea antes de cumplir los 15 años.

Hitt (2003) señaló la necesidad de iniciar una discusión entre profesores de secundaria acerca del infinito potencial y el infinito actual, debido a la necesidad de introducir conceptos que involucran ambos términos. En nuestro caso, en el límite infinito de sucesiones se encuentran presentes ambos infinitos pero es este último el que presenta más dificultades y es por lo tanto en el que más debemos incidir cuando se trabaje con los alumnos.

Este concepto de infinito actual fue señalado por Hauchart y Rouche (1987) quienes encontraron que estudiantes de 12 a 18 años parecían tener un concepto de infinito actual, cuando trabajaban el concepto de límite, tanto en sucesiones como en series infinitas.

Además del punto de vista del alumno, el concepto de límite se ha abordado desde el punto de vista del profesor. En este caso señalamos el trabajo de Espinosa y Azcárate (2000) en el que se analiza la labor de dos profesores cuando tienen que enseñar el concepto de límite o el trabajo de Sánchez (2012) la cual realiza perfiles fenomenológicos de los profesores dependiendo de los fenómenos que usan estos cuando tienen que enseñar el límite finito de una función en un punto.

Tras abordar las investigaciones previas, nos ocupamos de la selección de una definición de límite infinito de una sucesión para un posterior estudio, tal y como ya hiciesen Claros (2010) y Sánchez (2012) en la elección de una definición, correcta y aceptada por la comunidad matemática, del límite finito de una sucesión y del límite finito de una función en un punto respectivamente. Esta selección es abordaba a través de una consulta a expertos, un instrumento útil de recogida de datos como ya se señaló en Claros, Sánchez y Coriat (2013).

Para la realización de dicha consulta a expertos tomamos como referencia los manuales de análisis más conocidos, como son: Spivak (1975), Bartle (2000), Pozniak (2000), Rey Pastor (1969) y Pestana (2007).

3. PRIMER CUESTIONARIO A EXPERTOS

En la búsqueda por encontrar la definición más aceptada por la comunidad matemática sobre el límite infinito de una sucesión, realizamos un cuestionario a expertos en educación matemática (Ver Anexo I). La muestra estuvo formada por 5 profesores de Educación Secundaria y Bachillerato y 4 profesores universitarios, todos ellos con entre 5 y 35 años de experiencia docente. Cada profesor debía atribuir el orden de idoneidad a las 6 definiciones propuestas: un “1” en la que considerase más adecuada desde un punto de vista matemático, un “2” a la que siga en adecuación, etc., hasta llegar al “6”, que se reservaría para la menos adecuada. Además, debía atribuir un “0” a las redacciones que no pudieran considerarse como definiciones o no fueran adecuadas.

El primer cuestionario estuvo formado por las definiciones dadas por los siguientes autores en manuales universitarios: Bradley G.L. y Smith K.L. (1998), Díaz Moreno J.M. (1998), Baenas Tormo T., Martínez de Santiago C. (2007), Brinton Thomas G. (2005), definición con errata y Pestana D.,(2007). Todas ellas se pueden encontrar en el anexo I, donde aparece completo el Cuestionario 1.

Durante el análisis se observó que las definiciones donde se encontraba el término divergente o divergencia, distorsionaban el orden de selección por parte del profesorado, llegando a obtener una misma definición el valor “1”, en el caso de que el profesor estuviese de acuerdo con el significado otorgado a la divergencia, o un “0 en el caso de considerarla errónea.

A cada profesor se le atribuyó el nombre de Experto y se le acompaño de la expresión “x.1”, donde “x” es un número del 1 al 9, donde cada uno representa uno de los 9 profesores de la muestra y “1” en referencia a que nos encontramos en los resultados del Cuestionario 1. Utilizamos esta nomenclatura para preservar el anonimato del experto durante todo el análisis de datos.

Mostramos a continuación algunas de las respuestas textuales a una de las definiciones del Cuestionario 1, donde se observa la dificultad con el término divergente.

Experto 1.1: ¿$a_n \in \mathbb{R}$?¿$n \in \mathbb{N}$? Considera que es redundante la afirmación:”En tal caso también se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es divergente”(ver figura 1).

Diremos que $\{a_n\}$ tiene por límite $+\infty$, o que $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$, y lo representaremos mediante $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / a_n > M\ \forall n \geq n_0$. En tal caso también se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es divergente.

Figura 1. Fragmento Baenas Tormo T., Martínez de Santiago C. (2007).

Experto 3.1: “El termino divergente es ambiguo, ¿cómo se denomina a $\{x_n\}$ si $\lim\limits_{n\to-\infty} a_n = -\infty$?”

Experto 4.1: “Que sea divergente no es lo mismo que el limite sea +∞”.

Mientras que para unos expertos la definición es redundante, para otros el término divergente es ambiguo o erróneo. Esto lleva a distorsionar los resultados finales del Cuestionario 1, donde la aceptación o no del término divergente implica la aceptación o no de la definición del límite infinito, sin considerar la verdadera adecuación de dicha definición que es verdaderamente lo que nos preocupaba.

Dada la falta de uniformidad que encontramos en las respuestas dadas por los profesores en las respuestas al Cuestionario 1, debido sobre todo a las dificultades con el término divergencia que aparecía en algunas definiciones presentadas, decidimos buscar la definición de dicho término en libros de texto y manuales universitarios con el fin de añadirla a un nuevo cuestionario que debería eliminar todo atisbo de dudas en el profesorado.

4. DIVERGENCIA EN LIBROS DE TEXTO

En la búsqueda de la definición de divergencia seleccionamos 5 autores de manuales universitarios que definían el término divergencia o sucesión divergente: Spivak (1975), Bartle (2000), Pozniak (2000), Rey Pastor (1969) y Pestana (2007), así como los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de González, Llorente y Ruiz (1995), Cólera, Oliveira, García y Santaella (2008), Vizmanos y Anzola (2003), Vizmanos, Hernández, Alcaide, Moreno y Serrrano (2011).

En Spivak (1975, p.553) y Bartle (2000, p.54) se definía como una sucesión divergente a la que no es convergente. Previamente el autor había definido como sucesión convergente aquellas que tenían límite finito. En este caso, serían sucesiones divergentes tanto las sucesiones de límite infinito, como aquellas que carecen de límite. Mostramos, a modo de ejemplo, un fragmento escaneado extraído de libro de Bartle (2000) que refleja lo anteriormente expuesto (figura 2):

Para las sucesiones que nos ocupan, las de límite infinito, estas no serán consideradas por Bartle como sucesiones con límite, es decir convergentes, y, por tanto, las clasificará como divergentes (figura 3).

Otra definición de convergencia, es la del matemático Pozniak (1982,p. 54), que admite que una sucesión de límite infinito pueda tener límite, y, por consiguiente, ser

3.1.3 Definition A sequence $X = (x_n)$ in $\mathbb{R}$ is said to **converge** to $x \in \mathbb{R}$, or x is said to be a **limit** of (x_n), if for every $\varepsilon > 0$ there exists a natural number $K(\varepsilon)$ such that for all $n \geq K(\varepsilon)$, the terms x_n satisfy $|x_n - x| < \varepsilon$.

If a sequence has a limit, we say that the sequence is **convergent**; if it has no limit, we say that the sequence is **divergent**.

Figura 2. Fragmento Bartle (2000, p.54).

3.2.8 Examples **(a)** The sequence (n) is divergent.

(b) The sequence $((-1)^n)$ is divergent.

If n is an odd natural number with $n \geq K_1$, this gives $|-1-a| < 1$, so that $-2 < a < 0$. (Why?) On the other hand, if n is an even natural number with $n \geq K_1$, this inequality gives $|1-a| < 1$ so that $0 < a < 2$. Since a cannot satisfy both of these inequalities, the hypothesis that X is convergent leads to a contradiction. Therefore the sequence X is divergent.

Figura 3. Fragmentos Bartle (2000, p.64).

***) Notemos que las sucesiones infinitas se denominan a veces sucesiones convergentes hacia el infinito. Por eso, si la sucesión $\{x_n\}$ es infinita, se escribe simbólicamente así:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Si los elementos de la sucesión infinita tienen, partiendo de un número, un signo determinado, se dice que la sucesión $\{x\ \}$ converge hacia el infinito de signo determinado. Esto se escribe simbólicamente del modo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Figura 4. Fragmento Pozniak (2000, p.58).

convergente. Según este autor las sucesiones de límite finito son sucesiones convergentes y las sucesiones de límite infinito (+∞ ó –∞) son convergentes a infinito de signo determinado (figura 4).

Mostramos a continuación un ejemplo de sucesión convergente a infinito de Juan Carlos Gorostizaga dado que en Pozniak (2000) la definición no viene acompañada de ningún ejemplo (figura 5).

Pozniak no aclara que ocurre con la sucesión $x_n = (-1)^n \cdot n$, pero dada su definición de sucesiones convergentes hacia el infinito parece que ésta quedaría clasificada como tal.

Una tercera acepción de convergente y divergente es la de sucesión oscilante, propuesta por Rey Pastor (1969, pp.274-275).

Sucesión convergente a infinito:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = +\infty \quad \rightarrow \quad \forall A > 0 \;\; \exists p \in N \quad , x_n > A$

Es decir, los términos de la sucesión (para valores de n altos) pertenecen al entorno de infinito.

Como ejemplo considérese la sucesión de números pares:

(2 n) = 2, 4, 6, 8, 10, ..., 10000000, ...

Figura 5. Fragmento web Juan Carlos Gorostizaga (Manual Escuela Técnica Superior de Náutica y Máquinas Navales).

Ejemplo 2: La sucesión oscilante $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots,$

Figura 6. Fragmento Rey Pastor (1969, p.277).

Algunos autores llaman divergentes a las sucesiones no convergentes a un límite finito. Nosotros seguiremos la nomenclatura más precisa que hemos expuesto.

Figura 7. Fragmento Rey Pastor (1969, p.275).

Pastor considera que con esta tercera categoría, las sucesiones oscilantes, soluciona uno de los problemas que tenían Bartle y Pozniak con algunas sucesiones. Para él son convergentes las sucesiones que tienen límite finito, divergentes las que tienen límite infinito (+∞ ó –∞) y oscilantes las que carecen de límite finito e infinito (figura 6).

El autor hace alusión a otras definiciones, que hemos presentado anteriormente (figura 7).

Con la nueva definición de convergente, divergente y oscilante, nos realizamos la siguiente pregunta ¿la sucesión $x_n = (-1)^n \cdot n$ es convergente, divergente u oscilante?

Considerando que la sucesión $x_n = (-1)^n \cdot n$ no tiene límite finito, ni infinito, Rey Pastor desecharía la clasificación de Pozniak, ya que $x_n = (-1)^n \cdot n$ no tiene límite finito, y por tanto no es convergente y desecharía la clasificación de Bartle de considerarla divergente ya que no tiende infinito.

Pese a su definición de divergencia, para Rey Pastor la sucesión $x_n = (-1)^n \cdot n$ es divergente por tener límite infinito (figura 8).

Pastor considera más infinito y menos infinito como infinito, de ahí la ambigüedad que pueda existir entre divergente y oscilante en alguna de las sucesiones.

diremos que tie-
ne *límite infinito*, y escribiremos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{o bien:} \quad a_n \to \infty,$$

EJEMPLO 6:

$$\frac{5}{1}, \frac{2}{2}, -\frac{3}{3}, -\frac{10}{4}, -\frac{19}{5}, \ldots, \frac{6-n^2}{n}, \ldots; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{6-n^2}{n} = -\infty$$

$$\frac{7}{1}, \frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \frac{22}{4}, \frac{31}{5}, \ldots, \frac{6+n^2}{n}, \ldots; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{6+n^2}{n} = +\infty.$$

$$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32, \ldots, (-2)^n, \ldots; \quad \lim_{n\to\infty} (-2)^n = \infty.$$

Figura 8. Fragmentos Rey Pastor (1969, p.274).

Definición 15.3. *Decimos que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > M$, si $n > N$. Decim que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{R}$ tal que $a_n < M$, si $n > N$.

Figura 9. Fragmento Pestana (2007, p.436).

A estas diferentes acepciones del término divergencia que hemos encontrado tenemos que sumar una más dada por Pestana (2007, pp.435-436). Este autor propone una nueva definición de sucesión divergente, basada en la definición de Rey Pastor y que es actualmente muy utilizada en los libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato.

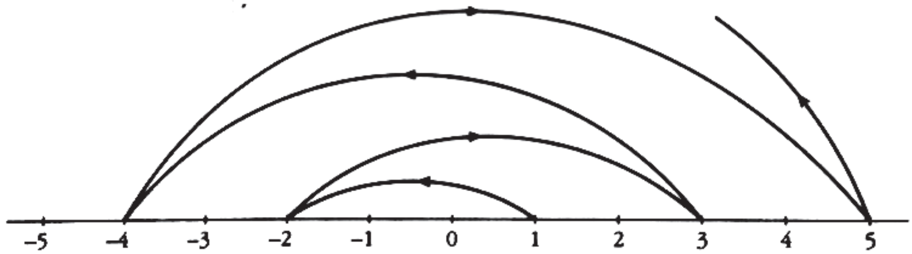
Una sucesión es divergente cuando no se acerca a ningún punto finito. Para evitar dudas de la no existencia del límite añade que una sucesión que diverge puede que tenga límite infinito o menos infinito, aclarando, además, ambos términos (figura 9).

Idéntica definición toman algunos libros de texto de Bachillerato, (Colera J., Oliveira M.J., García R., Santaella E., 2009,p.58, Ed. Anaya), (Avellanas L., García J.C., Martínez C. ,1996, p.256, Ed. McGraw Hill), (Anzola M., Vizmanos J.R., 2003, p.178, Ed. SM) (figura 10).

Diremos que $+\infty$ ($-\infty$) es punto de acumulación de una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ si hay términos positivos (negativos) arbitrariamente grandes (pequeños), es decir, si para todo $M > 0$, por grande que sea, hay términos $a_n > M$ ($tt> -M$). (Avellanas L., García J.C., Martínez C., McGraw Hill 1996, p.256)

La sucesión siguiente

$1, \; -2, \; 3, \; -4, \; 5, \; -6, \; 7, \; -8, \; \ldots, \; a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$



no se acerca a ningún número, ni tiende a $+\infty$ (porque los términos pares son negativos) ni a $-\infty$ (porque los términos impares son positivos). Por tanto, no tiene límite.

Hay muchas sucesiones que no tienen límite finito ni infinito (a veces se las llama *sucesiones oscilantes*).

Figura 10. Fragmento Colera J., Oliveira M.J., García R., Santaella E. (2009, p.58, Ed. Anaya).

8 Marcando en la recta real varios términos de las siguientes sucesiones, comprenderás por qué decimos que «oscilan» entre sus puntos de acumulación.

(a) $-1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$, con $a_n = (-1)^n$ tiene dos puntos de acumulación: -1 y 1.

(b) $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots$ tiene puntos de acumulación 0 y $+\infty$.

(c) $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \ldots$ tiene puntos de acumulación $+\infty$ y $-\infty$.

Figura 11. Fragmento Avellanas L., García J.C., Martínez C. (McGraw Hill 1996, p.256).

Llamar puntos a $+\infty$ y $-\infty$, como utiliza este libro de texto, es un abuso del lenguaje. Pese a que en algunos países y algunos manuales españoles los llaman puntos de la recta real completa, nosotros los consideraremos de la forma estándar, es decir que no serán puntos de la recta real.

A continuación resumimos todas las posibles definiciones de divergencia matemática encontradas, en cuatro diferentes acepciones y añadimos la que consideraremos de aquí en adelante en nuestra investigación (Arnal, Claros, Sánchez y Baeza). Las sucesiones de límite finito las consideraremos convergentes, al igual que lo hacen todos los autores estudiados.

Tabla 1. Definiciones de divergencia

	$X_n=1/n$	$X_n=n$	$X_n=(-1)^n\cdot n$	$X_n=(-1)^n$
Bartle	Convergente	Divergente	Divergente	Divergente
Pozniak	Convergente	Convergente a infinito de signo determinado	Convergente a infinito	Divergente
Rey Pastor	Convergente	Divergente	Oscilante/divergente	Oscilante
Pestana	Convergente	Divergente	Oscilante	Oscilante
Arnal-Claros-Sánchez-Baeza	Convergente	Divergente	Ni convergente, ni divergente	Ni convergente, ni divergente

Respecto a nuestra definición de divergencia señalamos lo siguiente:

- Las sucesiones de límite infinito ($+\infty$ ó $-\infty$), las clasificaremos como divergentes, al considerar que estas sucesiones sí tienen límite, pero este es infinito. Por tanto, la definición de una sucesión divergente buscada inicialmente será equivalente a la de límite infinito de una sucesión.
- Las que no tienen límite, no las consideraremos ni convergentes, ni divergentes.

No consideraremos en nuestro estudio los límites de las subsucesiones contenidas en la sucesión inicial, y por tanto no existirá su límite. Esta consideración ha sido tomada por el contexto en el que nos encontramos, siendo estos los límites estudiados en secundaria.

5. SEGUNDO CUESTIONARIO A EXPERTOS

Tras comprobar que el uso del término divergencia, en ninguna de sus acepciones ayudaría a la elección de la definición de límite infinito de una sucesión, y que las dificultades observadas en los profesores también se reproducían en los autores de libros de texto, decidimos eliminar dicho término del segundo cuestionario que elaboramos y que abordamos a continuación. (Ver Anexo II).

En el segundo cuestionario que se elaboró se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se buscaron en los libros de texto y manuales universitarios definiciones que no empleaban el término divergencia,
- Se eliminaron las definiciones que habían sido rechazadas en el primer cuestionario.
- Se tomaron 5 definiciones de manera que hubiera una amplia variedad sobre las que los profesores pudieran elegir. Ver Anexo II.

La muestra a la que se administró el Cuestionario 2 estuvo formada por 5 profesores de Educación Secundaria y Bachillerato y 2 profesores universitarios. La forma de proceder para la evaluación de este cuestionario fue la misma que para el Cuestionario 1. Un "1" significaba que dicha definición era la más adecuada desde un punto de vista matemático, un "2" la que seguía en adecuación, etc., hasta llegar al "5", que se reservaría para la menos adecuada. Además, los expertos podían atribuir un "0" a aquellas definiciones que no consideraran adecuadas por algún motivo.

Para mantener el anonimato del profesorado, se asignó en este cuestionario la notación x.2, siendo "x" un número comprendido entre el 1 y el 7. Cada número correspondía a un experto que había participado en la realización del Cuestionario 2 y el "2" hacía referencia al cuestionario en el que estábamos trabajando.

Para obtener la puntuación total obtenida para cada definición invertimos el orden dado por cada experto, "1" lo cambiamos a "1", "2" a "1/2", "3" a "1/3", "4" a "1/4" y "5" a "1/5" y sumamos esta cantidad dada por todos los expertos. Todas las puntuaciones pueden encontrarse en el Anexo III.

Después de analizar los datos obtenidos al administrar el Cuestionario 2, pudo observarse que dos de las definiciones, Linés (1983) y Vizmanos et al. (2011), tenían una buena aceptación por parte de los profesores que conformaron la muestra. De hecho la diferencia de puntuación entre ambas definiciones es muy pequeña, así mientras una obtuvo 5 puntos la otra obtuvo 4+1/12. Esto unido al hecho de que lo libros de los diferentes periodos educativos comprendidos entre 1969 y 2016 usaran el sistema de representación verbal de manera preponderante y el sistema de representación simbólico apenas tuviese presencia en el límite infinito de sucesiones, tanto en definiciones, como en ejemplos, nos llevó a seleccionar como definición la de Linés (1983) frente a la de Vizmanos (2011).

Así alcanzamos nuestro objetivo de poder seleccionar una definición de límite infinito de sucesiones para abordar su posterior estudio. La definición seleccionada fue:

> "Sea K un cuerpo ordenado, y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de K. La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite "más infinito", si para cada elemento H de K, existe un número natural ν, tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq \nu$".

Pasamos a continuación a describir las conclusiones obtenidas así como las perspectivas futuras que nos proponemos abordar.

6. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

Después de la realización del Cuestionario 1, el Cuestionario 2 y el análisis de las definiciones de límite infinito de una sucesión y del término divergencia en libros de texto de secundaria y manuales universitarios podemos concluir lo siguiente:

No existe uniformidad en el término divergencia, tanto en profesores como en autores de libros de texto, y esto conlleva diferentes dificultades en su utilización. Se alcanza el objetivo 2 inicialmente planteado después del estudio realizado de los autores: Bartle, Pozniak, Rey Pastor y Pestana en el apartado 4.

Por este motivo se ha tenido que optar por las siguientes definiciones, para continuar nuestro estudio: una sucesión es divergente cuando tiene límite más infinito o menos infinito, una sucesión es convergente cuando tiene límite finito, y el resto de las sucesiones serán clasificadas como sucesiones ni convergentes, ni divergentes.

El empleo, al mismo tiempo de los términos sucesión divergente y límite infinito de sucesiones no facilita la comprensión de los mismos. Este hecho es constatado en profesores, a través del Cuestionario 1 en el que el uso del término divergencia distorsionó completamente la elección de la definición de límite infinito de sucesiones. Muestra de ello son algunos de los ejemplos mostrados en el aparado 3, alcanzando así el objetivo 3 propuesto.

Como consecuencia de esto nos vimos obligados a redactar un Cuestionario 2 que permitiera elegir una definición de límite infinito de sucesiones correcta y aceptada.

Finalmente, se ha seleccionado una definición de límite infinito de una sucesión, alcanzando el objetivo 1, después de observar que no todas las definiciones que aparecen o han aparecido en los libros de texto son aceptadas por los profesores. La definición considerada, después de dos cuestionarios corresponde a Linés (1983). Esta definición será la que nos permitirá continuar con las siguientes investigaciones.

Debemos indicar que entre las tareas de investigación pendientes se encuentra el análisis de las dificultades que los alumnos pueden presentar después de encontrar en sus libros de textos y en sus profesores, diferentes acepciones de sucesiones divergentes. Además el siguiente paso es realizar un estudio fenomenológico de la definición seleccionada siguiendo a Freudenthal (1983).

REFERENCIAS

Avellanas L., García J.C., Martínez C.(1996). Matemáticas 2º Bachillerato. Ed. McGraw Hill

Baenas Tormo T., Martinez de Santiago C. (2007). Cálculo de variable natural. Ed. Club Universiario.

Bartle, R.G.(2000). Introduction to Real Analysis. Ed. John Wiley & Sons

Belmonte J.L y Sierra M.(2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14.2, 139-171

Blázquez, S. (2000). Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En el futuro del cálculo infinitesimal. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Bradley G.L., Smith K.L. (1998). Cálculo de una variable. Ed. Prentice Hall

Brinton Thomas G. (2005). Cálculo. Ed. Pearson Education.

Claros, J. (2010). Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Claros, J., Sánchez, T. y Coriat,M. (2013).Sucesión convergente y sucesión de Cauchy: Equivalencia matemática y equivalencia fenomenológica. Enseñanza de las Ciencias. 31.2, 113-131

Colera J., Olivera M.J., Fernández S. (1997). 2º Bachillerato LOGSE. Ed. Anaya

Cólera, Oliveira, García y Santaella (2008).Matemáticas 1º Bachillerato. Ed. ANAYA

Davis, R. y Vinner, S.(1986). The notion of Limit: some semingly unavoidable misconception stages. Journal of Mathematics Behaviour, 5, 281-303

Díaz Moreno J.M. (1998). Introducción a la topología de los espacios métricos. Ed. Universidad de Cádiz.

Dubinsky et al.(2005). Some historial issues and paradoxes regardng the concept of infinity: an APOS analysis: Part 2. Studies in Mathematics, 60, 253-266.

Espinosa, L. y Azcárate, C.(2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "limite de función": propuesta metodológica para el análisis. Enseñanza de las Ciencias, 18.3, 355-368.

González,C., Llorente, J. y Ruiz, M.J. (1995). Matemáticas I. Ed. EDITEX.

Gorostizaga, J.C. Manual Escuela Técnica Superior de Náutica y Maquinas Navales.

Hauchart, C. y Rouche,N. (1987). Apprivoiser l'Infini, Ciaco.

Hitt, F.(2003). El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones en Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual. México D.F. Editorial Fondo Educativo Interamericano

Linés E. (1983). Principios de Análisis Matemático. Ed. Reverté

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical aproach for the understanding of the limit of a sequence. Educational Studies in Mathematics, 48, 259-288

Morales, A., Reyes, L.E., Hernández, J.C. (2013). El límite al infinito. Análisis preliminar para la elaboración de una estrategia metodológica de su enseñanza-aprendizaje. Revista Premisa. 15.3, 3-14

Nuñez, R. (1993). Approaching infinity: a view from cognitive psychology. Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education, 105-111.

Pestana,D. et al (2007).Curso práctico de Cálculo y Precálculo. Ed. Ariel Ciencia.

Pozniak, E. (2000). Fundamentos del Análisis Matemático. Ed. MIR.

Rey Pastor, J.(1969). Análisis Matemático. Ed. Kapelusz

Sacristán, A. (2003). Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional. Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual (pp.262-279). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-FCE.

Salat, R. (2011). El infinito en matemáticas. Números. Vol. 77, 75-83.

Sánchez, T. (2012). Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Sierpinska, A.(1990). Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics, vol 10.3, 24-36.

Spivak, M. (1975).Calculus. Barcelona. Ed. Reverté.

Vizmanos J.R. y Anzola, M. (2003) Matemáticas 4º E.S.O. Ed. SM.

Vizmanos J.R., Hernández J., Alcalde F., Moreno M., Serrano E. (2011). 2º Bachillerato. Ed. SM

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonad, M, Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. Notice of the AMS, 51, 741-750.

Zorich V.A. (2004) Mathematical Analysis I. Ed. Springer

ANEXO I[1]

DEFINICIONES	PUNTUACIÓN
Definición 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ significa que, para todo número real A, se verifica que $a_n > A$ para todo n suficientemente grande.	
Definición 2 Una sucesión real (x_n) es divergente y escribimos $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$ si para todo $k > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lvert x_n \rvert > k$ para todo $n \geq m$.	
Definición 3 Diremos que $\{a_n\}$tiene por límite $+\infty$, o que $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$, y lo representamos mediante $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid a_n > M, \forall n \geq n_0$. En tal caso también se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es divergente.	
Definición 4 La definición $\{a_n\}$ diverge a infinito si para todo número M existe un entero N tal que para todo n mayor que N, $a_n >$ M. Si se cumple esta condición, escribiremos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ o $a_n \to +\infty$.	
Definición 5 Escribimos $x_n \to +\infty$ y decimos que la sucesión $\{x_n\}$ tiende a $+\infty$ si para cada $c \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d\,(x_n\, c) > 0$ para todo $n > N$.	
Definición 6 Decimos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > M$ si $n > N$.	

1. Pese a no encontrarse en el primer cuestionario, señalamos las referencias bibliográficas de cada una de las definiciones.

Definición 1: Bradley G.L., Smith K.L. (1998). Cálculo de una variable. Ed. Prentice Hall

Definición 2: Díaz Moreno J.M. (1998). Introducción a la topología de los espacios métricos. Ed. Universidad de Cádiz

Definición 3: Baenas Tormo T., Martinez de Santiago C. (2007). Cálculo de variable natural. Ed. Club Universiario

Definición 4: Brinton Thomas G. (2005). Cálculo. Ed. Pearson Education

Definición 5: Zorich V.A. (2004) Mathematical Analysis I. Ed. Springer

La definición del cuestionario es una adaptación y traducción de Zorich (2004). En dicha definición aparecía x_n>c. Al copiar dicha definición se cometió una errata ya que se había sustituido x_n>c por d(x_n, c)>0

Definición 6: Pestana D., Rodriguez J.M., Romera E., Touris E., Alvarez V y Portilla A. (2000). Curso práctico de Cálculo y Precálculo. Barcelona. Arial Ciencia

ANEXO II[2]

DEFINICIONES	PUNTUACIÓN
Definición 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ significa que, para todo número real A, se verifica que $a_n > A$ para todo n suficientemente grande.	
Definición 2 Sea K un cuerpo ordenado, y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de K. La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite "más infinito", si para cada elemento H de K, existe un número natural ν, tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq \nu$.	
Definición 3 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ se puede encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0 \Rightarrow a_n > \mathrm{M}$	
Definición 4 El límite de una sucesión es ∞, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \infty \Leftrightarrow$ Podemos conseguir que s_n sea tan grande como queramos dándole a n valores suficientemente grandes.	
Definición 5 Decimos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si para todo $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ existe un $\mathrm{N} \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > M$ si $n > N$.	

2. Pese a no encontrarse en el segundo cuestionario, señalamos las referencias bibliográficas de cada una de las definiciones.

Definición 1: Bradley G.L., Smith K.L. (1998). *Cálculo de una variable*. Ed. Prentice Hall.

Definición 2: Linés E. (1983). *Principios de Análisis Matemático*. Ed. Reverté.

Definición 3: Vizmanos J.R., Hernández J., Alcalde F., Moreno M., Serrano E. (2011). *2º Bachillerato*. Ed. SM.

Definición 4: Colera J., Olivera M.J., Fernández S. (1997). *2º Bachillerato LOGSE*. Ed. Anaya.

Definición 5: Pestana D., Rodriguez J.M., Romera E., Touris E., Alvarez V y Portilla A. (2000). *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. Barcelona. Arial Ciencia.

ANEXO III

Las siguientes puntuaciones fueron las obtenidas en el Cuestionario 1 y en el Cuestionario 2.

Cuestionario 1

	Def. 1	**Def. 2**	**Def. 3**	**Def. 4**	**Def. 5**	**Def. 6**
Experto 1.1	1	0	1/2	1/3	0	1/4
Experto 2.1	1/2	0	1	1/5	0	1/6
Experto 3.1	1	0	0	1/4	1/2	1/3
Experto 4.1	1/6	0	0	0	0	1/6
Experto 5.1	1	0	1/2	1/3	0	1/4
Experto 6.1	1/4	1/3	1	1/2	1/6	1/3
Experto 7.1	1/5	1/4	1	1/2	1/6	1/3
Experto 8.1	1/5	0	1/2	0	1/4	1/3
Experto 9.1	1/3	0	1	0	1/4	1/2

Cuestionario 2

	Def. 1	**Def. 2**	**Def. 3**	**Def. 4**	**Def. 5**
Experto 1.2	1/4	1/2	1	0	1/3
Experto 2.2	1/2	1	0	0	1/3
Experto 3.2	1/3	1	1/2	1/4	1/5
Experto 4.2	1/3	1/2	1	1/4	1/5
Experto 5.2	0	1	1/3	0	1/2
Experto 6.2	1/3	0	1	0	1/2
Experto 7.2	1/2	1	1/4	0	1/3
Total	2 +1/4	**5**	4 +1/12	1/2	2 + 2/5