Videojuegos de estrategia en Educación Matemática. Una propuesta didáctica en secundaria

Irene Ferrando

Jaime Castillo

Marta Pla-Castells
Universitat de València

Resumen: *En este trabajo presentamos el análisis de una propuesta didáctica basada en una actividad de modelización para trabajar conceptos y procedimientos matemáticos mediante el videojuego Bloons Tower Defense 5. Se trata de un videojuego del género de defensa de torres y es un juego de estrategia en el que el jugador debe defender un territorio utilizando torres defensivas que disparan fuego a los enemigos de forma autónoma. El análisis de la propuesta didáctica presentada se basa en una experiencia llevada a cabo con alumnos de 4º curso de ESO y, según los resultados, se realizarán algunas propuestas de mejora al modelo de enseñanza inicial. La propuesta diseñada permite trabajar contenidos del bloque de funciones a través de la resolución de problemas de modelización. Además, los resultados de este estudio exploratorio pueden posibilitar la realización de investigaciones en el ámbito de la modelización.*

Palabras clave: *modelización, videojuegos, gamificación, educación matemática*

Strategy video games in Mathematics Education. A didactic proposal in secondary

Abstract: *In this work, we present the analysis of a didactic proposal based on a modelling activity. The proposal aims to work mathematical contents through the video game Bloons Tower Defense 5. It is a tower defense genre strategy videogame in which the player must defend a territory using defensive towers that fire at enemies autonomously. The analysis of the present didactic proposal is based on an experience carried out with 10th grade' students. We will present some improvement proposals to the initial teaching*

model based on the results of the experience. The activity allows to work contents related to functions of the through modelling problem solving. Moreover, the exploratory results can promote future research on modelling.
Key words: *modelling, videogames, gaming, mathematics education*

JUSTIFICACIÓN E INTRODUCCIÓN

Los juegos requieren relacionarse con unas reglas, incitan al uso de técnicas que llevan al éxito y permiten desarrollar patrones complejos, equivalentes a problemas matemáticos (de Guzmán, 2007). La introducción del juego en las aulas permite trabajar contenidos matemáticos complejos a través de la gamificación, metodología definida como el uso de técnicas, elementos y dinámicas propias de los juegos y el ocio en actividades no recreativas con el fin de potenciar la motivación, así como reforzar la conducta para solucionar un problema u obtener un objetivo (Deterding, Dixon, Khaled y Nacke, 2011).

En particular, Charsky, (2010) considera que las características esenciales de los videojuegos que los habilitan como herramientas en entornos educativos son la competición, la presencia de objetivos, la existencia de reglas bien definidas y la necesidad de tomar decisiones. Todas estas características son fácilmente extrapolables al proceso de resolución de problemas matemáticos. Por este motivo, se ha diseñado un buen número de videojuegos educativos concebidos para ser herramientas de enseñanza en matemáticas. No obstante, se ha comprobado que los videojuegos educativos no son los que más interesan a los estudiantes y éstos prefieren jugar a videojuegos comerciales, diseñados para potenciar su aspecto lúdico (Hamlen, 2011). Esto justifica el interés por adaptar videojuegos comerciales, a priori recreativos, para utilizarlos como herramientas de enseñanza (véase Albarracín, Hernández-Sabaté y Gorgorió, 2017).

Por otro lado, diferentes autores proponen el uso de problemas de modelización, entendidos como problemas reales, complejos y de respuesta abierta, como herramienta de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En efecto, en línea con lo afirmado por Blum (2002), los seres humanos aprenden matemáticas para entender el mundo que les rodea, para resolver problemas que les afectan o para prepararse para futuras profesiones. Al tratar la cuestión de cómo aprender matemáticas, no podemos dejar pasar las relaciones que éstas tienen con la realidad, y aquí es donde entra en juego la modelización. La interpretación y validación de los resultados obtenidos tras la matematización del modelo son, por tanto, habilidades esenciales para la resolución de problemas de enunciado verbal.

Así como los enunciados verbales de los problemas, los videojuegos también se inspiran en la realidad y, en ocasiones, la simulan. Es por esto que en un gran número de videojuegos solemos encontrar situaciones cuasi-reales. En esta línea, los videojuegos ofrecen una oportunidad única en el terreno de la modelización, por sus ventajas (la interacción del usuario con la interfaz y la claridad de los resultados que son consecuencia de las decisiones tomadas) y porque partir de un modelo previamente idealizado, simplificado y programado, tiene un interés didáctico claro a la hora de acercar a los alumnos a la modelización.

Este trabajo consiste en el diseño y el análisis de una propuesta didáctica enfocada a trabajar contenidos de funciones a través de la gamificación. Globos y Monos, Modelización con Bloons Tower Defense 5 (BTD5[1]), es una actividad de modelización matemática para trabajar las funciones lineales con alumnos de 4º ESO. La actividad está diseñada a partir de un videojuego comercial llamado Bloons Tower Defense 5 (BTD5), y busca aprovechar sus características específicas en el aprendizaje de las matemáticas.

Los contenidos que se van a trabajar a través de la propuesta se incluyen en el bloque de funciones. Diferentes autores (Janvier, 1978, Azcárate y Deulofeu, 1999), señalan la importancia de introducir el concepto de función a través de problemas contextualizados. Las actividades de modelización son algo más que eso, pues el contexto no es sólo un marco para la actividad. El objetivo de las actividades de nuestra propuesta es que los alumnos utilicen el lenguaje matemático para verbalizar matemáticamente un proceso.

Así, esta propuesta se enmarca dentro del uso de videojuegos como entornos de resolución de problemas, pues se pretende hacer uso de la modelización matemática para resolver problemas que nacen del contenido del propio videojuego. Según la revisión de la literatura que se hace en Blum y Niss (1991), en modelización matemática se empieza con un problema real, esto es, una situación que lleva consigo ciertas preguntas abiertas que desafían intelectualmente a algún individuo que no está en posesión inmediata de métodos, procesos o algoritmos directos y suficientes para resolver estas preguntas. Este problema, cuyos elementos pertenecen a algún segmento del mundo real y permiten que algunos conceptos, métodos y resultados matemáticos entren en juego, ha de ser simplificado, idealizado, estructurado y sometido a las condiciones y suposiciones apropiadas. El mundo real se matematiza: sus datos, conceptos y relaciones y las condiciones y suposiciones asumidas han de ser traducidos a matemáticas. Así se pasa del modelo real al modelo matemático, donde los elementos básicos de la situación original se corresponden con objetos matemáticos que se relacionan según las relaciones del modelo real.

En los siguientes apartados describiremos las características del videojuego utilizado en el diseño de la propuesta y, a continuación, presentaremos la propuesta original tal y como fue puesta en marcha en un grupo natural de 4º curso de ESO en un centro público de Valencia. En base al análisis de la experiencia llevada a cabo, en particular de las dificultades encontradas, aportaremos una propuesta de mejora.

DESCRIPCIÓN DEL VIDEOJUEGO

Este juego pertenece al género *tower defense*, que se caracteriza por una serie de mecánicas comunes:

- Cada nivel consiste en un mapa sobre el cual hay un camino.
- Por el camino circulan una serie de enemigos que aparecen en hordas, dividiendo cada nivel en diferentes rondas.
- El jugador ha de disponer una serie de torres fijas en puntos del mapa escogidos por el que atacarán a los enemigos dentro de un determinado radio de acción y con una fuerza determinada, ambas características específicas de la torre.

1. http://www.minijuegos.com/juego/bloons-td-5.

- Las torres se compran con el recurso del juego (dinero, monedas, etc.) y se mejoran para potenciar sus características. Estas monedas se obtienen o bien a un ritmo constante, o bien por acabar con enemigos.
- El objetivo del juego es sobrevivir a los sucesivos ataques de los enemigos, evitando que lleguen al final del camino.

En el caso concreto del BTD5, los enemigos son unos globos de colores y las torres suelen tomar la forma de monos que lanzan dardos a los globos para reventarlos. Estas características lo hacen más atractivo por su aspecto gráfico y lo liberan de la violencia que generalmente impregna estos videojuegos, facilitando su uso como herramienta de enseñanza. En cualquier caso, la propuesta puede adaptarse fácilmente a cualquier otro videojuego de características similares (Albarracín, 2014).

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA ORIGINAL

La actividad está diseñada para que los alumnos realicen una tarea de modelización en una de las situaciones más básicas del videojuego BTD5. La situación problemática de partida es la optimización del recurso del que disponemos en el videojuego (las monedas) a través de la búsqueda de la máxima eficiencia de las torres que dispongamos sobre el mapa. Para ello, los alumnos seguirán los pasos del proceso de modelización decidiendo qué información es relevante a la hora de construir el modelo y cómo matematizarlo adecuadamente, guiados por los ejercicios de la actividad.

En el proceso de matematización aparecerán los conceptos de variable, función e inecuación como piezas clave en la resolución. En concreto, se hará hincapié en el trabajo sobre la función lineal: los alumnos dispondrán de una serie de magnitudes que están linealmente relacionadas entre sí, y deberán escribir esas relaciones en términos matemáticos, escogiendo aquella que les resulte más útil para su objetivo. Además, se pretende utilizar la modelización como herramienta de enseñanza no sólo de estos contenidos, sino también de las competencias de interpretación, toma de decisiones y validación de resultados, fundamentales en el aprendizaje de matemáticas.

Para esta actividad se ha escogido el mapa inicial (véase Figura 1), y se pedirá a los alumnos que maximicen la eficacia de la torre más básica del juego, llamada *mono lanza-dardos*, de cara a conseguir destruir el mayor número de globos posible. El objetivo último es aguantar el mayor tiempo posible sin gastar más monedas, lo que nos permitirá ahorrar y comprar torres más poderosas (y más caras) que nos darán una ventaja considerable. Este es el elemento motivacional que da sentido a la actividad..

La maximización de la eficacia del primer *mono lanza-dardos* que coloquemos en el mapa tiene dos partes bien diferenciadas: la elección de la posición de la torre y la elección de sus mejoras.

La propuesta está dividida en seis bloques que secuencian el proceso de modelización. Se propone la realización de esta actividad a lo largo de cuatro sesiones: una primera sesión de toma de contacto, planteamiento de la tarea y discusiones iniciales sobre el modelo; dos sesiones más para el trabajo de los ejercicios correspondientes a la matematización del modelo y la validación de las hipótesis a través del trabajo con funciones

Figura 1.

y variables; y una última sesión de revisión de resultados y ampliación de la actividad. En la experiencia que llevamos a cabo con un grupo de alumnos de 4º de ESO, solo dispusimos de dos sesiones y, por tanto, los alumnos solo pudieron abordar hasta el bloque 4. En la Tabla 1 presentamos la organización temporal de la propuesta.

Tabla 1: Organización temporal de la propuesta

Primera sesión	Toma de contacto y discusión sobre el modelo inicial	Bloques 1 y 2
Segunda sesión	Matematización del modelo y validación	Bloques 3 y 4
Tercera sesión	Generalización	Bloque 5
Cuarta sesión	Ampliación y mejoras del modelo	Bloque 6

Esta propuesta se ha diseñado para que los alumnos trabajen en grupos de dos o tres personas, aunque también se proponen puestas en común en gran grupo.

El papel del profesor será el moderador en los debates que se generen en el aula: tendrá que clarificar el contexto y resolver las dudas que pudieran surgir además de conducir a los estudiantes a las respuestas que se esperan. En cuanto a los materiales, a cada alumno se le entregará un cuadernillo con los enunciados de los ejercicios y el profesor dispondrá de un iPad® con el videojuego BTD5 conectado a un proyector.

Bloque 1. Observación y formación de criterios

En este primer bloque que inicia la primera sesión, el profesor presentará a los alumnos el videojuego. Con su iPad® conectado a un proyector, explicará las mecánicas básicas del juego jugando las primeras rondas de algunas partidas. Es importante aquí que el profesor recalque que el objetivo principal es maximizar la eficiencia del recurso del juego, las monedas, y que se plantee entonces la cuestión más básica: la maximización de la eficacia del *mono lanza-dardos*.

El objetivo de la actividad de este bloque es escoger un lugar para colocar el primer *mono lanza-dardos* de la partida y para ello los alumnos cuentan en su cuadernillo con dos pantallas del juego impresas (Figura 1 y Figura 2)

En la primera parte de este bloque, los alumnos decidirán dónde colocarían al primer *mono lanza-dardos* respondiendo a los siguientes apartados:

Tabla 2: Actividades Bloque 1

Podemos poner el *mono lanza-dardos* en cualquier lugar que no esté sobre el camino por el que van a pasar los globos.

1.a) ¿Cuál crees que es el mejor lugar para poner el *mono lanza-dardos*? Puedes marcarlo en el mapa.
1.b) ¿Por qué crees que este es el mejor lugar?
1.c) ¿Podrías escribir ese motivo en forma de criterio?
1.d) ¿Podrías dar otros criterios que crees que no son tan buenos como el tuyo y explicar por qué?
1.e) Vamos a poner en común ahora los criterios que hemos elegido en cada grupo y ponernos de acuerdo sobre cuál será el mejor criterio. Apúntalo aquí:
1.f) Aplica el criterio a cada una de las posiciones marcadas en el siguiente dibujo.
- Posición A: ………..
- Posición B: ………..
- Posición C: ………..

1.g) Siguiendo el criterio, y teniendo en cuenta la respuesta del apartado anterior, ¿Cuál es la mejor posición para colocar al mono, A, B o C?

Este ejercicio está pensado para que se resuelvan en pequeños grupos los apartados de 1.a) a 1.d) con la ayuda de la Figura 1, se haga una puesta en común en gran grupo para el apartado 1.e) y se resuelvan a continuación (en pequeños grupos) los apartados 1.f) y 1.g) con la Figura 2.

En los primeros cuatro apartados, los alumnos tendrán que pasar de su idea intuitiva sobre dónde es mejor colocar al mono a la elaboración de un criterio que avale que esa posición es mejor que otras, comparándolo con otros. Con esto se pretende, por un lado, forzar la concienciación de los propios alumnos sobre su proceso mental en la toma de decisiones y, por otro lado, apelar a su competitividad para aumentar su motivación.

En la puesta en común se espera que se llegue a la conclusión de que el mejor criterio para colocar al *mono lanza-dardos* es aquel lugar en el que el radio de visión del mono abarque mayor longitud de camino. Esto resulta trivial cuando se tiene en cuenta que la latencia de tiro es constante y que los globos serán de un sólo tipo y viajarán a una velocidad constante e igualmente espaciados, por lo que, a más longitud, más tiempo para reventar globos, y más globos reventados. En los apartados 1.f) y 1.g) los alumnos deberán aplicar el criterio escogido a las posiciones específicas que aparecen en la Figura 2. En este momento, probablemente surja la pregunta de cómo tomar la medida, pues el

Figura 2.

camino es ancho, esto da pie a introducir diferentes maneras de medir. Una manera de intentar que todos los grupos midan igual es proponer dibujar una poligonal que discurra por el centro de cada segmento recto del camino.

Las posiciones entre las que se pide que se elija la mejor son posiciones prototípicas: la (A) es la posición encajada, la (B) y la (C) son, respectivamente, posiciones interiores y exteriores a una esquina (véase Figura 2). La caracterización de estas posiciones como ejemplos de una categoría más amplia puede ser interesante de cara a una posible extensión del modelo a situaciones más generales.

Bloque 2. Construcción del modelo

En este bloque se pedirá a los alumnos que estudien la situación para su modelización a través de las siguientes preguntas:

Tabla 3: Preguntas Bloque 2

2.a)	Intenta dividir el fenómeno en una serie de pasos, siendo todo lo cuidadoso que puedas.
2.b)	Ahora vamos a ponernos todos de acuerdo en una serie de pasos que utilizaremos para modelizar el fenómeno

Estos ejercicios se realizarán en la segunda parte de la primera sesión. Con su resolución, se pretende que se lleve a cabo una discusión, primero dentro de cada grupo y después en común entre los grupos, para simplificar el problema de cara a crear un modelo matemático.

En cuanto a la resolución de este bloque, se espera que al final se llegue a una descomposición de la situación similar a la siguiente:

- Los globos entran en el mapa (omisible).
- El primer globo entra en el campo de visión del mono.
- El mono apunta y dispara.
- El dardo llega hasta el globo y lo revienta.
- El mono se gira y dispara al siguiente globo (una vez ha pasado el tiempo suficiente para que pueda volver a disparar).
- Si no le da tiempo a disparar a algún globo porque está ya fuera de su radio de visión, se le escapa y va a por el siguiente.
- Esto se repite hasta que no hay más globos.

Uno de los aspectos puede resultar difícil o controvertido es que el dardo tarda un tiempo en llegar al globo desde que es lanzado por el mono. Si se observa cuidadosamente, el dardo lleva una velocidad constante desde que el mono lo dispara hasta que llega al globo, por lo tanto, el tiempo que tarda en llegar al globo depende de la distancia del mono al globo y del camino que el globo esté recorriendo. Sin embargo, como el radio del mono es de visión, se puede comprobar experimentalmente que es suficiente que el mono haya visto al globo y le dispare, pues el globo reventará igualmente cuando el dardo le impacte, aunque esté fuera del radio de visión.

Considerar o no cada uno de estos factores puede hacer el ejercicio mucho más complicado de lo que se quiere, y este puede ser un buen momento para introducir la simplificación como parte del proceso de modelización. En esta actividad se ha escogido considerar que el dardo impacta al globo siempre 0.5s después de ser disparado para simplificar el problema.

Bloque 3. Orientación para la matematización del modelo

Los bloques 3 y 4 van orientados a la comprobación de que se ha escogido la mejor posición para el *mono lanza-dardos*, esto es, que el criterio escogido en el bloque 1, fundamentado en una serie de hipótesis teóricas, se valida experimentalmente. Para ello, durante la segunda sesión, los alumnos averiguarán, trabajando sobre su modelo matemático, si el primer *mono lanza-dardos* que se ha colocado en la posición (A) es capaz de reventar todos los globos de la primera ronda, con el objetivo de encontrar una manera de saber predecir si el mono podrá reventar todos los globos de una ronda determinada sólo con los datos de esta ronda.

En primer lugar, se presentan las características de la ronda:

Tabla 4: Características actividades Bloque 3

Características de la Ronda 1: • 20 globos rojos. • Distancia entre globos consecutivos: 1.6 cm. • Todos los globos viajan a una velocidad de 2 cm/s. • Longitud total del camino dentro del área de visión: 10,5 cm. • Latencia de tiro (tiempo mínimo entre disparos) es de 0.8s. • Tiempo de vuelo del dardo (entre el mono y el globo): 0.5s.

Este bloque consta de una única pregunta que se divide en dos apartados, uno para la discusión dentro del grupo y otra para la discusión entre grupos.

Tabla 5: Preguntas Bloque 3

3.a)	¿Qué podemos utilizar para saber si el *mono lanza-dardos* es capaz de reventar un globo? Apunta aquí un par de ideas
3.b)	Vamos a ponerlas en común para elegir una de ellas, la que nos parezca más útil para poder construir el modelo teórico. Apunta aquí la que escojamos.

Lo que se busca iniciar en este bloque y terminar con el bloque 4 es que los estudiantes reconozcan que, para saber si un globo ha reventado, hay que considerar tres variables: el número de ese globo dentro de su ronda, el tiempo que pasa hasta que revienta y la distancia recorrida hasta que revienta.

El tiempo y la distancia recorrida por el globo son relevantes porque sirven para comprobar si el globo ha reventado o no. En efecto, sabiendo la distancia teórica (recorrida desde un punto de referencia) a la que el globo reventaría y sabiendo la distancia máxima (desde el mismo punto de referencia) a la que el mono podría reventar el globo, podemos deducir que, si la primera es mayor que la segunda, entonces ese globo no habría reventado. El tiempo es la variable que utilizaremos como hilo conductor del suceso que estamos modelizando, y está relacionado con la distancia recorrida por el globo a través de un dato conocido: su velocidad. Además, el número de globos será importante porque, conocido lo anterior, podríamos comprobar cuántos globos sería capaz de reventar el mono, y comparar ese número con el número de globos que tiene la ronda para saber si el mono es capaz de hacernos superar la ronda por sí mismo o no.

Así, se pretende que se identifiquen estas tres variables y que, además, se explique cómo utilizarlas para comprobar si el mono supera la ronda. Para ello, recurrimos a preguntas para orientar a los alumnos: “¿Qué queremos saber?”, “Si supiéramos la distancia que ha recorrido un globo, ¿qué necesitaríamos para saber si ha reventado?”, “¿Cómo podemos saber la distancia que ha recorrido un globo?”, etc.

Bloque 4. Matematización del modelo

Las preguntas de este bloque, detalladas en la Tabla 6, pretenden obtener una matematización inicial del modelo, tomando como caso la primera ronda.

La idea es que los estudiantes identifiquen las variables físicas que intervienen en el modelo (apartados 4.a) y 4.b)), y que obtengan sus valores para los primeros globos (apartados de 4.c) a 4.i)). De ahí, los alumnos tendrán que encontrar un patrón a través de los apartados 4.j) y 4.k)) que servirá para contestar a la pregunta inicial: ¿Podrá el *mono lanza-dardos* reventar todos los globos de la Ronda 1 desde la posición (A)? Esta pregunta debería ser fácil de responder para ellos, pues como los globos están suficientemente separados entre ellos, todos revientan en la misma posición y, por tanto, la función que determina la distancia en función del número del globo es una función constante que nunca alcanza la cota de la distancia máxima a la que el mono es capaz de reventar globos.

Tabla 6: Preguntas Bloque 4

4.a) ¿Qué variables serán útiles para describir el fenómeno utilizando el criterio de la pregunta 3.b)?
4.b) Apunta aquí las variables que decidamos entre todos que vamos a utilizar.
4.c) ¿Qué valor será el inicial para cada variable y qué significará para cada variable dentro del fenómeno?
4.d) ¿Cuál sería el siguiente momento importante según la división en pasos del fenómeno en 2.b)?
4.e) ¿A qué distancia estará el siguiente globo del punto inicial en ese instante?
4.f) ¿Cuándo podrá el *mono lanza-dardos* disparar de nuevo?
4.g) ¿Dónde estará el segundo globo en ese instante?
4.h) ¿Puedes calcular los valores de las variables para el segundo globo en el instante en que revienta?
4.i) Observa el siguiente esquema que resume los datos de las preguntas anteriores y completa lo que pasará para el tercer globo.

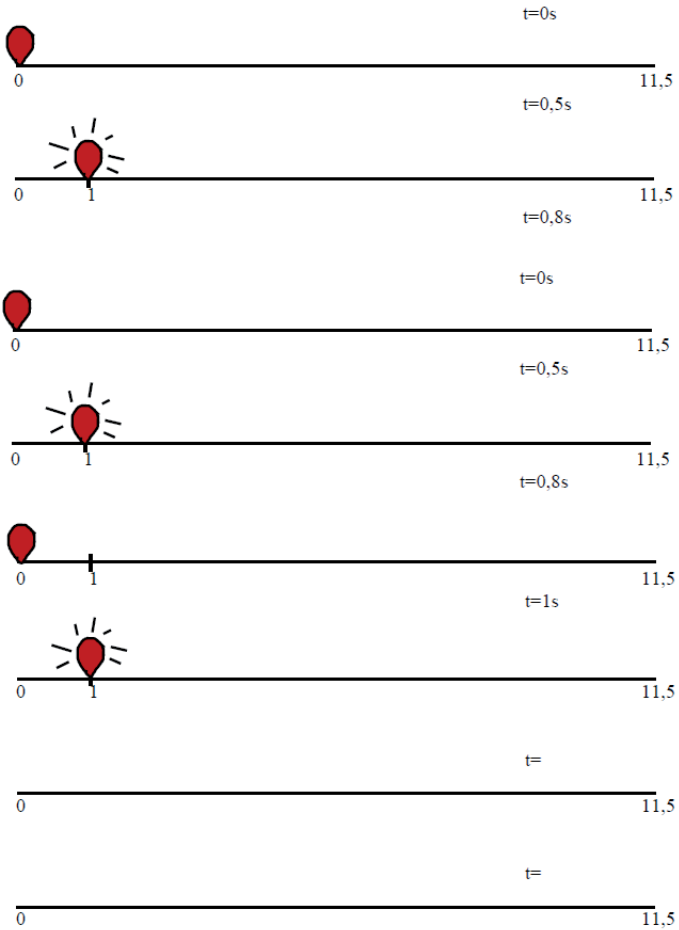


Tabla 6: Preguntas Bloque 4 (continuación)

4.j) Completa la siguiente tabla con la información de los apartados anteriores

Nº de globo	1	2	3	4	···	n
Instante en que revienta					···	
Distancia que recorre hasta que revienta					···	

4.k) ¿Qué conclusión puedes sacar de la última columna de la tabla? Antes de pasar a la resolución del apartado 4.c, es conveniente iniciar dos discusiones: una relativa a la elección de un sistema de referencia y otra relativa a los errores de medición.

Bloque 5. Generalización del modelo. Expansión de resultados

Este bloque, desarrollado durante la tercera sesión, contiene cuestiones que buscan que los estudiantes generalicen el trabajo hecho para el caso de la Ronda 1 a la Ronda 2. El objetivo es que afiancen el trabajo ya realizado y que puedan contrastar los resultados obtenidos de los cálculos en el bloque 4 con los obtenidos en este bloque, véase Tabla 7.

Cuando los alumnos lleguen al apartado 5.b) deberán ser capaces de ver que la función que da la distancia que recorre un globo antes de reventar ya no es constante, y que ahora no pueden asegurar que todos los globos de la ronda reventarán. En el apartado 5.c) se les pide que expliciten este hecho, y en el apartado 5.d) han de encontrar alguna estrategia para predecir si el *mono lanza-dardos* podrá reventar todos los globos de la Ronda 2 desde la posición (A). Aquí entra en juego el trabajo con inecuaciones. Para ello, podrán hacer uso de la expresión algebraica que se les pide en la última columna de la tabla del apartado 5.b), y tendrán que compararla con la distancia máxima para ver cuál será el primer globo que teóricamente el mono no reventará. Entonces, si ese número es inferior a 30, que es el número de globos que tiene la Ronda 2, no se superará la Ronda. Por tanto, si el *mono lanza-dardos* no es capaz de reventar todos los globos y la Ronda 2 no se supera, los alumnos deben pensar cómo mejorar al mono para poder pasar a la siguiente Ronda.

Bloque 6. Ampliación: mejoras

Este es el último bloque de la propuesta, y el objetivo es que los alumnos modifiquen el modelo obtenido previamente. Estamos en la situación de que el *mono lanza-dardos* en la posición (A) no ha podido superar la Ronda 2, hay dos opciones de mejora: aumentar su radio de acción, o bien aumentar el número de globos que un dardo es capaz de reventar. Se pide a los alumnos que estudien el efecto de cada una de estas mejoras y escojan cuál sería la más eficiente con las siguientes preguntas:

Tabla 7: Características y preguntas Bloque 5.

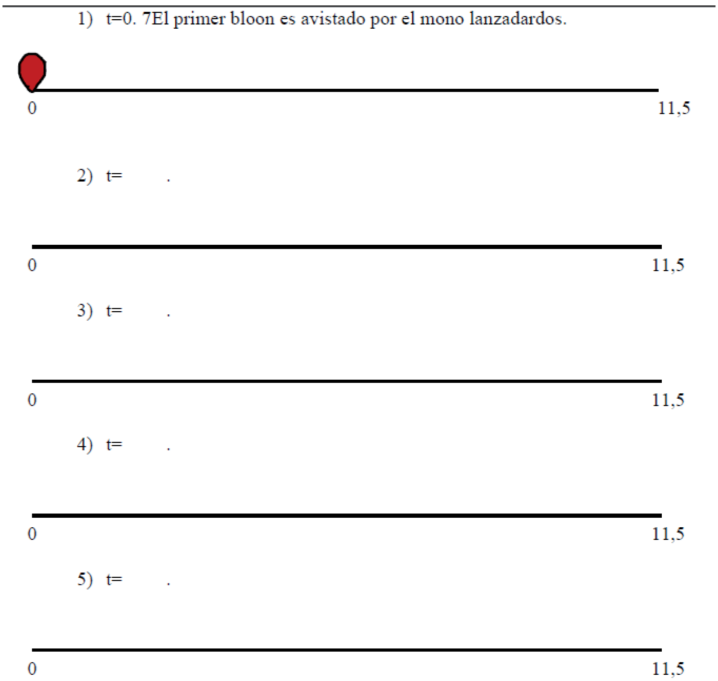
Características de la Ronda 2:

- 30 globos rojos.
- Distancia entre globos consecutivos: 1 cm aproximadamente.
- Todos los globos viajan a una velocidad de 2 cm/s.

Además, ya sabíamos que:

- Longitud total del camino dentro del área de visión: 10,5 cm.
- Latencia de tiro (tiempo mínimo entre disparos) es de 0.8s.
- Tiempo de vuelo del dardo (entre el mono y el globo): 0.5s

5.a) Completa el siguiente esquema sobre la ronda dos escribiendo en cada instante el paso que está ocurriendo (de los de la lista de 2.b) y los globos que aparecen en el camino, marcando la distancia a la que están del punto inicial y cuando revientan.



5.b) Rellena ahora esta tabla con la información recogida

Nº de globo	1	2	3	4	…	n
Instante en que revienta					…	
Distancia que recorre hasta que revienta					…	

5.c) ¿Puedes destacar alguna diferencia entre esta tabla y la anterior?

5.d) ¿Podrá el mono reventar todos los globos? ¿Si no, cuál será el primero que no reventará?

Tabla 8: Características y preguntas Bloque 6

Mejora 1.1: Dardos de largo alcance. Hace que el *mono lanza-dardos* dispare más lejos de lo normal. Mejora 2.1: Tiros afilados. Puede reventar 1 globo más por disparo. 6.a) Analiza la mejora 1.1. ¿Cómo crees que influye aumentar el radio de disparo? 6.b) Si la longitud del camino que entra dentro del área de visión del mono es ahora 12,1cm, ¿cuántos globos sería capaz de reventar ahora el mono en la Ronda 2? 6.c) Analiza ahora la mejora 2.1. ¿Se te ocurre alguna idea para sacarle más partido? Apunta algunas ideas y plantea pruebas experimentales para ver si lo que estabas pensando ocurre realmente en el juego.

En el apartado 6.c) se pide un análisis cualitativo de la segunda mejora. El objetivo es que vean que, para maximizar esta mejora, lo ideal es que el mono dispare a los globos de forma que la trayectoria del dardo sea una recta coincidente con la trayectoria del globo.

En este apartado se pretende que los alumnos vean que al construir un modelo e ir generalizándolo y adaptándolo a nuevas situaciones, un cambio en las condiciones puede suponer un gran cambio en el modelo. Al introducir la mejora 2.1, la posición (A) deja de ser la idónea, pasando a serlo la posición (C) (exterior a una esquina) pues desde esa posición la trayectoria del dardo y la de los globos coinciden, y un mismo dardo puede explotar dos globos consecutivos.

A continuación, mostraremos los resultados de la experiencia de la implementación de los cuatro primeros bloques de nuestra propuesta con un grupo natural de 4º de ESO.

ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA

La actividad se propuso a un grupo de 4º ESO de 21 alumnos, y se desarrolló durante dos sesiones, por lo que no dio tiempo a terminarla. No obstante, se recogieron datos de la experiencia que permitieron detectar algunos problemas de la propuesta y que han dado lugar a una serie de propuestas de mejora. Se analizarán aquí las dificultades observadas.

Antes de tratar las dificultades, conviene recordar que la propuesta tiene dos objetivos didácticos principales: el primero, el trabajo con los conceptos de variable, función e inecuación; y el segundo, el trabajo de modelización en sus diferentes fases. Este segundo objetivo quería conseguirse a través de la generalización del modelo en el bloque 5 y de las conclusiones del bloque 6, en el que se comprueba cómo la máxima eficiencia se consigue cambiando de criterio para elegir la posición del mono cuando cambiábamos sus características con una mejora.

Aunque no se llegó hasta el bloque 6 en la experiencia, sí que observamos que los alumnos fueron progresivamente perdiendo de vista el objetivo inicial de la actividad, la maximización de la eficiencia del *mono lanza-dardos*. Esto puede deberse a que la actividad no estuviera suficientemente organizada o a que no se presentara con suficiente claridad. De cualquier manera, si se pierde el hilo del proceso de modelización no se tiene éxito con el objetivo didáctico que se pretendía conseguir.

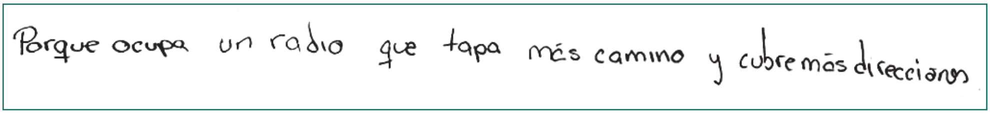

Porque ocupa un radio que tapa más camino y cubre más direcciones

Figura 3.

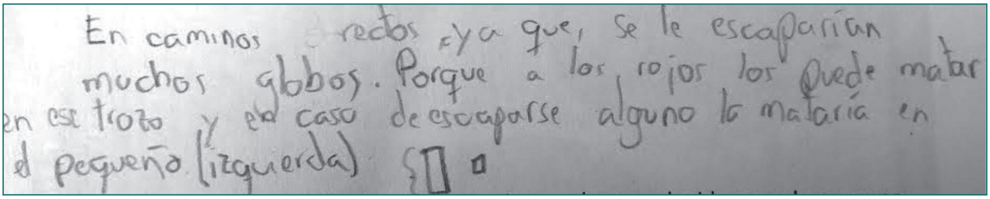

En caminos rectos, ya que, se le escaparían
muchos globos. Porque a los rojos los puede matar
en ese trozo y en caso de escaparse alguno lo mataría en
el pequeño (izquierda)

Figura 4.

También se han identificado dificultades técnicas. Por un lado, tomar medidas experimentales con un pequeño error relativo es realmente difícil precisamente porque el juego funciona en HD y contar píxeles es prácticamente imposible. De hecho, en el diseño de la actividad se decidió ajustar los decimales de los datos medidos experimentalmente para que cuadraran los cálculos teóricos con los resultados experimentales en la resolución de los bloques 4 y 5. Un ejemplo de esto es el siguiente: para determinar la distancia de separación entre globos consecutivos de la Ronda 2, se hicieron una serie de medidas entre centros de globos consecutivos. En vez de tomar alguna medida de centralización de esas medidas se decidió escoger aquella que, al introducirla en los cálculos, hacía coincidir la predicción teórica del número de globos reventados en la Ronda 2 con el resultado experimental. Esta dificultad puede transformarse en una oportunidad de enseñanza. En efecto, se puede ampliar la actividad añadiendo una primera parte de toma de medidas, en la que los alumnos aborden este tipo de dificultades y busquen soluciones. De esta manera se trabajarían más conceptos matemáticos (estadísticos, geométricos, etc.).

Otra de las dificultades en el diseño y que se manifestaron en la implementación de la actividad tiene que ver con la elección de un criterio para escoger la posición del mono que se hace en el bloque 1. El criterio que se espera que los alumnos escojan es el siguiente: "a mayor longitud de camino dentro del radio de visión del mono, más globos será capaz de reventar", asumiendo que los globos van a velocidad constante por el camino y están igualmente espaciados, como ocurre en las Rondas 1 y 2, con las que se trabaja en la actividad. En la puesta en común que se llevó a cabo para contestar al apartado 1.e), este criterio resultó totalmente minoritario, siendo mayoritario el criterio: "maximizar la longitud, pero que además el área de visión interseque al camino en dos lugares que estén a la mayor distancia posible" que los alumnos expresan de formas diversas, véase Figura 3 y Figura 4.

Para poder convertir las primeras rondas del videojuego en una situación abordable, en el proceso de diseño de la actividad se restringió el problema al máximo, centrando la pregunta en la eficiencia de la torre más básica, el *mono lanza-dardos*, y al primer mapa del juego. Además, para poder hacer mediciones y trabajar con magnitudes físicas como

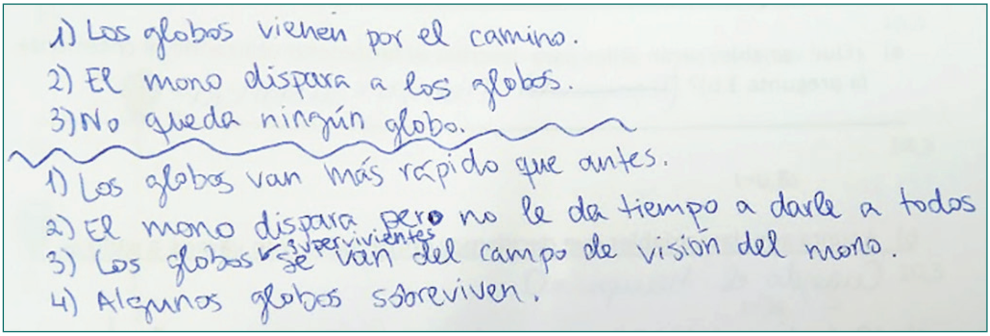

1) Los globos vienen por el camino.
2) El mono dispara a los globos.
3) No queda ningún globo.
1) Los globos van más rápido que antes.
2) El mono dispara pero no le da tiempo a darle a todos
3) Los globos supervivientes se van del campo de visión del mono.
4) Algunos globos sobreviven.

Figura 5.

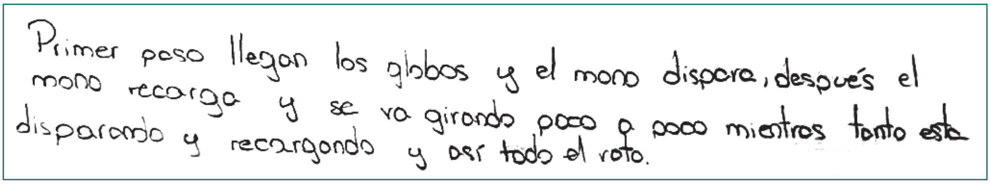

Primer paso llegan los globos y el mono dispara, después el mono recarga y se va girando poco a poco mientras tanto esta disparando y recargando y asi todo el rato.

Figura 6.

distancia, tiempo y velocidad, se supuso que el camino por el que discurren los globos es una poligonal que pasa por el centro del camino que está dibujado en el mapa, y que los globos son puntos y, por tanto, adimensionales. Esto supone una simplificación de la situación real y, de hecho, provocó que, durante la implementación de la actividad, se introdujera una discusión sobre la elección del criterio para ubicar el primer *mono lanzadardos*. Esta discusión derivó en un aumento del tiempo previsto pero también fue una oportunidad para tratar otros temas y enriquecer la actividad. Además, aunque esta discusión no resulte especialmente relevante para el desarrollo de los siguientes ejercicios de la actividad -pues los alumnos escogen igualmente la posición (A) frente a la (B) o la (C)- sí juega un papel fundamental en la comprensión del proceso de modelización, en concreto de la simplificación de la situación a modelizar.

En cuanto a las dificultades encontradas por los alumnos, éstas se concentraron alrededor de las otras dos discusiones importantes. En el bloque 2 se propone dividir la situación con la que se está trabajando en una serie de pasos, con el ánimo de distinguir qué es relevante y qué no lo es. En la experiencia, los alumnos quedaron, en general, bastante perplejos con el enunciado de este ejercicio: no sabían qué contestar, se sentían perdidos e hicieron falta aclaraciones sobre qué hacer y por qué hacerlo. Esto se relaciona de nuevo con la falta de claridad relativa al hilo conductor en el desarrollo de la actividad, la pérdida de la motivación original y las dificultades para recordar los objetivos. En la Figura 5 y en Figura 6 mostramos un par de extractos de las respuestas de los alumnos a esta cuestión.

Por otro lado, en el bloque 3 se pide a los alumnos que encuentren una manera de determinar si el mono será capaz de reventar todos los globos de una ronda. Los alumnos,

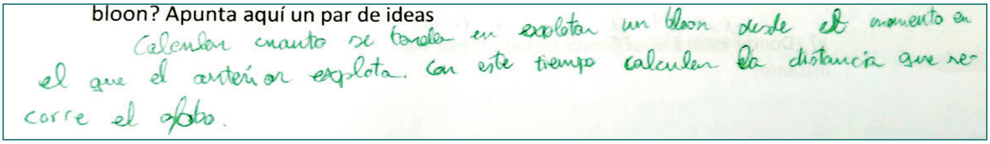

bloon? Apunta aquí un par de ideas
Calcular cuanto se tarda en explotar un bloon desde el momento en el que el anterior explota. Con este tiempo calcular la distancia que recorre el globo.

Figura 7.

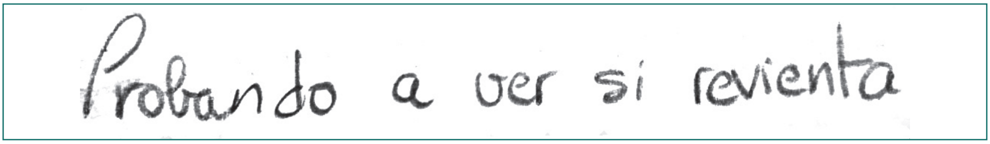

Probando a ver si revienta

Figura 8.

salvo algunas excepciones que aportan respuestas como la mostrada en la Figura 7, se mostraron desconcertados ante esta pregunta, dando respuestas del tipo "se pone el mono en el sitio y se prueba a ver si lo revienta" (véase Figura 8). Se observa, por tanto, una dificultad para distinguir entre el contexto del problema y el contexto matemático que permite abordarlo.

Además, se observó que los alumnos tenían dificultades para aplicar sus conocimientos relativos al bloque de funciones en la resolución de las actividades del bloque 4. Es por ello que, en la siguiente sección, presentamos algunas propuestas de mejora al diseño original.

RESULTADOS DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

Para intentar salvar las dificultades identificadas, se ha diseñado una propuesta de mejora. Esta propuesta pasa por aumentar al menos en una sesión la duración de la actividad a 5 sesiones, pues los debates que se generan en las puestas en común pueden ser largos y difíciles de moderar. Además, se proponen dos cambios concretos: el primero consistirá en clarificar la estructura del proceso de modelización a través de la relación entre objetivos y métodos y, el segundo, pretende profundizar en los contenidos de funciones que aparecen en la actividad.

Explicación del esquema de la actividad y del proceso de modelización

Con respecto al primer punto, se sugiere dejar claro el objetivo desde el inicio de la actividad. Para ello se sugiere presentar un esquema como el de la Figura 9.

Convendría también indicar que hay diferentes maneras de mejorar la rentabilidad de las monedas: comparar los precios de las torres y sus eficiencias, estudiar la eficacia cambiando de dos o más torres, etc., pero que lo que se va a hacer es estudiar el caso más sencillo: maximizar el poder del *mono lanza-dardos* para tardar lo máximo posible en mejorarlo y así evitar tener que gastar monedas (Figura 10).

Objetivo: Maximizar la rentabilidad de las monedas.

¿Cómo?

Maximizando la eficiencia del primer mono lanzadardos.

Figura 9.

Objetivo: Maximizar la eficacia del mono lanzadardos.

¿Cómo? –> Sólo podemos escoger su posición.

Encontrar la mejor posición para el mono y justificar por qué es la mejor.

Figura 10.

Para dar un esquema de cómo se desarrollará la actividad, proponemos hacer una explicación como la que sigue (Tabla 9 y Figura 11):

Tabla 9: Características de la propuesta de mejora

Nuestro objetivo es encontrar la mejor posición para el primer *mono lanza-dardos*, pues es la única variable sobre la que tenemos control. Para ello tendremos que elegir una posición y justificar por qué es la mejor, es decir, elaborar una hipótesis. Sin embargo, esta hipótesis será, en principio, solo teórica. Para comprobar su validez, tendremos que compararla con la realidad: intentaremos predecir el resultado de una Ronda con la información que tenemos, y después lo comprobaremos jugando.

Con esta explicación se espera que los estudiantes sigan mejor el desarrollo de los bloques 1 a 4. El bloque 5 sería una extensión del modelo a la Ronda 2, se comprobaría que el mono ya no da más de sí y que se debe que mejorar, lo que lleva al bloque 6.

Ampliación de los ejercicios para el trabajo de funciones

Con respecto a la segunda propuesta de mejora, se sugiere añadir una serie de ejercicios en la parte final de los bloques 4 y 5. El bloque 4 quedaría de la siguiente manera a partir del apartado 4.j):

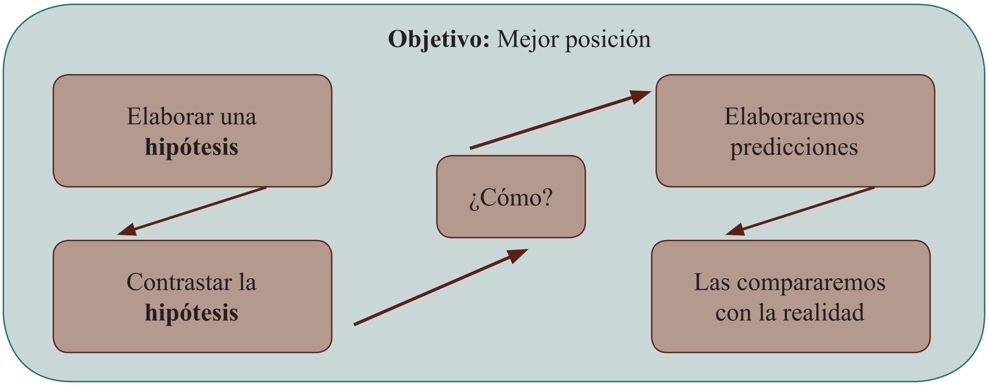


Figura 11.

Tabla 10: Mejora Bloque 4

4.j) Completa la siguiente tabla con la información de los apartados anteriores

Nº de globo	1	2	3	4	…	n
Instante en que revienta					…	
Distancia que recorre hasta que revienta					…	

4.k) Escribe las expresiones algebraicas para las siguientes funciones:
- Tiempo en el que el globo revienta dependiendo de su número, T(n)=
- Distancia a la que el globo revienta dependiendo de su número, D(n)

4.l) ¿A qué categoría pertenecen estas funciones? Represéntalas.
4.m) ¿Cuál de estas funciones será más útil para saber si el mono podrá reventar o no todos los globos de la Ronda 1? ¿Por qué?
4.n) Recuerda la distancia máxima a la que un globo puede ser reventado. Represéntala en la gráfica correspondiente. ¿Qué nos dice ahora esta gráfica sobre si el mono podrá reventar todos los globos de la Ronda 1?
4.o) Sabiendo que los globos viajan a 2 cm/s, ¿puedes decir si existe un tiempo máximo al que los globos puedan explotar? ¿Será el mismo para todos?

Al bloque 5 se añadirían los mismos ejercicios y algún apartado extra para compararlo con el bloque 4 (Tabla 11).

Estas modificaciones se han hecho tras revisar de nuevo la literatura, siguiendo a Deulofeu (2001) que insiste en que en el aprendizaje de funciones se ha de trabajar tanto con tablas como con gráficas y expresiones algebraicas. Además, se han querido introducir ejercicios que recordaran aspectos conocidos sobre las funciones lineales, relacionándolas con el contexto de la actividad.

Tabla 11: Mejora Bloque 5

5.b) Completa la siguiente tabla con la información de los apartados anteriores

Nº de globo	1	2	3	4	…	n
Instante en que revienta					…	
Distancia que recorre hasta que revienta					…	

5.c) Escribe las expresiones algebraicas para las siguientes funciones:
- Tiempo en el que el globo revienta dependiendo de su número, T(n)=
- Distancia a la que el globo revienta dependiendo de su número, D(n)

5.d) ¿A qué categoría pertenecen estas funciones? Represéntalas.
5.e) Recuerda la distancia máxima a la que un globo puede ser reventado. Represéntala en la gráfica correspondiente. ¿Qué nos dice ahora esta gráfica sobre si el mono podrá reventar todos los globos de la Ronda 2?
5.f) ¿Cómo podrías sacar la misma conclusión del apartado anterior sin utilizar las gráficas, es decir, utilizando sólo métodos algebraicos?
5.g) ¿Cuáles son las pendientes de las funciones T(n) y D(n)? ¿Puedes decir cuál es el valor máximo que tendría que tener la pendiente de D(n) para que el mono pudiera reventar hasta el último globo de la Ronda 2?

CONCLUSIONES

El objetivo de la experiencia con nuestra propuesta “Globos y Monos. Modelización con BTD5” era comprobar su potencial como herramienta de enseñanza para trabajar contenidos de funciones a través de la modelización, en un contexto de gamificación con un videojuego comercial.

Las dificultades que la actividad presentaba en su diseño inicial y que fueron descubiertas tras la implementación exploratoria resultaron claves para rediseñar la propuesta. Por un lado, la nueva propuesta pretende profundizar más en el proceso de modelización, presentando un esquema más organizado del proceso desarrollado, relacionando objetivos con métodos y justificando los pasos a seguir. Por otro lado, se plantea la posibilidad de estudiar la introducción del modelo inicial y profundizar en el proceso de toma de medidas experimentales como parte de la actividad, para así trabajar contenidos estadísticos y geométricos y enriquecer la propuesta.

Dado que los contenidos de funciones no se trabajan de forma suficientemente explícita en la propuesta original, se han rediseñado algunas actividades para introducir las funciones, en concreto, las propiedades de las funciones lineales, contextualizadas dentro de la actividad, y en sus diferentes formas (tabla, gráfica y expresión algebraica). Se pretende que los alumnos entiendan mejor el concepto de función y su potencial como herramienta de predicción y toma de decisiones en un proceso de modelización.

Por último, queremos destacar que los resultados de esta experiencia y el estudio exploratorio realizado, pueden permitir, en un futuro, realizar investigaciones en el ámbito de la modelización matemática de forma que los problemas de "contexto real" se definan en el contexto virtual generado por un videojuego.

REFERENCIAS

Albarracín, L. (2014). *Los videojuegos de defensa de torres*. Revista SUMA, 77, 61-67.

Albarracín, L., Hernández-Sabaté, A. y Gorgorió, N. (2017). *Los videojuegos como objeto de investigación incipiente en Educación Matemática*. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(1), 53-72.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1999). *Funciones y gráficas. Matemáticas: Cultura y aprendizaje* Síntesis.

Blum, W. (2002). ICMI study 14: *Applications and modelling in mathematics education – discussion document*. Educational Studies in Mathematics, 51(1-2), 149-171. doi:1022435827400

Blum, W. y Niss, M. (1991). *Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — state, trends and issues in mathematics instruction*. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 37-68. doi:10.1007/BF00302716

Charsky, D. (2010). *From edutainment to serious games: A change in the use of game characteristics*. Games and Culture, 5(2), 177-198. doi:10.1177/1555412009354727

de Guzmán Ozámiz, M. (2007). *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. Revista Iberoamericana de educación, (43), 19-58.

Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R. y Nacke, L. (2011) *From game design elements to gamefulness: Defining "gamification"*. Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference: Envisioning Future Media Environments, 9–15. doi:10.1145/2181037.2181040

Deulofeu, J. (2001). *Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? aportaciones de la investigación*. X Jaem, 367-377.

Hamlen, K. (2011). *Children's choices and strategies in video games*. Computers in Human Behavior, , 532-539. doi:10.1016/j.chb.2010.10.001

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments* (PhD Thesis). University of Nottingham. United Kingdom.

Los autores agradecen la financiación de la Conselleria de Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana a través de los proyectos GV2016-129 y GVPROMETEO2016-143.