Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2017, nº 97, 43-56**

Metacognición en clases de Matemática: un aporte para la enseñanza

Patricia Barreiro y Paula Leonian
pbarreir@ungs.edu.ar – pleonian@ungs.edu.ar
Universidad Nacional de General Sarmiento

Resumen: *El presente trabajo se encuadra en la línea de Resolución de Problemas. Reportamos una experiencia que se realizó en un curso de Matemática de ingreso a la universidad. La intención fue incentivar la reflexión metacognitiva de estudiantes luego de un proceso de resolución de problemas. Para ello diseñamos un dispositivo que considera la implementación de gamas de problemas y de consignas de tipo metacognitivas. Presentamos primeramente el concepto de gamas de problemas y criterios para su gestión en la clase por parte del docente. En segundo lugar, presentamos el dispositivo y resultados obtenidos sobre la reflexión metacognitiva realizada por estudiantes.*
Palabras Clave: *Reflexión metacognitiva, Gamas de problemas, Resolución de problemas.*

Metacognition in Mathematical classes: a contribution for teaching

Abstract: *This article is based on Problem Solving theory. We report an experience held in a mathematics pre-university course. The aim of it was to favor, in students, their metacognitive´ reflection after solving problems. To do this, we design a didactical device that includes the use of families of problems and metacognitive statements. We present, firstly, the concept of families of problems and criteria useful for teachers to work with them in classes. Secondly we present the device and results obtained about metacognitive reflection produced by students.*
Keywords: *Metacognitive reflection, Families of problems, Problem solving*

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones que abordan problemáticas del ingreso a estudios superiores, sumadas a otras propias, ponen de manifiesto que los estudiantes no cuentan con estrategias necesarias para abordar situaciones matemáticas excepto que respondan a ciertos estereotipos, presentan conocimientos incompletos y no poseen control sobre su propio aprendizaje, como lo diagnostican Marino y Rodríguez (2009); Marquina(2011). Consideramos que, el hecho de no tener control sobre el propio aprendizaje produce en el estudiante una dificultad para enfrentarse a tareas nuevas y desafiantes, pues no reconoce de qué estrategias dispone, le quedan ocultas herramientas a las que podría apelar y favorece que su aprendizaje quede sumamente ligado a la actividad puntual que resolvió. En este sentido la reflexión metacognitiva sobre los propios aprendizajes resulta clave para mejorar los aprendizajes, ya que dicha reflexión implica "monitorear su ejecución, detectar dificultades, evaluar su progreso y predecir los resultados de su actividad" (Aguilar, 1994; citado por González, 1998).

En particular, centramos la atención en estudiantes de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) que asisten a un Taller de Matemática que forma parte de un curso obligatorio de pre-grado (Curso de Aprestamiento Universitario, CAU). Dado que el Taller de Matemática debe ser aprobado por todos los ingresantes, independientemente de la carrera que elijan, es un espacio en el que se plantean sostenidamente distintos estudios, investigaciones, diagnósticos, etc., siempre con la finalidad de mejorar los aprendizajes de los estudiantes y no obstaculizar su ingreso a las carreras. Es así que contamos con diversos resultados de investigaciones uno de los cuales identifica las dificultades de los estudiantes en poder reflexionar metacognitivamente (Chacón y Rodríguez, 2009). En ese trabajo se concluye que:

Schoenfeld (1992) identifica dimensiones que influyen en la resolución de problemas. Éstas son: la cognitiva, el conocimiento de heurísticas, la metacognitiva, la afectiva y la experiencia en la resolución de problemas. Es interesante pensar en generar espacios en el aula que las pongan en juego, como por ejemplo la discusión de los métodos empleados para la resolución, las estrategias diversas puestas en juego y poder intercambiar experiencias desde el plano afectivo. (p.7)

Esto nos pone ante un panorama en el que resulta valioso llevar a cabo propuestas didácticas que se propongan activar, en los estudiantes, la reflexión sobre las tareas para que éstos comiencen a tener control sobre las mismas y sobre sus aprendizajes.

El trabajo que aquí presentamos se encuadra en la Resolución de Problemas o Escuela Anglosajona cuyos pioneros se pueden considerar Polya (1965) y Schoenfeld (1992) y tiene como principal propósito *activar mecanismos de metacognición en los estudiantes del Taller de Matemática del CAU.*

MARCO TEÓRICO

El concepto de *metacognición* ha sido desarrollado en el contexto de enseñanza y aprendizaje de la Matemática por Schoenfeld (1992). Este autor, a su vez ha hecho contribuciones al campo de la Educación Matemática denominado *Resolución de*

Problemas que se inicia con trabajos de Polya (1965). Una presentación sintética de la línea puede verse en Pochulu y Rodríguez (2012). En esta línea, cuyo foco está en que el estudiante se convierta en un buen resolutor de problemas y que sea consciente de su actividad cognitiva, este concepto resulta clave. Se pretende que los sujetos puedan monitorear y dirigir su propio proceso cognitivo, es decir, que sean capaces de controlar sus acciones, analicen los resultados que van obteniendo, ajusten sus estrategias, etc. A esta habilidad se la denomina *metacognición* (González, 1996). En este marco otro concepto clave es el de *problema para un sujeto*. Con esta denominación, o para abreviar, simplemente *problema*, nos referimos a una actividad que tiene una meta a alcanzar, datos iniciales y el camino hacia la solución no le resulta inmediato al resolutor. La incertidumbre que posee el sujeto a la hora de abordar la situación hace que ponga en juego una diversidad de estrategias, que pueden ser matemáticamente correctas o no, y que le ayudarán a entender el problema e intentar encarar la resolución. A este conjunto de estrategias se las denomina *heurísticas* (Polya, 1965). Algunos ejemplos de heurísticas son: buscar regularidades, hacer una tabla o un gráfico, empezar el problema desde atrás, considerar un caso particular, resolver un problema similar más sencillo, variar las condiciones del problema, entre otras. Muchas veces, es claro que algunas de éstas no son matemáticamente válidas, como por ejemplo: modificar el problema o considerar un caso particular. Para mayor especificidad sobre la noción de problema y heurísticas ver los trabajos de Barreiro y Leonian (2013); Colombano, Isla Zuvialde, Marino y Real (2009), Marino y Rodríguez (2009), González (1998), Pochulu y Rodríguez (2012). Debemos tener en cuenta que el hecho que una actividad resulte problema para un alumno o no, sólo se develará al momento en el que el estudiante se enfrente a él. Esto trae aparejado que cuando el docente se encuentra en el momento del diseño de actividades, él no tiene certeza de que éstas resultarán problema para sus estudiantes y sólo lo sabrá cuando los lleve al aula. Dada la diversidad cognitiva de los estudiantes en la clase, es razonable esperar que una tarea propuesta en la clase resulte problema para algunos estudiantes y no para otros. En este último caso podría ocurrir que no haya bloqueo, les resulte clara la forma de encarar o bien que sea tan difícil que los estudiantes tiendan a abandonarla. En cualquiera de los dos casos, no se vería su desempeño como resolutores de problemas y no habría reflexión metacognitiva al respecto, por lo que estos casos no nos resultarían útiles para este trabajo. Esta dificultad, que es natural que se presente en el aula, nos invita a definir el concepto de *gama de problemas*. La misma se define como una familia de al menos tres problemas relacionados que se diseña con la siguiente lógica: se parte de un *problema base (PB)* y se diseñan dos (al menos) nuevos problemas: uno será un *problema de complejidad mayor* (*PCMa*) y otro un *problema de complejidad menor (PCMe*). De este modo, el PCMa y PCMe son *problemas asociados* a un PB y, para que conformen la gama, deben ser tales que: versen sobre la misma temática del PB (nos referimos al contexto intra o extra-matemático) y deberían admitir el uso de varias de las heurísticas que el PB posibilita. Más aún, si la gama de problemas se diseñara con la finalidad de enseñar algunas heurísticas, éstas deberían poder utilizarse en cada uno de los problemas que conforma la gama. El sentido de la gama de problemas es disponer de una consigna de complejidad mayor para quienes el PB resultó sencillo, mientras que el de complejidad menor se usaría para quienes el PB resultó inabordable.

Otra cuestión central que incluimos en este marco teórico se refiere a dejar unas pautas básicas para gestionar los problemas que conforman una gama. Es responsabilidad del docente decidir, luego de advertir cómo le resulta la resolución del PB a *cada estudiante,* y decidir "en tiempo real" si le da o no alguno de los otros dos problemas de la gama. ¿Cómo decidirá el docente si el estudiante necesita otro de los problemas de la gama o no? ¿Qué se interpretará frente a un estudiante que no escribe nada en su hoja?, ¿estará pensando y aún no necesita otro de los problemas?, ¿estará con un nivel de bloqueo que lo hará quedar inactivo?, ¿cómo intervenir para ayudarlo? En síntesis, administrar la gama de problemas en clases de matemática es una parte de la gestión docente que resulta compleja. Por este motivo, incluimos aquí unas pautas para la gestión de las gamas en una clase de matemática:

- ofrecer, inicialmente, el PB a todos los estudiantes;
- observar el trabajo de los alumnos ante la resolución del PB;
- ante una resolución inmediata del PB, correcta o no, se le ofrece el problema de complejidad mayor;
- si el estudiante no avanza en ningún tipo de producción, indagar si ha comprendido el problema. En caso de que el obstáculo haya sido solucionado, dejarlo avanzar sin cambiarle el problema. Si, en cambio, se detecta que no ha comprendido el problema (o que la consigna le haya resultado demasiado compleja), entregar el PCMe.

DESARROLLO E IMPLEMENTACIÓN

Diseñamos, fundamentamos y aplicamos un dispositivo didáctico que nos permitiera favorecer la reflexión metacognitiva de los estudiantes.

Detallamos aquí los rasgos claves del diseño del dispositivo y su fundamentación, en primera instancia. Luego damos detalles de la implementación.

El dispositivo consistió en el diseño y fundamentación de cuatro clases y fue grabado en audio, registrando con fotografías los momentos de síntesis plasmados en el pizarrón alcanzados por los estudiantes mediante la metodología de observación participante. La implementación se desarrolló en el CAU, curso de pre-grado de carácter masivo que, como anticipamos, deben cursar obligatoriamente todas las personas que aspiren ingresar a la UNGS. Trabajamos en una comisión del Taller de Matemática a la que asistieron un promedio de 20 alumnos por clase a lo largo de los meses mayo y junio de 2012.

Para cada clase diseñamos una gama de problemas sobre distintos contenidos matemáticos: números, álgebra y geometría (áreas). Los encuentros se realizaron después de haber trabajado cada tema en las clases, pero teniendo la precaución que los problemas no quedaran asociados con el contenido matemático recientemente enseñado. Es decir, los problemas de álgebra (y del mismo modo los demás) no se trabajaron inmediatamente después de haber desarrollado el tema en la clase, sino en un momento posterior. La intención fue que los contenidos abordados en el curso regular no condicionaran su quehacer en la resolución de los diversos problemas.

Esquemáticamente el dispositivo tuvo esta forma (ver tabla 1):

Tabla 1

	Clase 1	**Clase 2**	**Clase 3**	**Clase 4**
Problemas de contenido…	Álgebra básica	Algebra básica	Geometría	Geometría
Tipo de trabajo en clase	Resolución de problemas individualmente	Recuperación del trabajo realizado sobre el problema 1 en forma individual a través de una grilla. Resolución del Problema 2. Confrontación de resoluciones. Primera identificación de heurísticas/utilidad o no referido a la gama de problemas 1 y 2 Puesta en común	Recuperación del trabajo sobre el problema 3. Puesta en común. Identificación de heurísticas comunes a las tres gamas de problemas. Discusión sobre la utilidad del trabajo	Resolución de problemas individualmente a modo de evaluación del trabajo realizado.
Tareas de reflexión metacognitiva		Completar una grilla Responder preguntas para la puesta en común	Buscar en sus resoluciones heurísticas comunes a los tres problemas trabajados.	
Observaciones	Se les pide a los estudiantes que entreguen el problema 1 y sus borradores e intentos de resolución	Se les pide a los estudiantes que entreguen el problema 2, sus borradores, intentos de resolución y la grilla	Se les pide a los estudiantes que entreguen el problema 3, sus borradores e intentos de resolución	Se les pide a los estudiantes que entreguen el problema 4, sus borradores e intentos de resolución

A modo de ejemplo, incluimos a continuación una de las gamas de problemas que fue implementada, diseñada según los criterios descriptos en el marco teórico (figura 1).

Consideramos que la menor complejidad de este problema radica en la inclusión del dibujo, lo que le permitirá al alumno concentrarse en la pregunta en el caso de que no entienda sobre qué trata el problema. La pregunta del PCMe es más dirigida (porque hace referencia directa al dibujo que se muestra en el enunciado) pero apunta a lo mismo que la pregunta del PB. Salvo la heurística de realizar un dibujo, creemos que el problema admite las mismas que el PB. Es decir, los alumnos pueden reinterpretar el problema en un lenguaje diferente, dividir el problema en subproblemas, analizar ejemplos y verificar utilizando casos particulares. En particular, se podría decir que en este caso se agrega la heurística de "resolver un problema más sencillo" cuando, si fuera posible, se les dé la posibilidad de resolver el PB luego de haber trabajado con el PCMe (figura 2).

Problema Base (PB)
Se tienen fósforos del mismo tamaño y se arman con ellos cuadrados en donde cada lado es un fósforo. La figura que ocupa el primer lugar está formada por un cuadrado, la que ocupa el segundo lugar está formada por dos cuadrados que comparten exactamente un lado, la figura que ocupa el tercer lugar está formada por tres cuadrados de modo que cada cuadrado con su consecutivo comparte exactamente un lado, y así sucesivamente…
¿Podría ser que en alguna ubicación existiera una figura que tuviera 1500 fósforos?

Problema de complejidad menor (PCMe)
Se tienen fósforos del mismo tamaño y se arman las siguientes figuras que conforman una secuencia:
Con 1500 fósforos ¿se puede armar alguna figura del estilo de las que forman la secuencia mencionada, utilizando la mayor cantidad posible de fósforos? Identificar cuál sería su posición en la secuencia y decidir si sobraría o no algún fósforo sin usar.

Figura 1

Problema de complejidad Mayor (PCMa)
Se tienen fósforos del mismo tamaño y se arman con ellos cuadrados en donde cada lado es un fósforo. La figura que ocupa el primer lugar está formada por un cuadrado, la que ocupa el segundo lugar está formada por dos cuadrados que comparten exactamente un lado, la figura que ocupa el tercer lugar está formada por tres cuadrados de modo que cada cuadrado con su consecutivo comparte exactamente un lado, y así sucesivamente…
Supongamos que contamos con una determinada cantidad de fósforos y que queremos armar con ellos una figura que utilice la mayor cantidad de ellos, ¿es posible hacerlo sin que sobren fósforos?
¿Es posible formar una figura (lo más grande posible) con una cierta cantidad de fósforos y que sobre alguno?
En caso de que no sobren fósforos, justificar por qué sucedería esto.
En caso de que sobren algunos fósforos, ¿podrías decir algo sobre la cantidad que sobra?

Figura 2

Consideramos que este problema tiene una complejidad mayor pues, además de incluir las heurísticas mencionadas en el PB, se pretende un nivel de generalización mayor. Además, cambia el tipo de pregunta, por lo tanto, hace pensar al alumno en una familia de posibilidades y sobre las condiciones que deberán cumplirse para que sobre o no cierta cantidad de fósforos.

Previmos una forma de trabajo en el aula que a continuación describimos, considerando que favorece a que los alumnos tomen conciencia de las estrategias que ponen en juego en el momento de entender el problema y abordarlo para su resolución. Sostenemos que esta no es una actividad espontánea que el alumno pueda realizar sin la intervención docente. Por tal motivo, creemos que la forma en que el docente gestione la clase, el tipo de tareas que proponga, el modo en que decida intervenir va a ser cuestiones clave para favorecer en los estudiantes un trabajo que –sin esta intencionalidad- les sería totalmente transparente, sumado a que es una práctica muy poco usual en su biografía escolar.

En la clase 1 se les dio a los estudiantes el PB 1 para que lo resuelvan, con un pedido explícito que incluyeran no sólo la resolución que consideraban correcta, sino todos los intentos de resolución y borradores. En la clase 2 se les propuso que llenen una tabla donde volcaron la información requerida para recuperar lo hecho en el problema 1. En una primera instancia trabajaron individualmente y luego se les pidió que completen una grilla por grupo, donde debieron quedar plasmadas las respuestas individuales.

A continuación, se exhibe la grilla utilizada para recuperar lo trabajado en el problema (1).

Tabla 2

Una mirada sobre el trabajo realizado en el problema 1. A modo de síntesis	
Enunciado del problema trabajado en clase	
Describan el trabajo realizado en la búsqueda de la solución propuesta. La intención es recuperar aquí una síntesis de “lo que uno hizo” por si acaso nos tocara ver esta resolución dentro de unos meses	
Aquí indiquen qué estrategias de trabajo han identificado como útiles para encarar o resolver este problema.	
Aquí indiquen qué estrategias han realizado que no los condujeron a la resolución del problema	
Aquí dejen indicadas observaciones en general que consideren importantes	

Al momento de realizar la actividad, recorrimos el aula para conocer en qué situación se encontraba cada alumno. Tal como habíamos anticipado al momento del diseño, al recorrer los bancos observamos que había estudiantes que no podían empezar a trabajar y debimos intervenir para saber cuál era la causa. También observamos estudiantes que luego de haber hecho algunos intentos, no pudieron avanzar. Cuando detectamos que el problema resultó tan complejo que inhibió cualquier actividad del estudiante, procedimos a cambiarle la actividad y le entregamos el PCMe. Por el contrario, si el estudiante entregaba rápidamente su actividad completa (fuera su resolución correcta o incorrecta), le proponíamos continuar con el PCMa. Los estudiantes no percibían la intención y nivel de cada uno de los problemas pues de lo contrario hubieran sabido qué hacer. La idea siempre fue que los alumnos registren su proceder de manera individual antes de la puesta en común.

Con el objetivo de reflexionar sobre los procedimientos realizados al abordar los problemas trabajados, planteamos un debate sobre los ítems que componen las grillas.

Esto lo retomamos en una puesta en común al final de la clase. Trabajamos sobre la segunda gama de problemas. Luego, les pedimos que comenten lo que hicieron y completamos en el pizarrón un listado con las estrategias usadas para resolver el problema, hayan sido exitosas o no. De esta manera retomamos también la grilla que completaron de manera grupal para la actividad anterior. Les pedimos que comparen el listado que quedó escrito en el pizarrón con la tabla que ellos completaron, y que respondieran las siguientes preguntas: ¿Existen algunas estrategias que hayan sido usadas en los dos problemas? ¿Qué cosas de las que se hicieron hasta ahora pueden ser útiles tener en cuenta si quiero ayudar a un amigo a resolver un problema como los que se plantearon hasta ahora?

Estas preguntas estuvieron pensadas para que los estudiantes reflexionaran sobre las heurísticas que les sirvieron o no a la hora de enfrentar las actividades propuestas. Éstos fueron los momentos fuertes de reflexión metacognitiva, que necesariamente la llevó a cabo cada estudiante. En nuestro rol de docentes sólo incentivamos a que ellos realicen este tipo de tarea con intervenciones apropiadas. Por cuestiones de cronograma, dejamos de tarea para la clase 3 el tercer PB.

En la clase 3 retomamos todo lo trabajado anteriormente, incluyendo el último problema, mediante una puesta en común guiada para que los estudiantes advirtieran autónomamente que era factible el uso de las mismas heurísticas en distintos contextos y con contenidos diferentes y que podrían resultar útiles o no, pero formarían parte de sus herramientas a la hora de abordar un nuevo problema. Tanto en esta clase como en la anterior buscamos generar una reflexión metacognitiva en los estudiantes utilizando las grillas y el debate sobre las mismas. En la clase 4 evaluamos lo trabajado a través de la resolución de la cuarta gama de problemas.

RESULTADOS

A continuación, describimos algunos resultados que hemos obtenido como fruto de esta experiencia y acompañamos con evidencias basadas en los registros de clases.

El fragmento de clase que transcribimos a continuación evidencia que los estudiantes advierten la utilidad de la grilla y reconocen, frente a la gama de problemas planteada, las heurísticas que pusieron en juego: *probar con valores*, *reinterpretar el problema en un lenguaje diferente, elegir un registro de representación adecuada.* Esto no quiere decir, que, en este momento, los estudiantes estén en condiciones de tomar conciencia que están utilizando heurísticas, ni tampoco los nombres con que la teoría las nombra, pero sí advierten ciertos procedimientos y estrategias que están identificando a partir de mirar sus grillas y comparar con lo que el docente escribe en el pizarrón. Debe tenerse en cuenta que es de los primeros acercamientos de los estudiantes a la reflexión metacognitiva.

P: Bueno, qué podemos poner en "describir el trabajo realizado", ¿quién me puede contar respecto al problema 2 qué cosas estuvieron haciendo?
A1: Darles valores a las letras
P: está bien, o sea, van poniendo diferentes ejemplos (*lo escribe en el pizarrón*). ¿Por ejemplo?
A3: 1, 2, 3
P: cuando me dijeron probar con valores una alumna me dijo éste (*señala al pizarrón*), otro me dijo este, otro me dijo otro… Cada uno de los que me dijeron que probó con estos casos, ¿probó solo con éste o probó con más casos?
A3: Yo usé varios, hice primero con 1, 2, 3; después con 2, 3, 4; después con 5, 6, 7.

P: Probamos con varios casos. Porque en este caso decir "valores" en plural puede ser le di un valor a cada uno y ese es un ejemplo, o dar varios ejemplos como estos. A vos que diste estos ejemplos (números negativos), ¿usaste otros?
A1: no

A continuación, se evidencia el reconocimiento de la utilidad –o no- del uso de heurísticas. Aquí se ve cómo los estudiantes ponen en tela de juicio si "*probar con valores"* puede considerarse como una estrategia útil, ya que a partir de ella se genera la idea de que existe, entre los números, una regularidad. Se observa en el docente la intención de traer al plano consciente la utilidad de lo que hicieron.

P: No, primero estamos contando lo que hicimos, acá anoto luego lo que no sirvió. ¡Ojo! Que al juntarnos entre todos después uno puede decir "lo que a todos les sirvió yo lo anoto en la parte de *no me sirvió*" … podría pasar… es todo muy personal.
A2: Claro. Yo, por ejemplo, primero fui probando con varios valores de números enteros consecutivos, pero después es como que eso no alcanza para justificar matemáticamente que después siempre va a dar uno… entonces hay que buscar la forma de usar una variable… (ver anexo, PB2)
…
P: Ahora les pregunto, ¿cuál de todas estas cosas les pareció una estrategia útil? ¿Con cuáles dicen "me ayudó a resolver"?
A7: la primera (*se refiere a la heurística de probar con valores*) nos dio la pauta por los números.
P: la primera porque les da 1 siempre. De alguna manera te da la idea de cómo está funcionando.
A2: todos pasamos por esa instancia, es lo que nos dio la idea de que el resultado daba siempre 1.
P: ¿entienden lo que él dice? Nadie saltó de repente a una simbolización, quizás yo que sé más Matemática podría haber arrancado simbolizando, pero él dice que sin el 1 que les da en los ejemplos no tendrían nada que ir a buscar. ¿Qué iría a buscar si no tengo idea?

En la gestión de la clase el docente intentó generar momentos de debate donde pretendió que los estudiantes mismos evidenciaran que utilizaron las mismas heurísticas en distintos problemas e incluso con contenidos diferentes, con el fin de llevar la discusión a que los estudiantes adviertan que frente a nuevos problemas podrían recurrir a esas estrategias que les sirvieron en los tres problemas anteriores.

P: ¿hay en la lista que ustedes armaron alguna estrategia de estas (aunque no estén igual redactadas) que les parezca que se repitió?
A: el de simbolizar
P: ¿en qué parte del problema 1 (para ponernos en contexto)?
A: cuando te pide la ecuación del problema.
…
P: ¿Algo más encuentran parecido?
A3: yo no le veo nada parecido.
P: ¿Vos no le encontrás nada, para vos es bien diferente?
A3: en el primero nos daban datos, y acá no había datos

…

P: de todo lo que pusimos acá, ¿encuentran elementos en común entre los dos problemas? Si identificamos cosas que hicimos en los dos problemas que nos ayudaron a resolver, quizás en un futuro problema me resulte más fácil abordar un problema, si soy consciente de eso.

A2: en los dos problemas se prueban con valores. Si ahí en el de los fósforos te ponés a pensar decís entre 4 y 7 hay 3, entre otros también hay 3. Nosotros pensamos en encontrar una fórmula para alguien que, no sé, nosotros dijimos ¿por qué no armar una tabla tipo x e y, y la completamos como si fuese modelización y dar valores: para x=2 da 4, etc. ¡Es lo mismo! Ahí usamos valores numéricos: los enteros. Por ahí, como dijo la compañera antes, el que tenga valores numéricos fijos te lleva a vos a probar. Parecería ser que, al ver la letra, además de probar directamente vamos a plantear la expresión algebraica.

A MODO DE CIERRE

Según Schoenfeld (1992) el pensamiento metacognitivo puede monitorear y dirigir el propio proceso cognitivo. Esto implica, además de proponer a los estudiantes resolver problemas y utilizar heurísticas, que ellos conozcan cómo trabajan, controlen sus acciones y en función de los resultados que van obteniendo, ajusten, modifiquen, refuercen, etc. En definitiva, que regulen su proceder.

Si ponemos como ejemplo el uso de heurísticas, se espera que en algún momento el alumno reconozca que algunas estrategias le están sirviendo –o no- para avanzar en el proceso de resolución de problemas, más allá del contenido matemático que éstos tengan. Debería advertir que hay cuestiones comunes que él está utilizando para, luego, poder decidir conscientemente, utilizarlas ante nuevos problemas. Esta tarea es propia de cada sujeto y es el docente quien puede (desde nuestra perspectiva, debe hacerlo) tener un rol central a la hora de invitar a los estudiantes a realizar una reflexión de tipo metacognitiva.

Debemos hacer notar que, según este enfoque teórico, el proceso de reflexión metacognitiva es individual. Consideramos importante sostener una puesta en común en la que los estudiantes puedan discutir sobre las estrategias utilizadas (propias y ajenas) de manera que puedan fortalecer su propio proceder y tenerlo disponible en las próximas situaciones a resolver. Además, aunque sean individuales y personales en la confrontación con otros se puede comparar, reconocer la adecuación o no de otras estrategias diferentes de las propias, etc.

El CAU es un curso de ingreso al nivel superior centrado en la enseñanza de contenidos, sin embargo, este hecho no inhibió que pudiéramos articularlo con la Resolución de Problemas y en particular promover el control y reflexión sobre el propio accionar cognitivo. Sostenemos que estas dos formas de trabajo no son incompatibles, y teniendo en cuenta las características del curso pudimos diseñar y llevar a cabo esta experiencia.

Entendemos que el dispositivo didáctico, con un diseño cuidado y fundamentado tanto en la elaboración de la gama de problemas como en la gestión de la clase, favoreció la reflexión metacognitiva de los estudiantes, como se ha mencionado en sólo algunos de los pasajes de las clases que, por una cuestión de espacio no pudimos mostrar en una extensión mayor.

Sintetizamos algunos criterios que consideramos han sido clave en el diseño del dispositivo para que el docente pueda favorecer la reflexión metacognitiva de los estudiantes.

Contar con un instrumento que les permita a los estudiantes, en un momento posterior a la propia resolución, rever los procedimientos realizados al momento de abordar un problema.

1. Una posible forma es la utilización de la grilla mencionada. Es clave el hecho que este instrumento sea usado con posterioridad a la misma resolución, de modo de poder resolver otros problemas, poner en juego otras heurísticas y en el momento del uso del instrumento intentar que esto sea advertido por los alumnos.
2. *Planificar momentos de reflexión individual sobre las propias producciones.*
3. Esto propone al docente no dejar para una última instancia la reflexión sobre las tareas. Es decir, ir generando la práctica de la reflexión sostenidamente a lo largo de las distintas resoluciones. Al principio algunas cuestiones comunes no se podrán advertir (simplemente pues, por ejemplo, no ha ocurrido que una misma estrategia pueda ser usada en problemas con distintos contenidos matemáticos), pero ocurrirá con posterioridad.
4. *Generar momentos de debate en las clases donde el docente intervenga para que los estudiantes adviertan el uso de las mismas heurísticas en distintos problemas y con contenidos diferentes.*
5. *Generar momentos de debate en las clases donde el docente intervenga para que los estudiantes identifiquen el uso de estrategias que resultaron útiles al momento de resolver la situación y las diferencien de las que no lo fueron.*

Aquí es clave que el docente no sea quien explicite esto, sino que logre, con sus intervenciones que los alumnos lo adviertan. Para ejemplificar esto: si el docente dice a la clase "podemos ver que en el problema 1, 2 y 3 hubo contenidos matemáticos distintos pero ustedes han usado la misma estrategia" no estaría logrando esto. En cambio, con una intervención del tipo de la siguiente, estaría intentando esto. "¿Podrían decir qué contenidos matemáticos usaron para resolver el problema 1, 2 y 3?, ¿cómo son esos contenidos? (esperando que adviertan que son diferentes). Mencionen todas las estrategias utilizadas cuando abordaron cada problema. Organicen la lista debajo de cada problema, identificando si les fueron o no útiles. ¿Qué encuentran en este listado? (esperando que vean estrategias comunes). Saquen alguna conclusión respecto del uso de estas estrategias en estas tres tareas. Si estuvieran frente a una nueva actividad, la experiencia que vivieron al resolver estas otras, ¿les permite aprender algo?

BIBLIOGRAFÍA

Barreiro, P. y Leonian, P. (2013). Enseñanza de heurísticas, Ponencia a presentada en Relme 27, Buenos Aires, Argentina.

Chacón, M. y Rodríguez, M. (2009). Un acercamiento al conocimiento metacognitivo sobre resolución de problemas de estudiantes de nivel pre-universitario. Comunicación presentada en la XXXII Reunión de Educación Matemática (REM), Universidad Nacional de Mar del Plata. Buenos Aires. Disponible en https://www.researchgate.net/

publication/320411227_Un_acercamiento_al_conocimiento_metacognitivo_sobre_resolucion_de_problemas_de_estudiantes_de_nivel_pre-universitario?_iepl%5BviewId%5D=oQt4TAPSB9oo3dHJ1RQIvVV4&_iepl%5Bcontexts%5D%5B0%5D=publicationCreationEOT&_iepl%5BtargetEntityId%5D=PB%3A320411227&_iepl%5BinteractionType%5D=publicationTitle.

Colombano, V.; Isla Zuvialde, D.; Marino, T. y Real, M. (2009). El problema de diseñar problemas. *Actas de la XXXII Reunión de Educación Matemática*, Universidad Nacional de Mar del Plata.

González, F. (1996). Acerca de la metacognición. *Paradigma* XIV-XVII, 109-135.

González, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos. *Zetetiké, 6 (9)*, 59 – 87.

Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma, Vol XXX, Nº 2*, 165-186.

Marquina, M (2011). El ingreso a la universidad a partir de las reformas de los 90: las nuevas universidades del conurbano, En: Admisión a la universidad y selectividad social, Editorial UNGS, Buenos Aires.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. [Versión en español de la obra How to solve it publicada por Princeton University Press en1945]. México: Trillas.

Rodríguez, M. (2012). Resolución de problemas. En Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Comps.). *Diferentes enfoques en la didáctica de la matemática*, 15-38. Buenos Aires: UNGS

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics, in D. Grouws (De.) *Handbook for research on mathematics teaching and learning*, New York: MacMillan.

ANEXO

En este anexo incluimos las otras gamas de problemas con las que trabajamos en la experiencia anteriormente presentada.

Gama de Problemas N°2

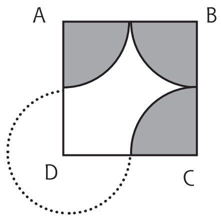
PCB: *Si a, b y c son tres números enteros consecutivos, ¿qué se puede decir de la expresión* $b^2 - a.c$*?*

PCMe: *Si a, b y c son tres números enteros consecutivos, ¿existirá números para los cuales la expresión* $b^2 - a.c$ *tome el valor 2?*

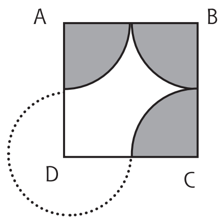
PCMe: *Si a, b y c son tres enteros consecutivos, ¿qué podrías decir de las raíces de la cuadrática* $4ax^2 + 4bx + c = 0$*?*

Gama de Problemas N°3

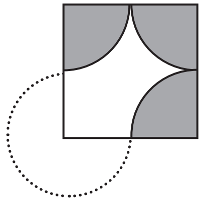
PCB: *En la figura que sigue hay indicado un cuadrado de lado 5 cm y los arcos interiores corresponden a cuartos de circunferencias. La línea de puntos delimita un círculo cuya cuarta parte queda oculta tras el cuadrado. Comparar el área de la figura blanca (que incluye la parte visible del círculo) con el área del cuadrado*



PCMa: *ABCD es un cuadrado del que no se conocen sus medidas y los arcos interiores corresponden a cuartos de circunferencias. La línea de puntos delimita un círculo cuya cuarta parte queda oculta tras el cuadrado. Comparar el área de la figura blanca (que incluye la parte visible del círculo) con el área del cuadrado.*

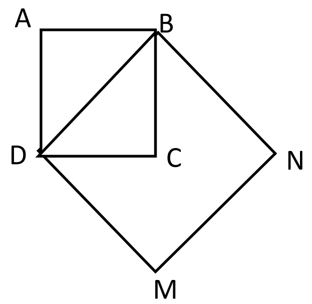


PCMe: *En la figura que sigue hay indicado un cuadrado de lado 5 cm y los arcos interiores corresponden a cuartos de circunferencias. La línea de puntos delimita un círculo cuya cuarta parte queda oculta tras el cuadrado.* Calcular el área de la figura no sombreada.

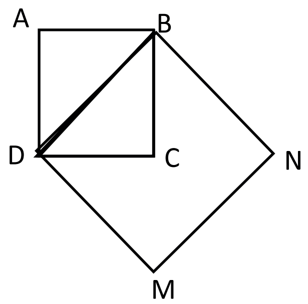


Gama de Problemas N°4

PCB: *Comparar las áreas de los cuadrados ABCD y BDMN.*



PCMe: *En el cuadrado ABCD, el lado AB mide 5 cm, ¿cuánto vale el área del cuadrado BDMN?*



PCMa: *¿Es posible construir un cuadrado cuya área sea el cuádruple del área del cuadrado ABCD, utilizando el cuadrado BDMN para su construcción? Cualquiera sea tu respuesta explica. En caso afirmativo, muestra cómo harías la construcción. Describir el procedimiento que permita construir un cuadrado de área el cuádruple de ABCD, usando el cuadrado BDMN.*