REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 269-284

Investigando la construcción de polígonos regulares mediante doblado de papel.

Alberto Arnal-Bailera

Fecha de recepción: 15/02/2015
Fecha de aceptación: 04/03/2016

Resumen	Consideramos de vital importancia reforzar la enseñanza de la Geometría a través de la manipulación de papel. Presentamos para ello un método aproximado de construcción de polígonos regulares mediante doblado de papel y unas actividades para promover alrededor de la construcción la reflexión matemática. **Palabras clave**: Geometría, Construcciones, Doblado de papel, Secundaria, GeoGebra.
Abstract	We do consider vitally important the manipulation of paper to strengthen the teaching of geometry. We introduce an approximate method for building regular polygons by bending paper. Also, we propose some activities to promote the mathematical thinking around the constructions. **Keywords**: Geometry, Constructions, Paper folding, Secondary, GeoGebra.
Resumo	Consideramos a manipulação de papel vital para reforçar o ensino da geometria. Apresentamos um método para a construção de polígonos regulares por dobradura de papel. As atividades apresentadas visam promover o pensamento matemático sobre o processo da construção. **Palavras-chave:** Geometria, construções, dobradura de papel, secundária, GeoGebra.

1. Introducción

Aunque en estos momentos en España estamos –de nuevo– inmersos en un proceso de reformas educativas en todas las etapas preuniversitarias, podemos afirmar que, en lo formal, los currículos de matemáticas en secundaria optan por la utilización de materiales en Geometría y la promoción de actividades de investigación o resolución de problemas. El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el próximo currículo básico de las matemáticas en la etapa de secundaria afirma que los procesos de investigación integran todas las competencias deseables en un alumno: “La resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen los ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas…” Este decreto está a día de hoy por desarrollar por la Comunidad Autónoma de Aragón, donde lo que rige todavía es la Orden de 9 de mayo de 2007, en el que podemos encontrar ya consideraciones didácticas similares: “Puesto que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas no se superan con la práctica reiterada de rutinas, también conviene proponer a todo el alumnado actividades que exijan creatividad, que resulten motivadoras y que supongan un desafío, y no reservarlas únicamente para los estudiantes más capaces, (…) facilitar, mediante el uso de materiales educativos, la construcción de los conceptos matemáticos…"

Así pues, en el currículo se sugiere tanto la utilización de actividades de tipo investigación como el uso de materiales. No obstante, recae en los profesores la creación de materiales realmente interesantes para el alumnado y que superen las actividades muchas veces repetitivas y poco motivadoras de los manuales escolares.

La utilización de materiales diversos en la enseñanza de las matemáticas favorece una mejor comprensión de los conceptos estudiados, al observar estos desde diversos puntos de vista. La Geometría se presta de un modo especial a la experimentación con material. Cuando éste es adecuadamente elegido, se puede desarrollar un proceso rico de enseñanza-aprendizaje superando enfoques excesivamente formales o algebraicos, (Alsina, Burgues y Fortuny, 1988). Particularmente, el doblado de papel permite estudiar muchos de los conceptos matemáticos básicos e investigar sobre ellos (Baena, 1991; Caboblanco, 2010; Oller, 2007). El doblado de papel contribuye de modo positivo a la aprehensión de conceptos geométricos, siendo además bien aceptado por los alumnos como una alternativa motivadora a una instrucción al modo clásico (Boakes, 2009)

Aunque para el profesorado puede ser también interesante hacer un recorrido por la literatura que explora las construcciones geométricas planas con papel y tijeras desde un punto de vista lúdico (Alegría, 2006), nuestro interés en este artículo será curricular, por tanto, prestaremos atención a la interpretación matemática de cada una de las acciones que realicemos, bien doblando papel, bien cortando con las tijeras (Demaine y O'Rourke, 2007; Royo, 2002).

El objetivo de este artículo es mostrar un proceso de construcción análogo para todos los polígonos regulares a partir del concepto de ángulo central, conocido el radio de la circunferencia circunscrita. El hecho de que sea un proceso homogéneo tiene como propósito facilitar su utilización en el aula, ya que la explicación de una construcción será válida para el resto.

Dividiremos el artículo en tres partes:

La primera de ellas será relativa a los polígonos construibles de modo exacto con este proceso, son aquellos en los que podemos construir el ángulo central a través de disecciones y trisecciones sucesivas del ángulo completo (ver Tabla 2).

En la segunda parte nos dedicaremos a la construcción aproximada del resto, presentaremos un proceso de construcción aproximada del ángulo central, aproximando con un error relativo menor del 1% que quedará oculto por las limitaciones manuales del propio proceso de doblado del papel.

En la tercera parte expondremos cuál puede ser el aprovechamiento didáctico de estas construcciones y cómo integrarlo en las asignaturas de matemáticas de 4º de ESO.

Asumimos que, en algunos casos, el origami -arte de realizar figuras doblando papel- propone soluciones más elegantes o espectaculares, pero nuestro objetivo es hacer lo más sencillo posible el proceso de construcción y centrarnos en hacer visibles las propiedades matemáticas empleadas, de modo que puedan ser más fácilmente analizadas por los alumnos.Desarrollaremos esta construcción de un modo ordenado y justificado matemáticamente, de manera que se favorezca una actividad manual aprovechable didácticamente en un contexto de aula de matemáticas de segundo ciclo de secundaria.

2. Construcciones exactas

Caracterizar los polígonos regulares construibles con un determinado instrumento nos da idea de la potencia del mismo (Demaine y O'Rourke, 2007). Por ejemplo, sabemos que con regla y compás podemos construir un polígono regular de n lados cuando n es de la forma $2^r p_1 \ldots p_k$donde los p_i son primos de Fermat distintos (números primos de la forma 2^n+1). El origami tiene una caracterización similar: con origami se puede construir un polígono regular de n lados, cuando n es de la forma $2^r 3^s p_1 \ldots p_k$siendo los p_i primos distintos de la forma $2^n 3^m+1$. Estos son precisamente los polígonos regulares construibles con regla, compás y un instrumento que permitiera trisecar un ángulo.

Con las técnicas clásicas de origami se pueden construir muchos más polígonos regulares que con regla y compás únicamente, pero no todos. Listamos a continuación los polígonos regulares de menos de 30 lados no construibles con ambos instrumentos:

Regla y compás: 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29.

Origami: 11, 22, 23, 25, 29.

Con las técnicas que presentaremos a continuación podremos construir de manera exacta los polígonos regulares de n lados cuando n es de la forma $2^{r+1}3^s$ con r y s mayores o iguales que 0, conocido el radio de la circunferencia circunscrita. Asumimos, por tanto, que la técnica es más limitada que el origami, por ello complementaremos, para los demás polígonos regulares, las técnicas de construcción exacta con técnicas de construcción aproximada. El proceso que vamos a utilizar implica en ambos casos encontrar primero el ángulo central y a partir de él construir el polígono regular.

Refiriéndonos a los ángulos, el doblado de papel permite la bisección y la trisección de un ángulo. Si queremos construir el ángulo central de un polígono de $2^r 3^s$ lados debemos, partiendo del ángulo llano, realizar r bisecciones del ángulo llano y s trisecciones del mismo, cada una de estas acciones divide el ángulo de 180 grados entre 2 o entre 3, con lo que obtendremos el ángulo de $360/2^r 3^s$ grados (Ver Tabla 1). Reiterando el trabajo de bisección o trisección de los ángulos que obtenemos a partir del llano podemos construir de manera exacta, entre otros un cuadrado, un hexágono o un octógono (ver Tabla 2) conocido el radio de la circunferencia circunscrita. No podemos construir de manera exacta, por ejemplo, el pentágono o el heptágono, por ejemplo.

Pasamos ahora a explicar las técnicas implicadas en el proceso de construcción exacta: Disección y Trisección, de cada una de ellas pondremos un ejemplo adecuado:

2.1. Bisección de un ángulo llano, construyendo un cuadrado.

En general, para dividir un ángulo en dos iguales basta con poner el dedo sobre el vértice y llevar una de las semirrectas que lo delimitan sobre la otra.

Comenzaremos todas las construcciones a partir de una hoja tamaño dinA4, por ser el papel más accesible a nivel escolar. En general utilizaremos papel en blanco para las construcciones exactas, y papel cuadriculado para las construcciones aproximadas.

Como ya hemos dicho, el propósito de cada construcción es la obtención de un polígono regular de un número dado de lados, conocido el radio de la circunferencia circunscrita.Consideraremos construcciones exactas las de los polígonos regulares cuyo ángulo central es resultado de sucesivas divisiones entre dos o entre tres del llano. Por ejemplo, podemos construir de modo exacto el cuadrado, ya que su ángulo central es de 90º y lo obtenemos dividendo en dos el ángulo llano, el proceso sería:

1. Tomo la hoja (usualmente de tamaño din A4) y la doblo en dos partes iguales. El doblez marca un ángulo de 180º.
2. Llevo la mitad de ese doblez sobre la otra mitad haciendo coincidir los extremos del papel, ahora el doblez marca un ángulo de 90º.
3. Marcar el radio de la circunferencia circunscrita en los extremos de la construcción, al doblar por estas marcas, que resultará un triángulo rectángulo e isósceles. Para ver más claramente el producto, podemos recortar en lugar de doblar. Al desplegar obtengo el cuadrado. Ver Figura 1.

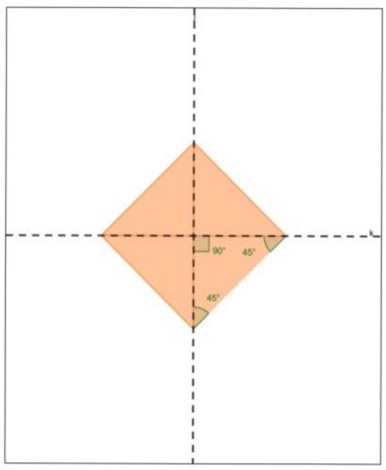

Figura 1. Cuadrado construido mediante doblado en tres pasos.

2.2. Trisección de un ángulo llano, construyendo un hexágono.

Para construir los ángulos centrales de $360/2^r3^s$ grados con s>0, necesitaremos trisecar un ángulo. Para ello debemos poner un dedo sobre el vértice y arrastrar simultáneamente hacia el interior del ángulo las dos semirrectas que lo delimitan(ver Figura 2). De modo que terminemos superponiendo tres superficies en forma de ángulo. Por ejemplo, para construir el hexágono conocido el radio de la circunferencia circunscrita, debemos obtener el ángulo central, $360/2^1 3^1$=60º como la tercera parte del ángulo llano. Explicamos a continuación cómo construir dicho ángulo paso a paso:

1. Utilizaremos una hoja inicialmente sin doblar (ver paso 1º de la figura 2).
2. La doblamos en dos partes iguales (ver paso 1º de la figura 2). Nótese que el doblez marca un ángulo de 180º.
3. Giramos la hoja y marcamos suavemente un doblez perpendicular al obtenido en 1, que divida en dos la hoja doblada, podemos para más claridad dibujar una fina línea de puntos sobre este doblez. Llamamos A al punto superior de este doblez(ver línea de puntos en el paso 3º de la figura 2).
4. Ponemos un dedo en A y arrastramos el extremo derecho del papel hacia la izquierda (ver paso 4º de la figura 2).
5. Con la mano con la que presionábamos el punto A, arrastramos el extremo izquierdo del papel hacia la derecha (ver paso 5º de la figura 2).
6. En un momento dado, uno de los dobleces pasará por encima del otro, tratamos de ajustar todas las capas de papel para que sean iguales entre sí. El doblez suave nos ayudará a comprobar la simetría de los últimos dobleces. Obtenemos así la trisección del ángulo llano (ver paso 6º de la figura 2).

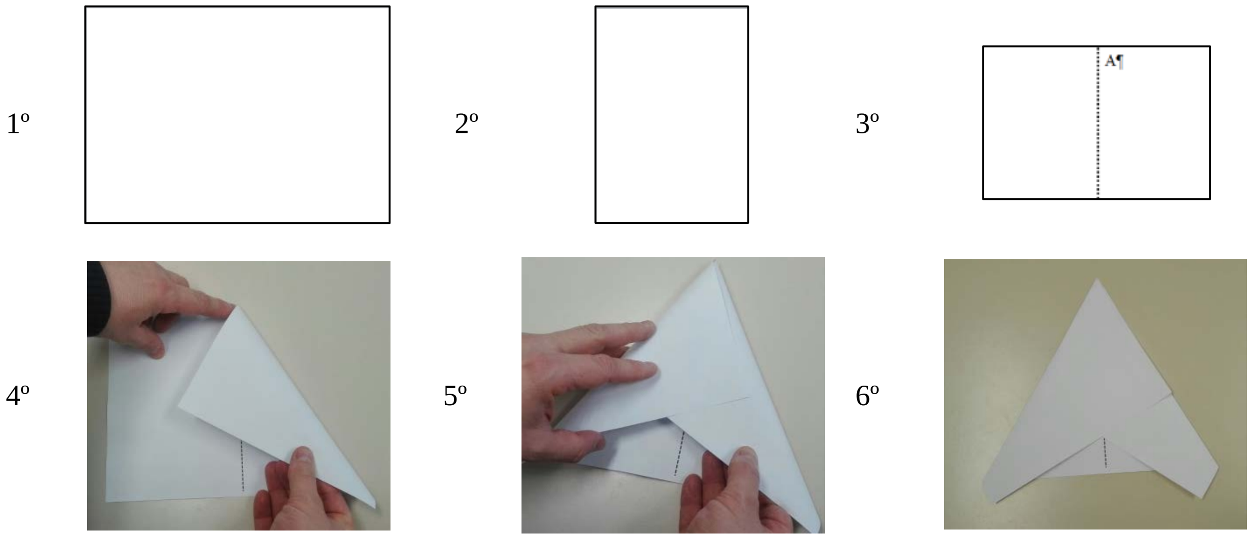

Figura 2. Pasos para el trisecado de un ángulo llano.

Nótese que lo que acabamos de explicar es igualmente aplicable a la trisección de cualquier ángulo. Solo tenemos que hacer la salvedad de que para trisecar el ángulo completo necesitaríamos modificar la técnica dando primero un corte con las tijeras hasta el centro de la hoja de manera que tengamos así dos “lados” del ángulo para poder doblarlos sobre si mismos aplicando los pasos 2 y siguientes.

Consideremos nuevamente el ángulo llano, cada vez que hacemos un doblez, la amplitud de éste queda dividida entre dos o entre tres y el número de lados del polígono regular construido a partir de ese nuevo ángulo central se multiplica por dos o por tres, respectivamente (ver Tabla 2). El máximo número de dobleces que pueden dar un resultado razonable al construirlo físicamente con papel es 3 ó 4, según cuáles sean estos dobleces. Por ejemplo, la construcción con cuatro dobleces que lleva al hexadecágono es realizable, con un resultado razonable, pero el resto al involucrar trisecciones de ángulos no son factibles. Presentamos dos esquemas, ver Tabla 2, analizando los ángulos centrales y los lados construibles con hasta 5 procesos (bisecado o trisecado) a partir del ángulo completo.

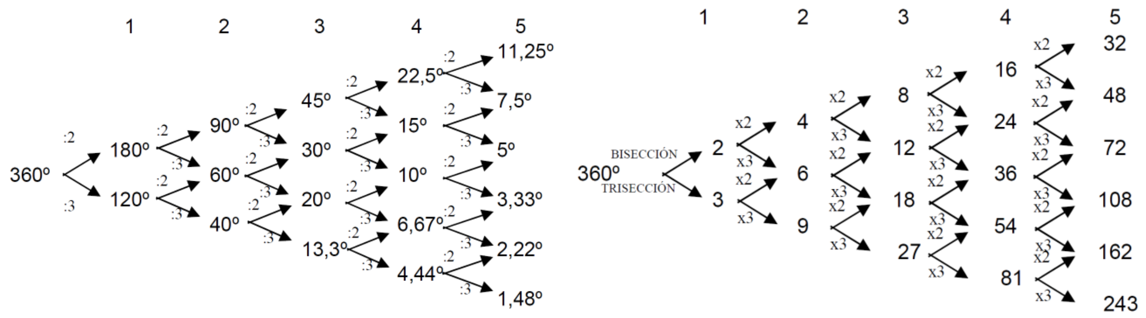

Tabla 1. Ángulo central y número de lados de los polígonos construibles con 5 procesos.

Vemos en la Tabla 2 algunos de los ángulos centrales y polígonos regulares construibles de modo sencillo y exacto a través del bisecado o trisecado del ángulo llano.

Lados	Polígono	Ángulo central	Procesos
3	Triángulo	120º	1
4	Cuadrado	90º	2
6	Hexágono	60º	2
8	Octógono	45º	3
9	Eneágono	40º	2
12	Dodecágono	30º	3
16	Hexadecágono	22,50º	4

Tabla 2. Ángulos centrales y número de procesos de bisecado o trisecado necesarios para construir algunos polígonos regulares.

Para terminar la construcción del polígono que se trate, en este caso un hexágono, necesita un paso más:

7. Dado que un polígono regular de n lados puede verse como un conjunto de n triángulos isósceles, podemos construir el hexágono como 6 triángulos isósceles. Así pues, a partir de la construcción realizada en el

paso 6º, si recortamos un triángulo isósceles con vértice en A y dado que el ángulo en A es de 60º este triángulo será equilátero, base de la construcción del hexágono.Notar que cuando se recorta tenemos varias capas de papel que corresponden cada una con uno de los triángulos isósceles que forman el hexágono, como se podrá ver al desplegarlo (Ver Figura 3).

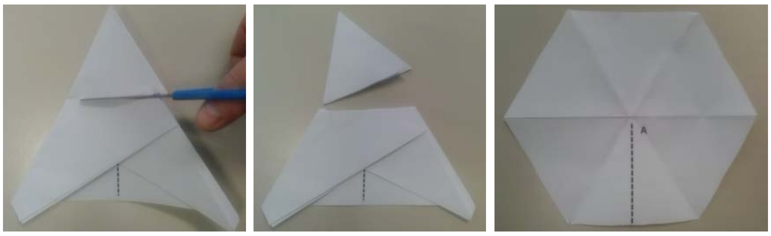

Figura 3. Hexágono dividido en triángulos isósceles.

Tras estas dos construcciones, sería interesante plantearnos qué ocurriría si al hacer el último doblez o recorte no construyéramos un triángulo isósceles, estos serían los resultados con diversos cortes que produjeran, como podemos ver en la figura 4:

1. Un triángulo obtusángulo, produce un hexágono estrellado, cóncavo.
2. Un triángulo acutángulo, produce un hexágono convexo.
3. Un triángulo rectángulo, produce un triángulo equilátero al coincidir dos ángulos rectos consecutivos

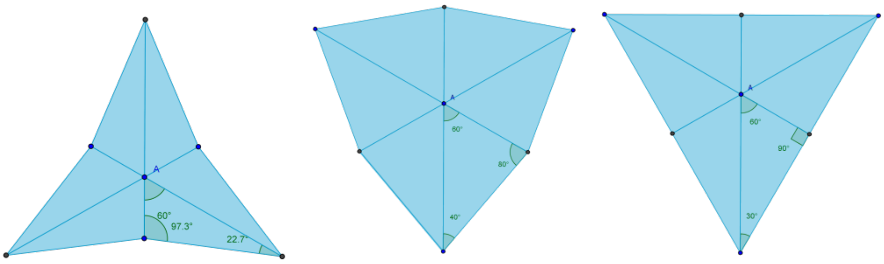

Figura 4. Distintos hexágonos según el corte realizado sobre los pliegues.

Haciendo un análisis similar con los posibles cortes en el cuadrado únicamente obtenemos la posibilidad del rombo cuando el triángulo de corte no es isósceles. Dado que uno de los ángulos es de 90º no podemos obtener ningún triángulo obtusángulo y no encontramos polígonos regulares cóncavos.

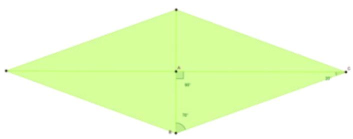

Figura 5. Distintos rombos aparecen según el corte realizado sobre los pliegues.

3. Construcciones aproximadas

3.1. Construyendo polígonos de modo aproximado. Cálculo del error.

Para los casos en los que no es posible realizar una construcción de manera exacta, vamos a exponer un proceso de construcción aproximada, basado en la construcción de un ángulo lo más cercano posible al central del polígono que se trate.

Primero, vamos a construir un triángulo rectángulo con un vértice no recto A situado en el centro de la hoja (cuadriculada) en la que vamos a realizar la construcción. El ángulo en A será la aproximación del ángulo central del polígono que queramos construir. El procedimiento para construir ese ángulo aproximado es buscar una fracción a/b que aproxime la tangente del ángulo de manera que el error sea mínimo. Así, el cateto opuesto a <A tendrá una longitud de a cuadraditos y el cateto adyacente a <A tendrá una longitud de b cuadraditos. Estaremos pues, aproximando la tangente del ángulo exacto por a/b y cometiendo un cierto error, si este error es suficientemente pequeño quedará enmascarado en el proceso de construcción. Damos a continuación una explicación más detallada:

Nos vamos a ayudar de los cuadraditos de la hoja, tomando como unidad el lado de ese cuadradito, para asegurarnos que el ángulo A tiene como tangente la aproximación el número buscado. Dado que el espacio en la hoja cuadriculada es limitado no podemos representar cualquier fracción, ya que no podemos dibujar cualquier triángulo rectángulo. Por debajo del vértice A tendremos unos 30 cuadraditos y a los lados, unos 20, por tanto el cateto adyacente tendrá como máximo esos 30 cuadraditos y el cateto opuesto tendrá como máximo, 20 cuadraditos. Consideramos las fracciones con numeradores y denominadores entre 1 y 20 y entre 1 y 30 respectivamente, siendo estos cocientes las tangentes de los ángulos construibles en ese espacio de la hoja, analizando todas las posibilidades seleccionamos aquellas que dan un menor error relativo. Véase la tabla 3 con las fracciones seleccionadas para cada caso.

Por ejemplo, para construir el pentágono, necesitaríamos un ángulo central de 360º:5=72º, lo que no podemos obtener mediante bisecado o trisecado del ángulo completo, en su lugar construiremos un triángulo rectángulo con el cateto opuesto al ángulo A con una longitud de 12 cuadrados y el cateto contiguo una longitud de 4 cuadrados. De este modo la tangente de <A será 12:4=3. Aplicando la inversa de la tangente: Arctan(3) = 71,565º es el ángulo efectivamente construido (ver Figura 6).

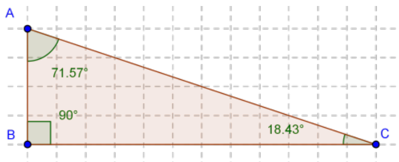

Figura 6. Triángulo rectángulo para aproximar el ángulo central delpentágono (71,565º).

El error cometido ha sido de 0,435º, como posteriormente construiremos por doblado otros 8 ángulos iguales a éste, el error absoluto total cometido será de 2,175º. El error relativo es del 0,6%. Estos errores son perfectamente asumibles en un contexto escolar, además la precisión de la herramienta hace que errores así no sean apreciables. En la tabla 2 se pueden ver estos cálculos aplicados al resto de ángulos.

Lados	Ángulo central	Tangente	Aproximación por una fracción	Ángulo construido	Error absoluto por triángulo	Error total absoluto	Error relativo
5	72º	3,0776835	3/1=12/4= 3	71,565º	0,435º	2,175º	0,604%
7	51,429º	1,2539603	5/4=10/8=1,25	51,340º	0,088º	0,619º	0,172%
10	36º	0,7265425	8/11=0,7272727	36,027º	0,027º	0,274º	0,076%
11	32,727º	0,6426610	9/14=0,6428571	32,735º	0,008º	0,087º	0,024%
13	27,692º	0,5248405	11/21=0,5263158	27,646º	0,046º	0,602º	0,167%
14	25,714º	0,4815746	13/27=0,4814815	25,710º	0,004º	0,061º	0,017%
15	24º	0,4452287	4/9=8/18=0,4444444	23,962º	0,038º	0,563º	0,156%

Tabla 2. Datos exactos y aproximados para la construcción de polígonos regulares.

3.2. Construcción de un pentágono regular de modo aproximado.

Veamos cómo construir efectivamente un pentágono de modo aproximado a partir del ángulo central, conocido el radio de la circunferencia circunscrita y con un error inferior al 1%:

El primer paso esdibujar el triángulo rectángulo explicado en el apartado anterior(ver Figura 6) haciendo coincidir su vértice con el centro de la hoja extendida. (Ver Figura 7).

El primer pliegue es sobre el cateto adyacente al ángulo <A del triángulo rectángulo construido en el paso anterior y dobla la hoja en dos partes iguales si se ha colocado A (vértice A del triángulo, centro del polígono regular) en el centro de la misma. Haremos el pliegue por el cateto hasta los bordes de la hoja, doblando hacia atrás, manteniendo a la vista el ángulo central aproximado construido. (Ver Figura 7).

El segundo pliegue es sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo. Lo realizamos colocando dos dedos sobre el vértice A y pasando otros dos por la hipotenusa hasta el borde de la hoja. Haremos este segundo pliegue hacia atrás, manteniendo a la vista el ángulo central aproximado construido. En este momento tenemos dos ángulos centrales aproximados superpuestos.

El tercer pliegue es sobre el cateto adyacente a <A, colocando dos dedos sobre el vértice A y pasando otros dos por el cateto hasta el borde de la hoja. Haremos este tercer pliegue hacia atrás, de manera que vamos creando una suerte de fuelle.

En este momento tenemos cuatro ángulos centrales aproximados superpuestos y dos dobleces en la parte de atrás que determinan cada uno de ellos medio ángulo central aproximadamente.

Para terminar la construcción del pentágono cortamos formando un triángulo isósceles que tendrá como ángulo desigual el <A y desplegamos la construcción. (Ver Figura 7).

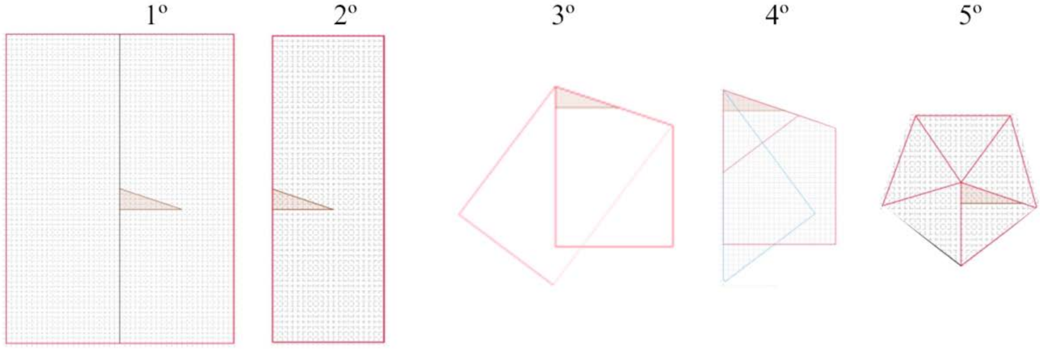

Figura 7. Construcción aproximada del pentágono regular

En los casos de polígonos con un número mayor de lados, tendremos que hacer más pliegues, pero serán del mismo tipo. Repetiremos los pasos iniciales, dibujar el ángulo central y los dobleces iniciales sobre cateto adyacente e hipotenusa. A continuación, doblando alternativamente sobre el cateto adyacente y sobre la hipotenusa, obtenemos una suerte de fuelle en el que vamos añadiendo los ángulos centrales aproximados de dos en dos.

Si el número de lados, n, es par, el fuelle queda completo definiendo n ángulos centrales aproximados, pero si es impar, tras varios pliegues, quedarán definidos n-1 ángulos centrales aproximados y otros dos ángulos que aproximan la mitad del ángulo central. Tras realizar el plegado, cortamos el fuelle, de modo que en cada capa de papel formamos un triángulo isósceles con el ángulo desigual en <A marcando para ello dos veces el radio de la circunferencia circunscrita. De este modo obtenemos n triángulos isósceles que al desplegar la hoja forman el polígono regular de n lados.

Hacemos notar que podríamos tratar de reducir el error en algunas de estas construcciones, podríamos construir el polígono de k lados a partir del de 2k lados o viceversa. Por ejemplo, entre el polígono de 5 lados –error total de 2,175º– y el de 10 lados –error total de 0,274º– podríamos refinar la construcción del pentágono mediante la unión de los vértices alternos del decágono. No exploraremos esta posibilidad en este artículo, ya que la reducción del error podría quedar enmascarada por el mayor número de pliegues necesarios.

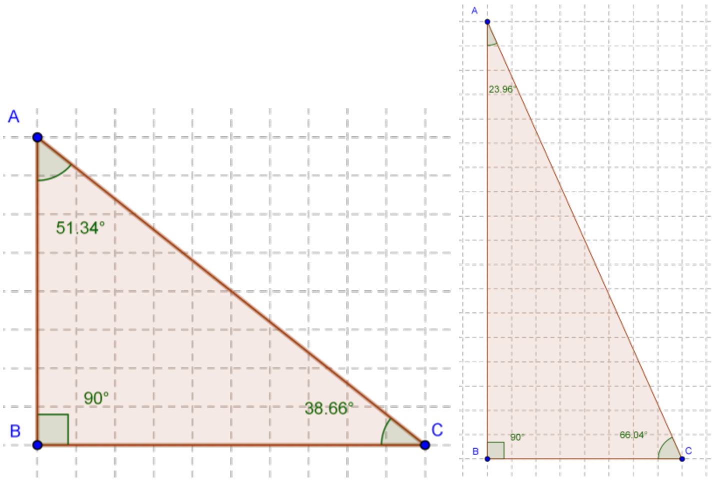

Figura 8. Triángulos rectángulos construidos para aproximar los ángulos centrales de heptágono (51,34º) y pentadecágono (23,96º).

3.3. Comparación con el método escolar habitual.

Una vez construidos los polígonos regulares con el método aproximado, podríamos preguntarnos si realmente hemos ganado respecto al método gráfico que se muestra en muchos manuales escolares. Nos referimos al método en el que se divide el diámetro de la circunferencia circunscrita en tantas partes como lados tendrá el polígono y se traza una semirrecta desde un punto exterior. En la figura 8 podemos ver la construcción de un eneágono realizada mediante este método escolar con ayuda del software de geometría dinámica GeoGebra. Hemos realizado una ampliación para resaltar que dicha construcción es aproximada (ver Figura 9, debajo). Este hecho no se hace notar a los alumnos, lo que es una opción didáctica tradicional que oculta las limitaciones del instrumento "regla y compás" anteriormente expuestas y no favorece la discusión sobre la conveniencia de hacer construcciones aproximadas si esa aproximación es suficientemente buena.

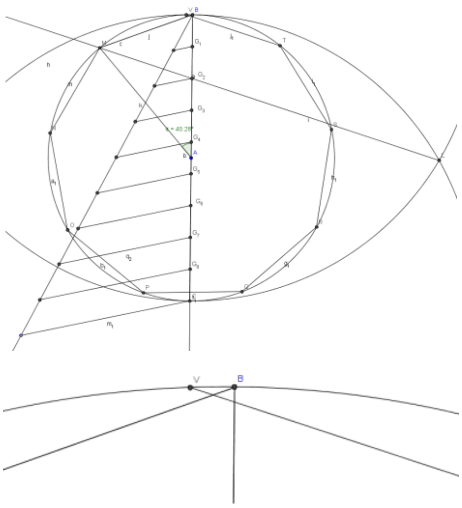

Figura 9. Construcción aproximada del eneágono regular mediante el método escolar.

Mostramos a continuación (ver Tabla 3) los errores absolutos y relativos cometidos al construir diversos polígonos regulares con el método escolar habitual.

Lados	Ángulo central exacto	Ángulo construido escolar	Error absolutopor triángulo	Error total absoluto	Error relativo
5	72º	71,95º	0,05º	0,25º	0,069%
7	51,429º	51,52º	0,091º	0,637º	0,177%
10	36º	36,36º	0,36º	3,6º	1%
11	32,727º	33,15º	0,423º	4,653º	1,293%
13	27,692º	28,21º	0,518º	6,734º	1,871%
14	25,714º	26,26º	0,546º	7,644º	2,123%
15	24º	24,58º	0,58º	8,7º	2,417%

Tabla 3. Errores en la construcción de polígonos regulares – método escolar.

Comparamos en la Tabla 4 los errores absolutos cometidos por el método propuesto aquí –calculados con GeoGebra– y el método escolar habitual que dan idea del desvío entre la construcción exacta y la obtenida con ambos métodos.

Lados	Error total absoluto método propuesto	Error total absoluto escolar
5	2,175º	0,25º
7	0,619º	0,637º
10	0,274º	3,6º
11	0,087º	4,653º
13	0,602º	6,734º
14	0,061º	7,644º
15	0,563º	8,7º

Tabla 4. Comparación de errores entre ambos métodos de construcción de polígonos.

Podemos observar que el método propuesto es más exacto dado que mantiene el error absoluto por debajo de 1º a partir del polígono de 7 lados, mientras que el método escolar es más inexacto cuantos más lados tiene el polígono a construir.

3. Aprovechamiento didáctico en el aula

Consideramos que en alumnos de ESO y particularmente en el último curso, donde ya hay conocimientos básicos de trigonometría, sería posible y conveniente un estudio detallado de estas construcciones aproximadas. Este trabajo permitiría poner en práctica una aplicación tanto de las aproximaciones como de las herramientas básicas de trigonometría. En cursos inferiores no podríamos justificar la procedencia del grado de aproximación de las construcciones, aunque podrían medir los ángulos efectivamente construidos y compararlos con las medidas de los ángulos centrales de los polígonos regulares. Tanto en un caso como en otro habría que hacer referencia a las diferencias entre las matemáticas "formales" que permiten considerar ángulos de 71.57º, por ejemplo, y las limitaciones que impone el doblado de papel con errores dependiendo del tipo de papel utilizado y de las habilidades manuales de cada uno por ejemplo.

Pasamos a describir la actividad propuesta y los objetivos que pretendemos conseguir con ella:

Título: "Construcción de polígonos regulares doblando papel – cálculo de los errores cometidos".

Objetivos:

-Construir polígonos regulares doblando papel y GeoGebra.

-Calcular los errores absolutos y relativos cometidos.

-Reflexionar sobre la diferencia de precisión según el instrumento empleado.

-Reflexionar sobre la potencia de los cálculos matemáticos para determinar el error de una construcción por encima de un análisis visual.

Conocimientos previos:

-Elementos básicos de un polígono regular.

-Trigonometría elemental: Funciones trigonométricas básicas y sus inversas.

-Conceptos de error absoluto y relativo.

-Manejo básico de GeoGebra: Construcción de polígonos regulares y menú circunferencia, construcción del centro de una circunferencia dados varios puntos de la misma.

Actividades:

1-Construir pentágonos, heptágonos, decágonos y endecágonos con GeoGebra, medir sus ángulos centrales con el programa.

2-Imprimir los polígonos creados con GeoGebra y medir sus ángulos centrales con transportador.

3-Construir pentágonos y heptágonos doblando y cortando papel y medir sus ángulos centrales con transportador. (Se les proporciona el triángulo central aproximado según las figuras 6 y 7)

4-Construir una tabla con los resultados anteriores.

5-Comentar los resultados obtenidos en la tabla. (Todavía sin completar las filas correspondientes a decágono y endecágono)

Es de esperar que la tabla tenga una columna casi idéntica para todos los alumnos en la columna que refleje los datos obtenidos a partir de GeoGebra, y diferencias mayores o menores en las otras dos columnas. Esto puede dar lugar a un debate sobre la exactitud de unos métodos y otros cuando se construyen polígonos regulares.

6-Una vez institucionalizados como exactos los valores obtenidos con GeoGebra, ampliar la tabla con los errores absolutos y relativos cometidos al medir ángulos en una construcción exacta en papel y al medir ángulos en una construcción aproximada.

Es de esperar que el mero hecho de medir con el transportador de lugar a imprecisiones y diferencias entre unos alumnos y otros, lo que debe ser objeto también de debate.

7-Justificación del proceso aproximado propuesto. Se proponen varias cuestiones a discutir:

¿Por qué a partir del triángulo central dibujado en la hoja podemos construir el polígono regular?, ¿esta construcción es aproximada?, ¿porque estamos doblando papel y cometemos inexactitudes?, ¿porque los propios triángulos son algo inexactos?

Dado que se les ha dado los triángulos que generan los polígonos regulares y conocen trigonometría pueden aplicar la función inversa de la tangente –por ejemplo– y deducir el ángulo que efectivamente han utilizado en la actividad 3. En este momento, si no lo han deducido se debe explicar el proceso de elección del triángulo que ayuda a aproximar el ángulo central.

8-Investigación: Proponer distintos triángulos o distintos procesos que sirvan para construir decágonos y endecágonos. Medir el error cometido.

Aun siendo una actividad abierta, se espera que construyan diversos triángulos rectángulos, como los mostrados en la actividad 3, sobre las hojas cuadriculadas tratando de que el cociente entre los lados opuesto y adyacente aproxime la tangente del ángulo central que se trate. Por ejemplo, las parejas siguientes de lados opuesto y adyacente aproximan bien la tangente de 36º (0,726542).

Cateto opuesto: 7 unidades. Cateto adyacente: 10 unidades. 7/10=0,7.

Cateto opuesto: 8 unidades. Cateto adyacente: 11 unidades. 8/11=0,727273.

Esta última es la mejor aproximación construible de la tangente de 36º en la hoja de papel cuadriculado descrita anteriormente. En este caso también es posible que algunos alumnos argumenten que el ángulo central es la mitad que en el caso del pentágono y por tanto ya lo conocemos.

Proponemos la realización de un trabajo conjunto GeoGebra-lápiz/papel, que ya se ha mostrado de gran utilidad, al promover distintos puntos de vista y distintas formas de reflexión de los alumnos (Iranzo y Fortuny, 2009).Se propone que la parte final del trabajo sea un “problema” para los alumnos, en el sentido de que deban buscar una estrategia propia de resolución.

4. Conclusiones

En este artículo hemos propuesto un método parcialmente generalizable para la construcción mediante plegado de papel de polígonos regulares sujeto únicamente a las limitaciones físicas del papel. Este proceso parte de los conceptos de ángulo central y de la construcción exacta o aproximada de estos ángulos. Además hemos comparado este método con el habitualmente mostrado en los manuales escolares.

En las actividades pretendemos aunar la construcción manipulativa de polígonos regulares junto con la construcción con GeoGebra de los mismos y la valoración de las aproximaciones obtenidas comparándolas con el resultado exacto obtenido con el ordenador. Además proponemos una pequeña actividad de investigación que permita una reflexión en mayor profundidad sobre lo realizado.

Consideramos de interés didáctico optar por hacer explícito el hecho de que, en ocasiones, las soluciones matemáticas pueden o deben ser aproximadas. Además consideramos que el conjugar en una misma actividad varios instrumentos (doblado de papel, regla y compás y GeoGebra) enriquece la discusión matemática en clase.

De este modo queremos hacer ver la terna que debe convivir en la enseñanza actual de las Matemáticas: Una parte manipulativa que permita acercarse al problema, un apoyo informático que facilite las tareas y ayude a superar las limitaciones de las técnicas manipulativas y unas técnicas formales que ayuden a demostrar o discutir los hechos matemáticos que sea necesario en cada caso.

Bibliografía

Alegría, P. (2006). *Geometría recortable. Sigma*, 28, 95-115.

Alsina, A., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1988). *Construir la Geometría*. Síntesis, Barcelona. España.

Baena, J. (1991). *Papiroflexia: Actividades para investigar en clase de matemáticas. Suma*, 9, 64-66.

Boakes, N. J. (2009). *Origami Instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students. RMLE Online: Research in MiddleLevelEducation*, *32*(7), 1-12.

Caboblanco, J. (2010). *Papiroflexia y matemáticas en educación primaria. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 17(53), 38-44.

Demaine, E.D. y O'Rourke, J. (2007*) Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra.* Cambridge University Press, New York.EEUU.

Iranzo, N. y Fortuny, J.M. (2009).*La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433-446.

Oller, A. M. (2008). *De rectángulos y hexágonos. Una actividad para aproximarse a la investigación en matemáticas. UNIÓN [en línea],* recuperado el 15 de febrero de 2015 de http://www.fisem.org/www/union/revista13.php

Royo, J. I. (2002). *Matemáticas y papiroflexia. Sigma*, 21, 175-192.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado por el grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo. También fue parcialmente financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España (Proyecto EDU2015-65378-P).

Alberto Arnal-Bailera: Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Zaragoza (desde 2009). Profesor de Matemáticas en Enseñanza Secundaria (1996-2012). Doctor en Didáctica de las Matemáticas (2013, Universidad Autónoma de Barcelona). albarnal@unizar.es

- Datos para la publicación:
  - Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Zaragoza, España (1995).
  - Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona, España (2013).
  - Profesor de Matemáticas en Enseñanza Secundaria (1996-2012).
  - Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Zaragoza desde 2009.
  - Residencia en Zaragoza, España.
  - Mis intereses de investigación giran en torno a la Didáctica de la Geometría tanto en Primaria como en Secundaria.
  - Proyectos y grupos de investigación:
    - Proyecto de investigación del Ministerio de Economía y competitividad de España: EDU2012-31464
    - GIPEAM –Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática–
    - Grupo Autonómico S119 –Investigación en Educación Matemática (financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo).