

ESTABLECIENDO DIÁLOGOS ENTRE DIFERENTES MARCOS TÉORICOS: DE LOS PROCESOS NARRATIVOS A LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

García, F.J. (1), **Wake, G.** (2)

Universidad de Jaén (1), *Universidad de Manchester* (2)

Resumen

El punto de partida de este artículo es el fenómeno de la co-existencia de diferentes marcos teóricos en didáctica de las matemáticas. Proponemos reformular este fenómeno en términos de un problema científico: el problema del establecimiento de diálogos entre praxeologías de investigación. Iniciamos un diálogo entre dos praxeología de investigación partiendo de una secuencia de clase de una profesora inglesa. El problema de investigación inicial, comprender la acción didáctica de la profesora, fue formulado y abordado, desde la tradición anglosajona, usando el marco de los procesos narrativos. Exploramos aquí los mismos hechos empíricos desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, mostrando que cada praxeología de investigación construye sus propios problemas de investigación y ofreciendo resultados nuevos y complementarios.

Abstract

The starting point of this paper is the phenomenon of the co-existence of different theoretical frameworks in mathematics education reflecting the different cultures in which researchers are situated. We reformulate this phenomenon as a scientific problem: the problem of establishing a dialogue between different research praxeologies. Here a dialogue between two research praxeologies is initiated, using as data a video sequence of an English teacher. The original research problem of understanding a teacher's pedagogic practice was formulated and tackled using a narrative framework from an Anglo-saxon tradition. The same empirical data, was also explored using the Anthropological Theory of Didactics and suggests that each research praxeology builds its own research problems providing new and complementary insights.

Palabras clave: diálogo entre teorías, praxeologías de investigación, procesos narrativos, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Key words: dialogue between theories, research praxeologies, narratives, Anthropological Theory of Didactics.

García, F.J., Wake, G. (2010). Estableciendo diálogos entre diferentes marcos teóricos: de los procesos narrativos a la teoría antropológica de lo didáctico. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 315-326). Lleida: SEIEM.

Introducción

Un fenómeno destacado de la Didáctica de las Matemáticas como dominio científico es la coexistencia de múltiples perspectivas teóricas, dentro de diferentes paradigmas de investigación. Comparación, complementariedad, diálogo, integración o establecimiento de redes son otros términos ampliamente usados por los investigadores y que revelan la complejidad de este fenómeno.

Prediger et al. (2008) proponen una amplia variedad de estrategias para tratar con la diversidad de teorías (Fig. 1), abarcando desde la intersección vacía entre teorías (ignorancia recíproca) hasta la intersección total (unificación global).



FIG. 1. ESTRATEGIAS PARA TRATA LA DIVERSIDAD DE TEORÍAS (PREDIGER ET. AL., 2008, P. 170)

En la literatura especializada, es posible identificar numerosos intentos de problematizar este fenómeno. Por ejemplo, en diferentes números de la revista ZDM-The International Journal on Mathematics Education (vol. 37 (6); vol. 38 (1); vol. 40 (2)) o en congresos como en el PME 29.

Un marco teórico para el diálogo entre teorías

La coexistencia de diferentes marcos teóricos es un hecho que genera fenómenos directamente observables (por ejemplo, explicaciones diferentes del mismo hecho empírico, en ocasiones complementarias, a veces contradictorias, en la mayoría de los casos difíciles de comparar), pero que tiene que ser reformulado como un problema de investigación si realmente queremos abordarlo. Para ello, nos basaremos en el reciente trabajo de Bosch et al. (2010), que adoptaremos como marco teórico de este trabajo.

Según estos autores, cualquier intento de establecer diálogos entre teorías debe partir de un modelo epistemológico previo de la actividad científica, que proponen

en términos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD en adelante). Para ello, parten de un principio epistemológico básico: todo cambio de perspectiva teórica se manifiesta mediante la evolución simultánea de la teoría científica propiamente dicha y de los problemas que ésta estudia. Es decir, las teorías científicas son modelos para formular y abordar problemas que surgen en su dominio de hechos empíricos (en cierta forma, son las teorías las que delimitan este dominio y las que construyen los problemas). Pero, recíprocamente, es el dominio empírico y los tipos de problemas abordados los que caracterizan a las teorías en cada momento, así como su evolución (provocando nuevas necesidades teóricas, revolucionando a veces las teorías). Por ello, proponen hablar de praxeologías científicas o praxeologías de investigación, en lugar de teorías científicas. Esta modelización permite considerar, de forma integrada, la actividad de investigación (esto es, los tipos de problemas que abordan, las técnicas de investigación que usan, y el discurso tecnológico-teórico que describe, justifica e interpreta la práctica científica) y el resultado de la misma (esto es, las teorías científicas)¹.

Junto a los ingredientes explícitos, toda praxeología de investigación (*PI*, en adelante) tiene un conjunto de ingredientes implícitos:

- Una serie de compromisos “*ontológicos*” acerca del tipo de entidades que se deben tomar en consideración y de las relaciones básicas entre ellas.
- Una serie de *normas metodológicas* que hacen referencia a cómo llevar a cabo una investigación, al dominio de hechos empíricos a considerar y al tipo de “respuestas” que serán admisibles. En particular, que delimitan la “unidad de análisis” de cada *PI*.

Ambos caracterizan no sólo lo que la *PI* podrá “hacer” y “producir”, sino también los tipos de fenómenos, de datos empíricos, de problemas, de técnicas, de justificaciones, etc. que no serán admisibles dentro de cada *PI*.

Cuando dos *PI* comparten tanto sus compromisos “ontológicos” como sus normas metodológicas, podemos considerar que ambas pertenecen a un mismo programa o paradigma de investigación. Sin embargo, cuando dos *PI* pertenecen a programas de investigación diferentes, la comparación entre ambos es más compleja, por lo que puede ser necesario considerar ciertos ingredientes más o menos implícitos de las mismas como punto de partida para este diálogo.

Bosch et al. (2010) proponen tres tipos de diálogos entre *PI* que, en principio, no tienen por qué ser del mismo programa de investigación:

¹ De la misma forma que, cuando hablamos de “praxeología matemática” y no solo de “teoría matemática”, estamos describiendo no solo el resultado de *hacer matemáticas* sino también la propia actividad matemática.

- Diálogo entre *PI* que parte de los problemas científicos que abordan: en la medida en que los problemas de investigación se construyen desde cada *PI*, no tiene sentido, en general, abordar un “mismo problema de investigación” desde dos *PI* diferentes. Sin embargo, sí es posible remontarse a un paso previo y considerar aquellos ingredientes (relativamente implícitos) que sustentan la formulación de los consiguientes problemas de investigación. De esta forma, aunque los problemas abordados por dos *PI* serán diferentes, pueden considerarse como más o menos próximos, dependiendo de las relaciones entre los *PI* considerados.
- Diálogo entre *PI* que parte del componente “teórico”: de manera general, no es posible integrar nociones extraídas de una *PI* en otra, puesto que cada noción solo toma sentido en el sistema conceptual concreto y en la problemática específica que le dio origen. Pero, de nuevo, es posible remontarse a una etapa previa para contrastar y comparar los postulados básicos y las unidades de análisis de dos *PI* diferentes, sin perder de vista que este diálogo debe, tarde o temprano, integrar a todos los componentes de las *PI* en juego.
- Diálogo entre *PI* que parte de sus componentes técnico y tecnológico: las técnicas y la tecnología de investigación científica recubren lo que comúnmente conocemos como la “metología de investigación”. Los resultados tecnológicos de cada *PI* pueden ser considerados como los “teoremas”, las “leyes”, los “fenómenos” que constituyen la parte más visible de cada *PI*, resultados que, debidamente generalizados, podrán integrarse en la teoría científica correspondiente. El diálogo entre dos *PI* a este nivel parte de los “resultados provisionales” y de las “metodologías” de uno de ellos para compartirlos, debatirlos y validarlos desde el otro.

En cualquier caso, sea cual sea el punto de partida, un diálogo fructífero entre *PI* debe aspirar a poner en relación todos los componentes de cada *PI* y no solo aquellos que fueron usados como punto de partida.

Problema de investigación: inicio de un diálogo ente teorías a partir de la reformulación de un problema de investigación.

Este artículo parte del trabajo conjunto y de la colaboración entre investigadores y puede ser considerado como el punto de partida de un diálogo más fecundo entre dos praxeologías de investigación: de un lado, la Teoría Antropológica de lo Diádico (Chevallard, 1999; Bosch y Gascón, 2007), de otro lado la teoría de los procesos narrativos (Bruner, 1996).

En este artículo partimos de un proyecto de investigación en el que trabaja el equipo de Manchester² y de una de las profesoras analizadas (Sally). En Wake et al. (2008) se lleva a cabo un análisis de una sesión de clase de Sally (sobre traslaciones en funciones cuadráticas) usando como herramienta teórica la noción de “narrativa” (Bruner, 1996). Desde esta perspectiva el profesor es considerado como el “narrador” que teje un conjunto de episodios a través de los que revela un argumento o trama matemática³ usando diferentes prácticas pedagógicas, con el fin de hacer este argumento accesible a los estudiantes (Wake et al., 2007). En todo proceso narrativo es posible identificar: (i) una dimensión matemática, diferente de (ii) una dimensión “social”, que puede incluir detalles del contexto y los intentos del profesor de humanizar el contenido matemático e involucrar a los alumnos con el mismo a través de uso que hace del discurso y de diferentes prácticas pedagógicas (Fig. 2). La noción de narrativa permite considerar de forma integrada el objeto de enseñanza-aprendizaje (lo matemático) y las pedagogías usadas para tal fin (lo didáctico).

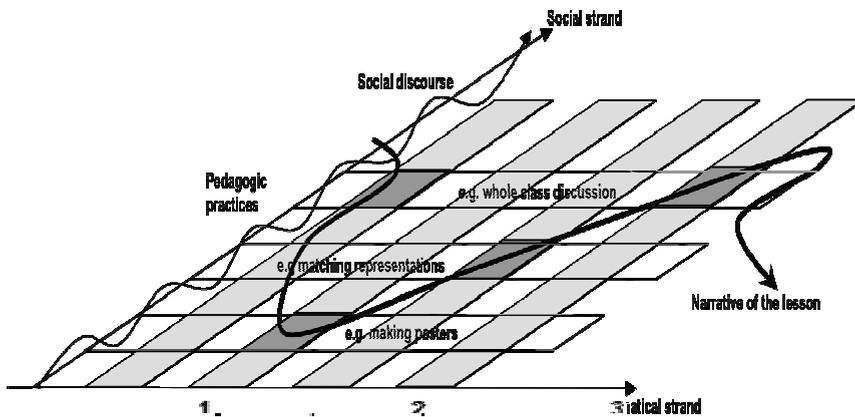


FIG. 2. MARCO BIDIMENSIONAL PARA ANALIZAR LA NARRATIVA EN UNA CLASE DE MATEMÁTICAS (WAKE ET AL., 2007)

En el análisis realizado por Wake et al. (2008) de una sesión de clase de Sally, concluyen que el proceso narrativo de Sally durante esta sesión está principalmente dirigido por la dimensión matemática (los objetos matemáticos que quiere hacer vivir en la clase) mientras que la dimensión social está subordinada a la matemática. En el proceso narrativo en clase de Sally, es posible identificar periodos en los

² *Keeping open the door to mathematically demanding courses in Further and Higher Education*, financiado por el UK Economic and Social Research Council (RES139-25-0241).

³ Del inglés “plot”, *argumento* en el sentido de “asunto o materia de que se trata en una obra” (por ejemplo, una obra literaria o una película).

que la actividad matemática está claramente centrada en el alumno en contraste con otros periodos en los que la actividad matemática está fuertemente controlada por el profesor. Sally intenta construir la dimensión matemática de su proceso narrativo a partir de las producciones matemáticas de sus alumnos pero, al mismo tiempo, y sutilmente, trata de asegurar que éstos den prioridad a “lo correcto”, esto es, a los conocimientos matemáticos que quiere que aprendan y en relación con los cuales actúa como árbitro/juez.

El problema de investigación abordado por estos autores puede describirse en los siguientes términos: en el caso de una profesora que percibe su actividad docente como centrada en el alumno, y en el contexto de una lección, ¿cuáles son las características principales de su proceso narrativo? ¿Qué relación existe entre la dimensión matemática y la dimensión social de su narrativa y hasta qué punto esta relación caracteriza prácticas docentes centradas en el estudiante?

Como ya hemos descrito, el problema se construye en el seno de una *PI* determinada, y es difícilmente trasladable a otra, salvo que ambas sean muy próximas. En el caso de nuestro trabajo, no es posible trasladar directamente este problema a la *PI* de la TAD. Sin embargo, si nos centramos en una de las modalidades de diálogo descritas anteriormente, es posible dar un “paso atrás”, e intentar construir un problema de investigación próximo al anterior dentro de la TAD. En concreto, el modelo de la actividad matemática de la TAD permite ahondar en el análisis de la dimensión matemática, en términos de praxeologías matemáticas, y en su relación con la dimensión social, en términos del proceso de estudio dirigido por Sally y del balance entre los diferentes momentos de estudio.

Desde este “paso atrás”, es posible plantearse:

- ¿Cuál son las características del proceso de transposición didáctica vivido por Sally y sus alumnos?
- ¿Cuál son las características del proceso de estudio gestionado por Sally?

Y, analizados estos:

- ¿Qué relación existe entre las praxeologías matemáticas construidas en clase de Sally y la dimensión matemática de su proceso narrativo? ¿Es posible re-interpretar los fenómenos observados, ofrecer explicaciones diferentes, complementarias, desde cada *PI*?
- ¿Qué relación existe entre la praxeología didáctica de Sally y la dimensión social de su proceso narrativo? ¿Es posible re-interpretar los fenómenos observados, ofrecer explicaciones diferentes, complementarias, desde cada *PI*?

En este artículo, nos limitaremos a analizar brevemente el proceso de transposición didáctica vivido en clase de Sally (cuestión i.) y a establecer vínculos con la dimensión matemática (cuestión 1.).

Proceso de transposición didáctica vivido en la clase de Sally

Desde la perspectiva de la *PI* de la TAD, la unidad mínima de análisis de la clase de Sally, considerada como hecho empírico, contiene todas las etapas del proceso de transposición didáctica. Además, el punto de partida es el cuestionamiento epistemológico de los objetos matemáticos reconstruidos durante la sesión correspondiente.

Primera etapa: la matemática sabia

Dos son los objetos fundamentales sobre los que se articula la infraestructura praxeológica que Sally quiere reconstruir en su clase: la noción de “parábola” y la noción de “traslación vertical y horizontal”.

Un primer cuestionamiento epistemológico del objeto “parábola” nos permite ubicarlo en tres praxeologías diferentes, dependiendo del bloque tecnológico/teórico:

- Modelización funcional: la parábola como gráfica de una función cuadrática.
- Modelización geométrico-analítica: la parábola como conjunto de puntos del plano que verifican una determinada ecuación.
- Modelización geométrico-sintética: la parábola como conjunto de puntos del plano que verifican cierta relación respecto a una directriz y a un foco.

Aunque es evidente que estas praxeologías son no disjuntas, el tipo de problemas y de técnicas que toman sentido en una u otra praxeología son diferentes.

También, la noción de “traslación de una función” puede ser interpretada desde un punto de vista “analítico” o “geométrico”: ciertos cambios en la expresión algebraica de la función, frente a isometría en el plano caracterizada por un vector.

De nuevo ambas interpretaciones tienen elementos en común, pero no son idénticas: los tipos de problemas en los que toman sentido, la naturaleza de las técnicas que emergen y el entorno tecnológico/teórico que las justifica son diferentes.

Segunda etapa: el saber a enseñar

En un breve análisis del saber a enseñar nos centraremos en el currículo del nivel AS inglés⁴. En este, la parábola se integra en un sector denominado “geometría con coordenadas y gráficos”. Una lectura más detallada revela que la modelización funcional del objeto parábola (gráfica de una función cuadrática) es dominante, aunque está precedido de todo un trabajo geométrico-analítico en torno a rectas y circunferencias en el plano. También las traslaciones y simetrías se consideran desde la praxeología analítica.

Tercera etapa: el saber enseñado

A partir de la grabación en vídeo de la clase de Sally es posible reconstruir parcialmente la praxeología matemática enseñada. La cuestión generatriz genérica que da origen a la actividad matemática la podemos formular en los siguientes términos: dada la gráfica de una función f , ¿cuál es su expresión analítica? Esta cuestión define todo un tipo de problemas, que Sally delimita introduciendo dos condiciones:

- Una explícita: “we’re moving away from circles onto quadratic graphs” (6’06’’).
- Otra implícita: en todas las funciones cuadráticas, el coeficiente líder es 1.

De manera general, el tipo de tareas estudiado en clase de Sally es:

T: Dada la gráfica de una función del tipo $f(x) = (x-a)^2 + b$, determinar su expresión algebraica.

En el proceso de estudio gira en torno a diferentes variantes t_i de T , atendiendo a dos criterios:

- El tipo de transformación realizada sobre la gráfica de la función $f(x) = x^2$
- Ejes de coordenadas graduados o no.

Además, Sally introduce, en algunos momentos, una tarea auxiliar (t_i^{aux}), no problemática para sus alumnos, pero con intencionalidad didáctica: *dada un gráfica de una función sobre unos ejes de coordenadas numerados, identificar las coordenadas de algunos puntos en ella.*

La siguiente imagen (Fig. 3) sintetiza la evolución del campo de problemas durante la clase observada.

⁴ Se puede consultar en http://www.ocr.org.uk/download/kd/ocr_10096_kd_1_gce_spec.pdf

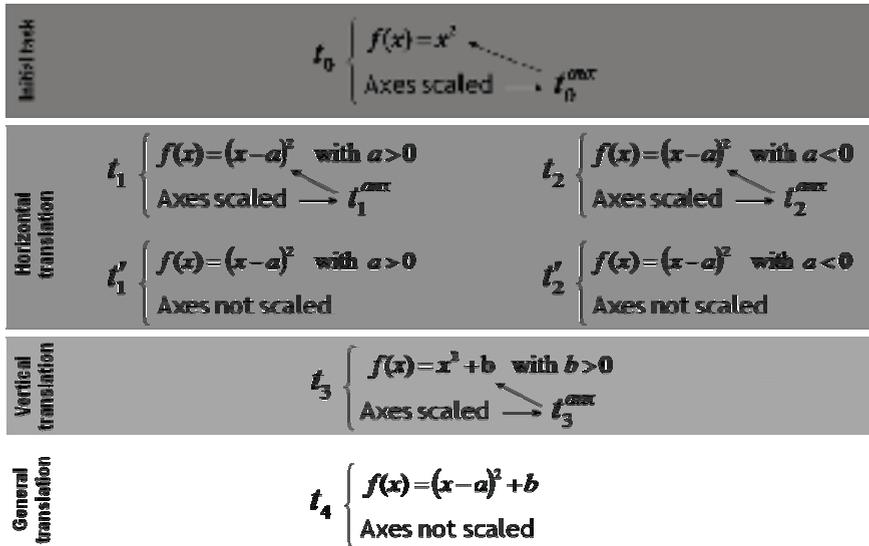


FIG 3. EVOLUCIÓN DEL CAMPO DE PROBLEMAS EN CLASE DE SALLY

Respecto a las técnicas, la siguiente tabla sintetiza el conjunto de técnicas que emergen durante el proceso de estudio analizado:

Tareas	Técnicas
<p>t_1 y t_2 (ejes graduados, traslación horizontal en a unidades)</p>	<p>τ_1 Identificar algunos puntos de la gráfica. Tomar un punto (x, y). Encontrar un punto x' tal que (x', y) está en la gráfica de $f(x) = x^2$ Entonces: $y = (x')^2$ Como $x' = x - a$, entonces la "ecuación" es $y = (x - a)^2$</p>

t'_1 y t'_2 (ejes no graduados, traslación horizontal en a unidades)	τ_2 Identificar el sentido de la traslación: <ul style="list-style-type: none"> • A la derecha: la “ecuación” es $y = (x - a)^2$ • A la izquierda: la “ecuación” es $y = (x + a)^2$ Siendo a una constante estimada.
t_3 (ejes graduados, traslación vertical en b unidades)	τ_3 Identificar la ordenada en el origen (b). La “ecuación” es: $y = x^2 + b$
t_4 (ejes no graduados, traslación horizontal y vertical)	τ_4 Identificar el sentido de cada traslación: <ul style="list-style-type: none"> • Horizontal: izquierda – derecha • Vertical: arriba – abajo La “ecuación” es: $y = (x - a)^2 + b$ (a y b estimados) τ'_4 Idéntica a τ_4 , pero con cierto control sobre la constante b estimada: <ul style="list-style-type: none"> • Decidir el signo de b dependiendo del corte con el eje y. • Escribir la “ecuación”.

En la descripción de las técnicas, llamamos la atención sobre el uso del término “ecuación de la parábola” (referente a una modelización *geométrico-analítica*) en lugar de “expresión algebraica” (en consonancia con la modelización funcional dominante). Consideramos que es algo más que un uso impreciso del lenguaje. En la clase de Sally hay un ir y venir continuo entre ambas praxeologías (que podemos interpretar en términos de gestión de la memoria didáctica: el trabajo previo sobre rectas y circunferencias era de naturaleza geométrico-analítica).

Sin embargo, el logos con el que Sally justifica las técnicas, está mucho más próximo a la *praxeología funcional* (por ejemplo, cuando se refiere a las ordenadas como *imágenes* o a la parábola como gráfico *cuadrático*). De hecho, en la clase hay un uso confuso de términos como “función”, “curva”, “gráfico”, “ecuación de una curva”, “ecuación de una gráfica”, “traslación” o “cambio de variables”. Esto genera conflictos en la actividad del alumno que la maestra tienen que resolver imponiendo su *autoridad matemática*. Por ejemplo, en el minuto 34 un alumno pregunta

si siempre *la ecuación de una parábola tiene que ser de la forma $y=(algo)$* , probablemente recordando el trabajo previo sobre rectas y circunferencias, donde esto no ocurría. La profesora duda, pero es incapaz de construir una respuesta satisfactoria: “bueno, ..., no tiene por qué, ..., bueno, se tiende, ..., usualmente”.

Este hecho es identificado por Wake et al. (2008) como una contradicción entre la concepción que la profesora tiene de su clase (centrada en el alumno) y el férreo control que sin embargo ejerce sobre la actividad de éstos, y es justificado en términos del carácter predominante de la dimensión matemática durante el proceso narrativo observado. Desde la *PI* de la TAD se puede reinterpretar como reflejo de la relación ambigua que continuamente Sally establece entre las praxeologías geométrico-analítica y funcional.

Conclusiones

En este artículo hemos partido de un *fenómeno* observable en el ámbito de la investigación en didáctica de las matemáticas: la co-existencia y competición de diferentes marcos teóricos. El modelo propuesto por Bosch et al. (2010) ofrece un marco de referencia para reformular este *fenómeno* en términos de un problema de investigación: *diálogos entre praxeologías de investigación*.

En este artículo iniciamos un diálogo entre *praxeologías de investigación (PI)*, usando como material empírico el vídeo de una sesión de clase. Hemos justificado la imposibilidad de abordar un mismo problema de investigación desde dos *PI* que obedecen a paradigmas diferentes. Pero, al mismo tiempo, hemos mostrado la posibilidad de “dar un paso atrás” para reformular los problemas científicos que una *PI* aborda en términos de la otra, iniciando de esta forma un diálogo entre ambas *PI*.

En concreto, hemos vinculado el problema “analizar la narrativa de una clase” con el problema “analizar el proceso de transposición didáctica vivido”. Ambos análisis nos han permitido establecer vínculos entre la “dimensión matemática” de una narrativa y las “praxeologías matemáticas” reconstruidas durante el proceso de estudio (cuestión 1).

Postulamos que el análisis de la praxeología didáctica “vívida” en clase de Sally (cuestión ii., no abordada en este trabajo), nos permitirá describir con mayor precisión la *dimensión social en el proceso narrativo* de Sally (cuestión 2.) y su relación con la *dimensión matemática*.

Consideramos que este tipo de diálogo podrá avanzar más allá del nivel de los problemas, incorporando todos los componentes teóricos, tecnológicos y técnicos de ambas praxeologías de investigación.

Referencias

- Bosch, M. y Gascón, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. En L. Ruiz, A. Estepa y F.J. García (eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (385-406). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Bosch, M., Gascón, J. y Trigueros, M. (2010). Diálogo entre las teorías APOS y TAD en torno a las funciones de dos variables. *Conferencia plenaria. III Congreso Internacional de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Sant-Hilari Sacalm (Gerona).
- Bruner, J. (1996). *The Culture of Education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches – First steps towards a conceptual framework. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 40 (2), 165-178.
- Wake, G., Williams, J., Davis, P., Hernández-Martínez, P. y Pampaka, M. (2007) Pedagogic practices and interweaving narratives in As Mathematics classrooms. *Congreso de la British Educational Research Association*. Londres.
- Wake, G. y Pampaka, M. (2008). The Central Role of the Teacher – Even in Student Centred Pedagogies. *32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME32)*. Mexico.