

Estudio histórico – epistémico – didáctico sobre la determinación arquimediana del volumen y el área de la superficie de la esfera

María del Carmen Bonilla Tumialán*

Resumen

En el presente trabajo de investigación, como parte de la tesis de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, se estudia el proceso matemático que desarrolló Arquímedes para determinar el volumen y el área de la superficie de la esfera. Motivados por el deseo de deleitarnos con su proceso lógico vamos descubriendo que la transposición didáctica del teorema en cuestión puede originar procesos de instrucción del volumen y el área de la superficie del cilindro, la esfera y el cono, tanto a nivel primario como secundario; así como procesos de instrucción a nivel superior, tanto para la enseñanza del teorema a alumnos de Matemática, como para la enseñanza intuitiva de la noción de límite a alumnos del nivel superior, pues el proceso matemático desarrollado por Arquímedes, proposición teórica a probar, es parte constitutiva del holosignificado de la noción de límite.

Ubicación del estudio dentro de los niveles de análisis didáctico

El estudio se enfoca desde tres perspectivas: histórica, epistemológica y didáctica. Teniendo en cuenta los niveles de análisis didáctico de un proceso de estudio matemático (ya planificado o bien ya implementado), nos encontramos en un nivel previo en el que abordamos la problemática asociada a la

* Graduada en Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, PUCP

planificación de un proceso de instrucción. Esto que implica caracterizar un significado de referencia del contenido en cuestión y para ello se requiere realizar un estudio histórico-epistemológico-didáctico. (Godino, 2008). Ver figura 1.

NIVELES DE ANALISIS DE LOS PROCESOS DE ESTUDIO MATEMATICOS

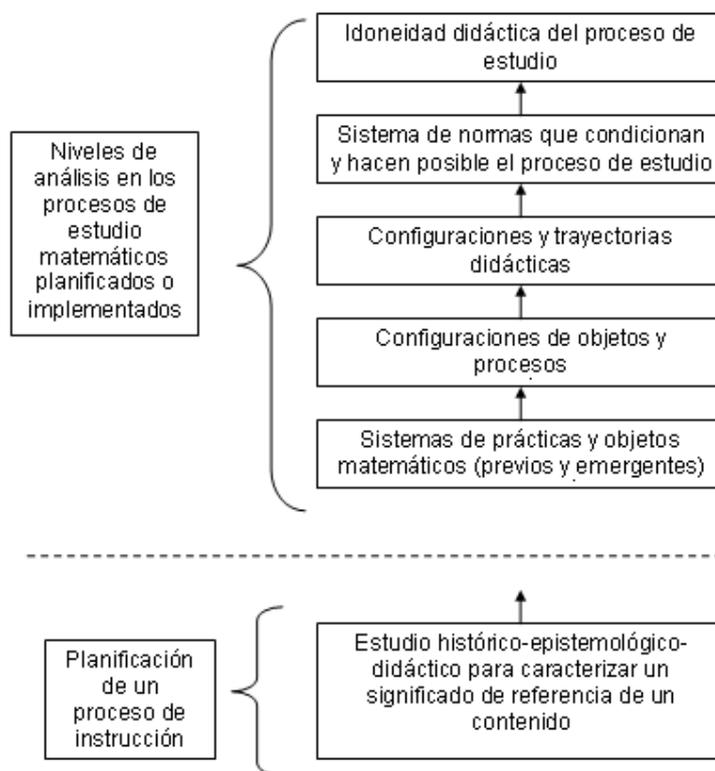


Figura 1

Transposición didáctica de la noción de límite

Pero, ¿qué tan legítimo, filial es el saber enseñado (las propuestas didácticas o procesos de instrucción a planificar) con respecto al saber a enseñar o saber sabio de Arquímedes? Cual detective que ejerce la investigación epistemológica, el concepto de transposición didáctica (Chevallard, 1991) remite al paso del saber sabio al saber enseñado. Para que el sistema didáctico funcione es necesario que el saber satisfaga ciertos requisitos

específicos, el saber deberá haber sufrido ciertas deformaciones, que lo harán apto para ser enseñado. Esas deformaciones producidas en el saber, se podrá observar, obedecen, principalmente, a ciertos criterios que tienen que ver con el nivel cognitivo de los alumnos y al tema del proceso de estudio o de instrucción que se quiere planificar.

Aspectos analizados en la investigación

- En el **análisis histórico** se persigue,
 - Identificar y analizar las condiciones históricas sobre las cuáles Arquímedes determina el volumen y el área de la superficie de la esfera (relación con otras ciencias).
 - Establecer la relación e influencia que tuvieron los trabajos de los matemáticos predecesores en el pensamiento de Arquímedes.
 - Comprender el proceso matemático desarrollado por Arquímedes para determinar el volumen y el área de la superficie de la esfera. Utilizando el software Cabri 3D se construye la demostración mecánica como se aprecia en la figura 2.

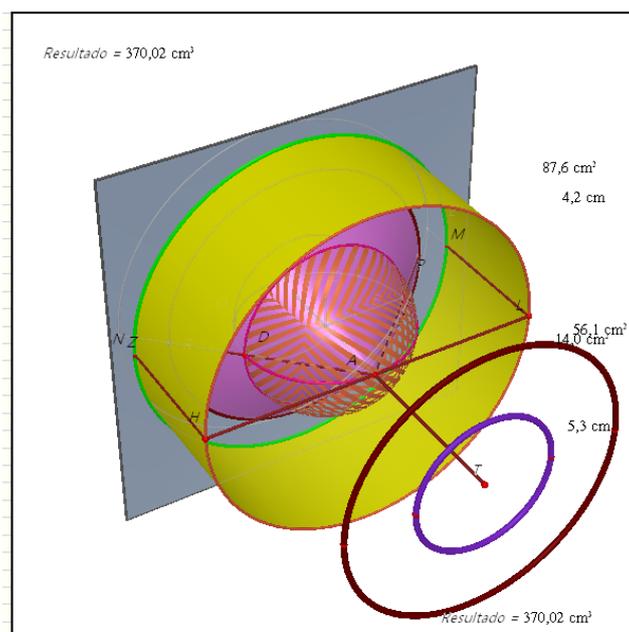


Figura 2

- Analizar la proyección que tuvo el trabajo de Arquímedes en el desarrollo del pensamiento matemático contemporáneo, en especial en el pensamiento analítico.
- En el **análisis epistémico** se persigue,
 - Elaborar las configuraciones epistémicas asociadas a las demostraciones mecánica y matemática que desarrolló Arquímedes para determinar el volumen y el área de la superficie de la esfera.
 - Elaborar la configuración de los objetos y procesos matemáticos ligados a lo abstracto y lo concreto: Materialización-idealización, descomposición-reificación, generalización-particularización presentes en las demostraciones antes señaladas.

Al inicio de la demostración mecánica se establecen asunciones previas, las cuales se pueden analizar dentro de la configuración de objetos y procesos matemáticos, como se aprecia en la figura 3.

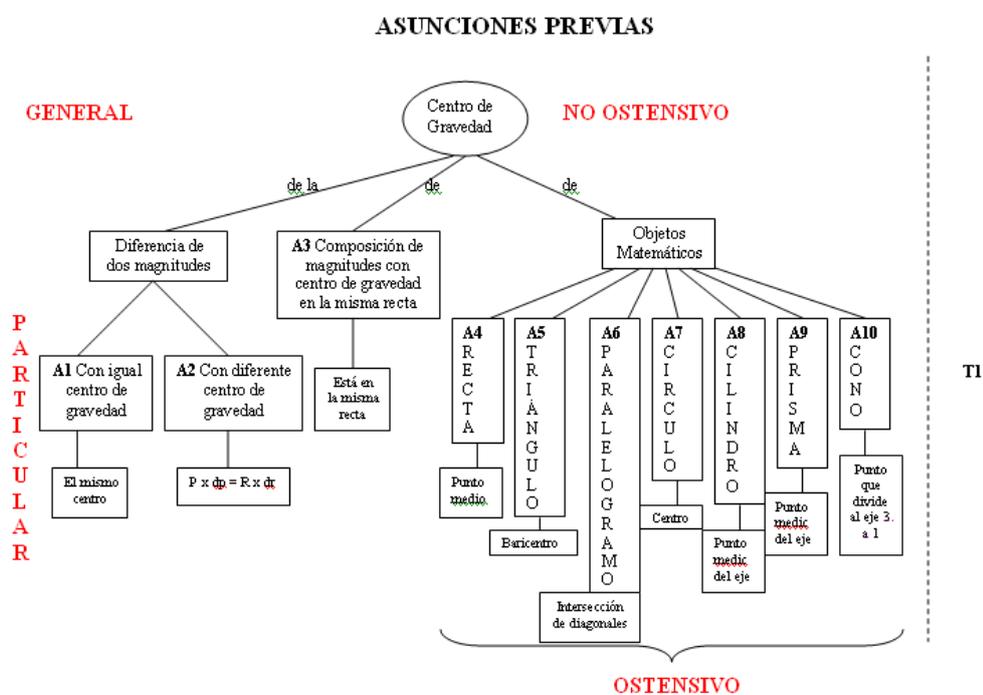


Figura 3

- El análisis didáctico pretende,
 - Elaborar una propuesta didáctica sobre la relación entre los volúmenes del cilindro, la esfera y el cono a nivel primario, tal como ha sido concretizada en la participación de niños de Primaria en la Experiencia de una institución educativa en el año 2005 (Figura 4).

OBJETIVOS

PRESENTACION

Los alumnos del 3° "A" nos complacemos en darles a conocer un teorema interesante, que el mismo Arquímedes, matemático griego que vivió hace 2500 años, consideró el más bonito e importante.

De esta manera aprenderemos matemática experimentalmente, como jugando, de una forma práctica y divertida

Y lo que es más importante entenderemos como se generan las superficies de revolución, y como se relacionan los volúmenes de los cuerpos redondos, de una manera sencilla como lo hicieron los matemáticos griegos hace muchos miles de años.

Diana
Gianella
Iván

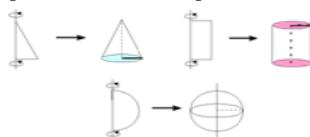
- * Conocer las superficies de revolución: el cilindro, el cono y la esfera.
- * Aprender a generar esas superficies de revolución.
- * Encontrar que relación existe entre los volúmenes del cono, cilindro y esfera que tienen igual base y altura.
- * Aprender matemáticas realizando experimentos.

Materiales:

- Un cilindro de mica
- Un cono de cartulina duplex
- Una esfera de plástico
- Un embudo
- Quinua
- Un motor eléctrico
- Un triángulo rectángulo, un rectángulo y una semicircunferencia para las generatrices.

PROCEDIMIENTO

* Con el motor, el rectángulo, triángulo rectángulo y una semicircunferencia vamos generando las superficies de revolución, identificando los ejes y las generatrices de cada superficie.



* Llenamos el cono de quinua, y lo vaciamos en la esfera. Nos damos cuenta que necesitamos dos conos de quinua para llenarla.

* Asimismo, necesitamos 3 conos de quinua para llenar el cilindro.

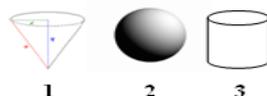


Figura 4

- Elaborar una propuesta didáctica sobre los volúmenes y áreas de la superficie del cilindro, la esfera y el cono a nivel secundario. Este trabajo ha sido expuesto en el VI Congreso Regional de educación matemática realizado en Chiclayo en Agosto del 2008.
- Señalar un bosquejo de cómo podría elaborarse una propuesta didáctica que busque la comprensión de la demostración mecánica que elaboró Arquímedes para hallar el volumen y el área de la superficie de la esfera, por parte de alumnos de la Especialidad de Matemáticas a nivel superior.
- Señalar un bosquejo de cómo podría elaborarse una propuesta didáctica que desarrolle la idea intuitiva de la noción de límite en alumnos del nivel superior, a partir de la demostración matemática del teorema antes mencionado, parte constitutiva del holosignificado de la noción de límite.

Método de trabajo

La metodología empleada es cualitativa. Desde el punto de vista histórico, se orienta la búsqueda hacia la lectura y el análisis de textos de historia de la matemática en los cuales se describe y analiza los antecedentes históricos y las condiciones en las que surgió el pensamiento arquimediano, los procesos mecánico y matemático desarrollados por Arquímedes para determinar el volumen y el área de la superficie de la esfera, así como su influencia posterior en el surgimiento del pensamiento analítico y de la noción de límite. La investigación epistemológica requiere del estudio y el análisis del Enfoque Ontosemiótico, y utilizando estas herramientas teóricas se elabora el análisis epistemológico de los objetos y procesos presentes en el objeto de estudio. El análisis didáctico emplea la transposición didáctica como herramienta que vela por el rigor epistemológico de los procesos de instrucción planificados, en base al estudio de la determinación arquimediana del volumen y el área de la superficie de la esfera.

Referencias

Arquímedes. (1986) *El Método* (L. Vega y M.L. Puertas, Trads.). Madrid, España: Alianza Editorial, S.A.

Arquímedes; Eutocio. (2005). *Tratados I. Comentarios* (P. Ortiz, Trad.). Madrid, España: Editorial Gredos, S.A.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: Editorial Horsori SL.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008), *Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico*. Recuperado el 20 de setiembre del 2008 del sitio web de la Universidad de Granada:

<http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/niveles%20 analisis%20 didactico%204Julio08.pdf>

Godino, J.D., Wilhelmi, M., Bencomo, D. (2005). *Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática. Aplicación a una experiencia de enseñanza de la noción de función*. Recuperado el 28 de agosto del 2006 del sitio web de la Universidad de Granada:

<http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/criterios idoneidad funcion.pdf>

González, P. (2004). *La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza*. *Suma*, 45 (2), 17-28.

González, P. (2006). A un siglo del descubrimiento de “EL MÉTODO” de Arquímedes por Heiberg [Versión electrónica], *La Gaceta de la RSME*, 9 (3), 715-744.

Thiele, R. (2003). Antiquity. En: H. Jahnke (Ed.) *A history of analysis. History of Mathematics. Vol. 24*. Providence, RI, EE.UU.: American Mathematical Society.

Wilhelmi, M., Godino J., Lacaste, E. (2004). *Configuraciones Epistémicas asociadas a la Noción de Igualdad de Números Reales*. Recuperado el 20 de agosto del 2006 del sitio web de la Universidad de Granada:
http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/igualdad_wilhelmi.pdf