

Significado y comprensión de la distribución normal en un primer curso de estadística dirigido a estudiantes de Economía

Miriam Luisa Carpio Arias*

Resumen

La problemática de la presente investigación es la identificación de los factores que condicionan su enseñanza y aprendizaje de la Distribución Normal en el nivel superior, considerando que la enseñanza implica la participación del estudiante en las comunidades de prácticas que soportan los significados institucionales y que el aprendizaje supone la apropiación del estudiante de dichos significados. Esto bajo el supuesto que debe haber un acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales.

Problema de investigación

En la actualidad existen temas correspondientes a la Estadística y Probabilidad que forman parte tanto del currículo escolar, como del universitario. Esto ha sido el resultado del crecimiento de la importancia y utilidad de estos contenidos en el ejercicio profesional de distintas especialidades. Esta situación es nueva ya que hasta hace solo unos años sólo se enseñaba Estadística Descriptiva, con el único objetivo de organizar y presentar los datos recolectados de una experiencia, sin considerar la interpretación de estos resultados. Hoy se incluyen en los planes de estudio conceptos relacionados con la Estadística Inferencial que permiten analizar e interpretar los datos organizados

* Universidad Católica de San Pablo, Arequipa.

mediante un proceso de toma de decisiones y solución de problemas.

En particular, dentro del área de la Estadística Inferencial se encuentra la Distribución normal, cuya relevancia se debe a que muchos fenómenos (biológicos, psicológicos, físicos, entre otros) pueden ser modelados adecuadamente por dicha distribución, además de resultar ser una buena aproximación de otras distribuciones de probabilidad para muestras de tamaño suficientemente grande, resultado que está garantizado por el Teorema del Límite Central. Siendo esta distribución de tanta importancia, se considerará, como problemática de estudio, la identificación de los factores que condicionan su enseñanza y aprendizaje en el nivel superior. La problemática de la presente investigación es la identificación de los factores que condicionan su enseñanza y aprendizaje de la Distribución Normal en el nivel superior, considerando que la enseñanza implica la participación del estudiante en las comunidades de prácticas que soportan los significados institucionales y que el aprendizaje supone la apropiación del estudiante de dichos significados. Esto bajo el supuesto que debe haber un acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales.

Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.

La investigación se fundamentará en el Enfoque Ontosemiótico sobre el conocimiento y la instrucción matemática (EOS), (Godino, Batanero y Font, 2008). El punto de partida de dicha teoría es la formulación de una ontología de los objetos matemáticos donde se definen conceptos teóricos de práctica, objeto y significado, lo que permitirá analizar la génesis y articulación de las facetas personales e institucionales sobre el significado de los objetos matemáticos.

El EOS considera como *práctica matemática* a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero,

1994, p.334). Para el significado de los objetos matemáticos se consideran los *sistemas de prácticas* (operativas y discursivas) que manifiestan las personas para resolver tipos de situaciones problemáticas; este sistema de prácticas puede ser realizada por una persona o compartidas por el seno de una institución, lo que determina los significados personales e institucionales.

En los significados institucionales se proponen los siguientes tipos:

- Implementado: es el proceso de estudio implementado por el docente.
- Evaluado: subsistema que utiliza el docente para evaluar el aprendizaje.
- Pretendido: sistema planificado incluido en el proceso de estudio.
- Referencial: se utiliza como referencia para la elaboración del significado pretendido.

En cuanto a los significados personales se tiene:

- Global: es la totalidad del sistema de prácticas personales que se puede manifestar ante un objeto matemático.
- Declarado: son las prácticas efectivamente expresadas en las evaluaciones.
- Logrado: son las prácticas manifestadas y que están conforme las establecidas institucionalmente.

De los sistemas de prácticas tanto operativas y discursivas emergen nuevos objetos matemáticos. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, se consideran *objetos institucionales*; si estos sistemas corresponden a una persona se consideran *objetos personales*. Se presenta seis tipos de entidades primarias de objetos matemáticos: Situaciones-problemas, lenguaje, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Las relaciones entre los objetos con el uso de la función de signo, que se refiere a la idea de la función semiótica, permiten un mejor análisis del significado en términos de los sistemas de

prácticas. Estas funciones son las correspondencias que se dan entre un antecedente y un consecuente que se establecen por un sujeto, bajo un criterio o código de correspondencia.

Cuando se realiza un análisis más fino de la actividad matemática del tipo macrodidáctico, es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias. Estos objetos se relacionan entre sí formando *configuraciones* que son las redes de los objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, además de sus relaciones que se establecen. Si estas redes son de objetos institucionales entonces son epistémicas, si son de objetos personales entonces son cognitivas. Las configuraciones y los sistemas de prácticas son herramientas teóricas que permiten describir los conocimientos matemáticos; la constitución de los objetos primarios, tiene lugar mediante los procesos matemáticos que son interpretados como secuencias de prácticas.

Este análisis de los elementos contextuales y procesos cognitivos/epistémicos, será el foco de atención del trabajo a realizar, considerando el desarrollo y evolución de EOS. Aunque el trabajo de Tauber (2001) también se basó en este marco teórico, en la actualidad se cuentan con más elementos que permite realizar un mejor análisis sobre el significado y comprensión de la Distribución Normal.

En cuanto a la comprensión, el EOS no lo considera como un proceso mental, sino como una competencia; es decir, un sujeto comprende un objeto matemático cuando lo usa de manera competente en las prácticas que no suelen ser las habituales a las típicas.

Metodología empleada

Esta investigación utilizará el marco metodológico empleado por Alvarado (2007), en el que se considera el uso de los elementos contextuales y el análisis de los procesos cognitivos o epistémicos. Todo ello con el propósito de realizar un análisis cualitativo de los elementos de significado tanto institucional como personal del objeto matemático, distribución normal. Se considerará un análisis epistémico de textos universitarios para

fijar el significado institucional de referencia, un análisis de la secuencia de enseñanza para determinar el significado institucional implementado y un análisis del significado personal efectivamente construido por los estudiantes por medio de los resultados de un cuestionario escrito. Para este análisis cualitativo se utilizarán los elementos contextuales de los significados de los objetos matemáticos del EOS. Adicionalmente, se hará uso de algunos elementos cuantitativos al momento de recoger las respuestas correctas e incorrectas del cuestionario de evaluación que será aplicado. Así, la primera etapa de la investigación corresponderá a un enfoque descriptivo y exploratorio, mientras que la segunda etapa corresponderá a un enfoque interpretativo y explicativo.

Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados

A continuación se presenta algunas partes de los capítulos que se desarrollaron en esta investigación.

Significado institucional de referencia

En este capítulo el objetivo es describir el significado institucional de referencia de la distribución normal utilizada en el desempeño de la secuencia de enseñanza que se analiza para esta investigación, siguiendo la metodología del trabajo de Alvarado (2007). Primero se considera los libros que el profesor utiliza para la preparación de las clases y que están presentes en la bibliografía del curso, seguidamente se el contenido de los capítulos relacionado con la distribución normal, clasificando los distintos elementos de significado y colocando algunos ejemplos para una mejor comprensión de esta clasificación.

Es así que se tendrá una información de los elementos de significados institucionales de referencia que serán utilizados tanto por el profesor como por los alumnos en esta secuencia de enseñanza.

E1: Definición de la distribución de probabilidad normal

Se plantea una definición de la distribución de probabilidad normal considerando que la variable aleatoria X tiene como

función de densidad una fórmula caracterizada por los parámetros μ y σ^2 , sin especificar quienes son estos parámetros y denotando que la variable X tiene dicha distribución por medio de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Junto a la definición se presenta la gráfica de campana donde se nota la forma de la función de densidad normal

Definición. Se dice que la variable aleatoria continua X tiene distribución de probabilidad normal con parámetros μ y σ^2 , y se denota por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$

Su gráfica es la “campana” de la figura 7.2

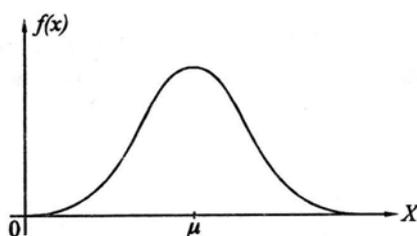


Fig. 7.2 Gráfica de la función de densidad normal

La distribución normal es el modelo de probabilidad fundamental de la estadística pues, tiene diversas aplicaciones y sirve como una **buena aproximación** de otras distribuciones, sean estas simétricas o asimétricas o sean estas discretas o continuas.

Significados Implementados de la Distribución Normal

En este capítulo se analiza la trayectoria didáctica que se llevó a cabo por medio de la observación de su desarrollo. Este curso fue dictado en el curso de estadística para economistas en la Universidad de Piura en la sede Lima. La muestra de alumnos que participo en este desarrollo fue de 45, que en su mayoría fueron alumnos de economía, con algunas excepciones de alumnos de administración.

Durante la observación de la secuencia de enseñanza, se tomo nota de algunas preguntas y dudas de los alumnos, de interacciones extras que surgieron en el desarrollo, se recogieron soluciones de algunas actividades desarrolladas en clase, además que se grabaron las clases expositivas del profesor.

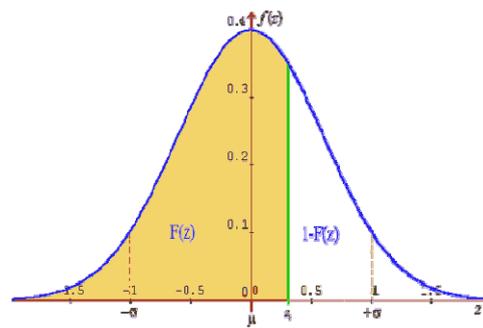
La finalidad de este capítulo es de describir el significado institucional implementado para compararlo con el significado institucional previsto.

Primera diapositiva



Distribución normal

Se dice que la variable aleatoria continua X tiene distribución normal o gaussiana, con media μ y varianza σ^2 , la cual denotaremos como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su función de densidad esta dada por:



Función de Densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ media	$\pi = 3,1415\dots$
σ dev. típica	$e = 2,7182\dots$
σ^2 varianza	X abscisa

El profesor explica la notación utilizada en toda esta distribución y sus elementos: media, desviación estándar, varianza. Indica que es necesario tener dos parámetros que son la media y la desviación estándar para el cálculo de probabilidades.

Significados Personales de los Estudiantes

En la finalización de la secuencia de enseñanza, se lleva a cabo una evaluación de los conocimientos adquiridos por los estudiantes en cuanto a la distribución normal, donde se les presenta cuatro problemas en el que tendrán que resolver utilizando los elementos de significados enseñados. Es así que con el análisis de estos resultados se puede caracterizar la

comprensión lograda por los estudiantes por medio de un contraste de los significados implementados y evaluados con los significados logrados.

Las preguntas que se van a analizar son aquellas en donde se presenta la utilización de la distribución normal y se espera que para resolver estas preguntas, el alumno debe de considerar los pasos que se considerarán en las soluciones planteadas por el profesor. Veamos la siguiente pregunta planteada en la evaluación con su respectiva solución experta:

La utilidad en miles de soles por la venta de cierto artículo, es una variable aleatoria con distribución normal. Se estima que en el 5% de las ventas la utilidad sería menor que 6.71 mil soles, mientras que en el 1% de las ventas la utilidad sería mayor que 14.66 mil soles. Si se realizan 16 operaciones, calcule la probabilidad de q-ue la utilidad promedio esté entre 10 y 11 mil soles.

Solución

Sea la variable aleatoria

$$X = \{\text{Utilidad por la venta de un artículo en miles de soles}\}^{P(X < 6,71) = 0,05}$$

$$P\left(Z < \frac{6,71 - \mu}{\sigma}\right) = 0,05$$

$$\mu - 1,645 \sigma = 6,71. \tag{1}$$

$$P(X > 14,66) = 0,01$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{14,66 - \mu}{\sigma}\right) = 0,01$$

$$P\left(Z \leq \frac{14,66 - \mu}{\sigma}\right) = 0,99$$

$$\frac{14,66 - \mu}{\sigma} = 2,33$$

$$\mu + 2,33\sigma = 14,66 \tag{2}$$

Resolviendo (1) y (2), se tiene que $\mu = 10$ y $\sigma = 2$.

Para $n = 16$ se considera la variable aleatoria

$\bar{Y} = \{\text{utilidad promedio por 16 transacciones}\}$

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_{\bar{Y}} = 10; \sigma_{\bar{Y}}^2 = \frac{2^2}{16}\right)$$

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_{\bar{Y}} = 10; \sigma_{\bar{Y}}^2 = 0,25\right)$$

La probabilidad pedida estaría dada de la siguiente forma:

$$P(10 < \bar{Y} < 11) = P(0 < Z < 2)$$

$$= P(Z < 2) - P(Z < 0)$$

$$= 0,9772 - 0,5$$

$$= 0,4772$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la utilidad promedio esté entre 10 y 11 mil soles es de 0,4772.

Resultados de la evaluación

Caso 1

3. $X = \{\text{utilidad en miles S/}\}$ $X \sim N(\bar{x}, \sigma_x^2)$

(1) $P(X < 6,71) = 0,05$ (2) $P(X > 14,66) = 0,01$

$n = 16$ (operaciones)

hallar $P(10 \leq \bar{X} \leq 11)$

de (1) $P\left(Z \leq \frac{6,71 - \bar{x}}{\sigma_x}\right) = 0,05$ de (2) $1 - P\left(Z \leq \frac{14,66 - \bar{x}}{\sigma_x}\right) = 0,01$

$\frac{6,71 - \bar{x}}{\sigma_x} = -1,645$ $0,01 = P\left(Z \leq \frac{14,66 - 8,355\sigma_x}{\sigma_x}\right)$

$6,71 + 1,645\sigma_x = \bar{x}$ $0,99 = P\left(Z \leq \frac{14,66 - 8,355\sigma_x}{\sigma_x}\right)$

$8,355\sigma_x = \bar{x}$ $2,33 = \frac{14,66 - 8,355\sigma_x}{\sigma_x}$ $14,66 - 2,33\sigma_x = \bar{x}$

$2,33\sigma_x = 14,66 - 8,355\sigma_x$ $10,685\sigma_x = 14,66$

$\sigma_x = 1,372$ $\bar{x} = 11,463$

$X \sim N(11,463, (1,372)^2)$

$P(10 \leq \bar{X} \leq 11) = P(\bar{X} \leq 11) - P(\bar{X} \leq 10)$

$= P\left(Z \leq \frac{11 - 11,463}{1,372}\right) - P\left(Z \leq \frac{10 - 11,463}{1,372}\right)$

$= P(Z \leq -0,33) - P(Z \leq -1,06)$

$0,3745 - 0,1440$

$P(10 \leq \bar{X} \leq 11) = 0,2261$

22,61%

El procedimiento de estandarización es correcta a pesar que se observa errores en la simbología con respecto a la media μ por \bar{x} , las propiedades de probabilidad son correctas. Un error que puede ser arrastrado desde mucho antes, es al utilizar su argumento algebraico:

$$6.31 + 1.645 \sigma_x = \bar{x}$$

$$8.355 \sigma_x = \bar{x}$$

Lo que no permite encontrar los verdaderos valores de la media y de la desviación.

No hay la definición de la nueva variable como la utilidad promedio de las 16 transacciones, en cuanto a los parámetros para esta nueva variable no están claros, ya que la varianza debe ser dividida entre “n” que en este caso es 16. Lo que implica que no esta clara la propiedad reproductiva de la normal.

Contraste entre los distintos significados

El significado implementado de la secuencia de enseñanza de la distribución normal en términos generales, está de acuerdo con el significado institucional pretendido, salvo algunas actividades de clase no se realizaron completas por falta de tiempo, por lo que se tuvieron que reducir o dejar como tarea para la casa. En el significado institucional implementado se presentaron situaciones que no estaban en claro para los alumnos y que eran necesarios para la comprensión del tema. Por esto se puede decir que la distribución normal presenta una riqueza y complejidad, que involucra varios elementos de significados conectados, no sólo elementos propios de la distribución normal, sino también de conceptos previos estadísticos y de cálculo que el estudiante debe de recordar.

En cuanto a los significados personales con respecto al significado institucional, se puede decir que se observaron una gran variedad de elementos de significado utilizados en forma correcta por los alumnos. El lenguaje simbólico en general fue correctamente utilizado, con algunas excepciones donde se presenta la confusión de la notación de la varianza con la

desviación estándar. La representación gráfica a destacado para una mejor comprensión de la probabilidad en la función normal, ya que se ha observado en la solución de los problemas dichas gráficas. Los procedimientos más utilizados por los alumnos correctamente son la estandarización y su inversa, el uso de la tabla y cálculo de probabilidades, que en general no presentaron mayor dificultad, sólo en casos excepcionales.

La propiedad que presentó inconvenientes en una cifra significativa de estudiantes, es la propiedad reproductiva de la normal, presentando una mayor confusión en la varianza de la distribución muestral de la media.

Los argumentos fueron mayormente algebraicos siendo en algunos casos apoyados por la representación gráfica para justificar sus afirmaciones.

Se observa que los alumnos tienen una buena comprensión con cuestiones donde los elementos de significados son muy próximos a los principales conceptos, lo que no sucede cuando se presentan cuestiones donde se tengan que relacionar con otros tipos de elementos que no son específicos de la distribución normal, o cuando se presenta mayor complejidad incluyendo varias variables, como es el caso de la propiedad reproductiva o el teorema del límite central, el alumno presenta conflictos semióticos, esto puede ser dado porque los alumnos no han practicado mayor número de actividades donde se ponga en juego la relación de estos varios tipos de elementos.

Referencias bibliográficas

Alvarado, H. (2007). Significados del Teorema Central del Limite en la Enseñanza de la Estadística en Ingeniería. *Universidad de Granada*. Directora: C. Batanero.

Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, M. V. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. *Cuadrante*, 10 (1), 59-92.

D'Amore, B. y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la

Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2): 191-218.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.*

Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas. URL: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D. (2003). Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2003). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3): 237-284.

Ortiz, J. J. (2002). La Probabilidad en los Libros de Texto. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. ISBN 84-699-6841-6. Resumen actualizado de la Tesis Doctoral: Ortiz de Haro, J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato. Universidad de Granada.* Director: C. Batanero y L. Serrano.

Tauber, L. (2001). La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos. Universidad de Sevilla. Directoras: C. Batanero y M.V. Sánchez.