Función como modelo matemático elemental, un estudio en registros de representación

Carlos Mediver Coaquira Tuco*

Resumen

El presente trabajo que damos a conocer tiene el propósito fundamental de analizar el estudio de las funciones como modelos matemáticos a partir de los cambios en registros de representación que presenta este concepto. Presentamos un ejemplo en cual se presenta los diferentes registros de represtación que propone R. Duval.

I. Pertinencia del tema abordado

En la universidad, el rendimiento académico de la mayoría de estudiantes inscritos en cursos de Matemática es bajo. Los estudiantes construyen un conocimiento matemático parcial por conceder demasiada importancia a los desarrollos algorítmicos y al manejo procedimental y mecánico de los aspectos simbólicos de los objetos matemáticos, hecho que también ha sido comprobado a través de nuestra experiencia docente.

Esto permite señalar que los educandos manejan rutinariamente los símbolos, pero no logran otorgar significado a los contenidos matemáticos. Esta por esta razón, en este estudio presentamos una alternativa para el estudio de funciones como objeto de modelización matemática, con soporte en la teoría de registros de representación.

---

* Universidad Peruana Unión, Juliaca

II. Marco teórico

2.1 Función

En el proceso de Enseñanza y Aprendizaje del Análisis Matemático, el concepto de función, es uno de los conceptos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora, es también, un concepto complejo debido a que contiene una multiplicidad de registros y genera diferentes niveles de abstracción y de significados, tal como lo menciona Ramírez (2007).

Hitt (2000), menciona que a través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo.

2.2 Registros de representación

El aprendizaje de las Matemáticas constituye un capo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como el razonamiento, la resolución de problemas, etc. La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distinta a los del lenguaje natural o de las imágenes.

Raymond Duval (1993), analiza y enfatiza la importancia de la representación en Matemáticas y establece que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella. Por ejemplo, una palabra escrita, una notación, un símbolo o una gráfica representan a un objeto matemático. Asimismo, un registro está constituido por signos tales como símbolos, íconos o trazos, es decir, son medios de representación.

Este autor afirma que sólo por medio de las representaciones es posible una actividad sobre los objetos matemáticos y se caracteriza como un sistema de representación, el cual puede ser un registro de representación si permite tres actividades cognitivas, a saber:

a) La presencia de una representación identificable como una representación de un registro dado. Por ejemplo: el enunciado de una frase o la escritura de una fórmula.

b) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.

c) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Esta actividad cognitiva es diferente e independiente a la del tratamiento.

En esta teoría se considera que la comprensión integral de un concepto está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación.

Bonacina, Haidar, Quiroga, Sorribas, Teti y Paván (2004), hacen referencia que el concepto de función admite una gran variedad de diferentes registros de representación, por lo que en este estudio se interesa en analizar los distintos registros que se abordan en la aprehensión del concepto de función Los registros que se toman como referentes al analizar las diversas formas de representar el concepto de función, son los siguientes:

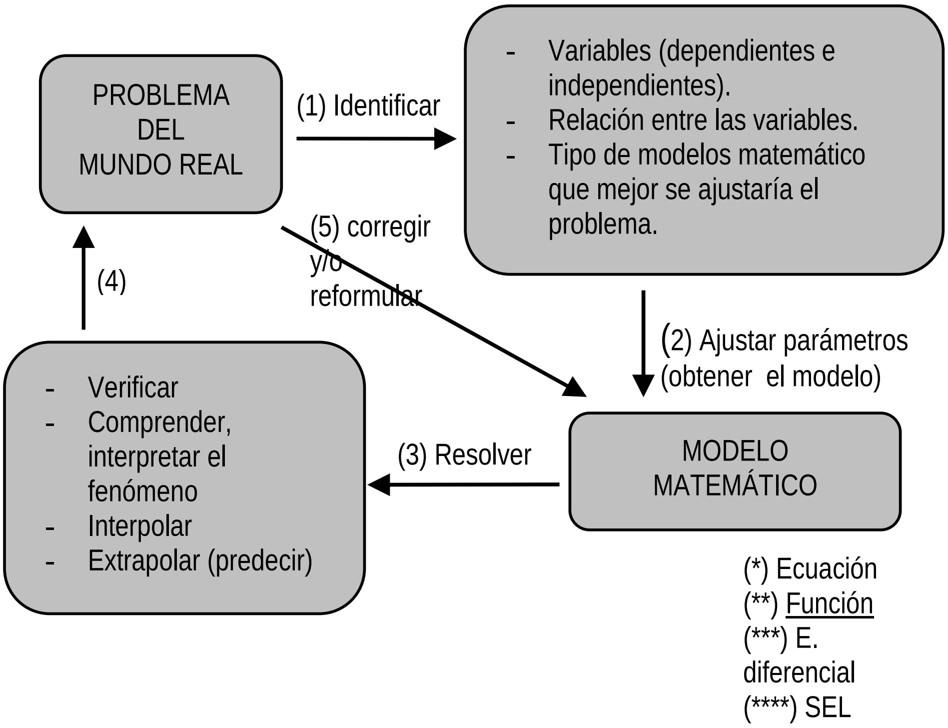
- Registro simbólico
- Registro analítico
- Registro verbal
- Registro tabular
- Registro conjuntista
- Registro figural
- Registro gráfico

En consecuencia, para la comprensión del concepto de función, el profesor debe ayudar a los estudiantes a reconocer en cada registro cuándo se trata o no de una función. Por otro lado, la conversión entre estos registros conlleva a la superación de distintas dificultades.

2.3 Modelación Matemática

Un modelo matemático es una descripción matemática de un fenómeno del mundo real, que la obtención de tales modelos requiere de cierta rutina ó método. Así normalmente primero se procede a identificar las variables que intervienen, el carácter de las mismas (dependiente o independiente), las relaciones entre ellas, para, a partir de allí, organizar el trabajo a los efectos de hallar una función (ó ecuación) que las vincule.

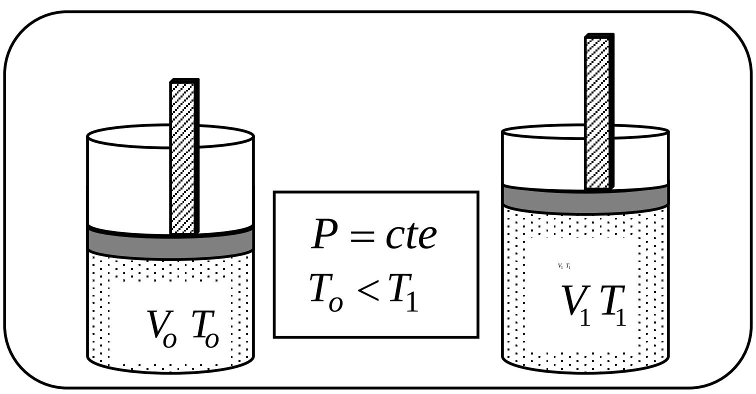
En el siguiente esquema propuesto por Bonacina, Haidar, Quiroga, Sorribas, Teti y Paván (2004), se ilustra el proceso del modelado matemático.



III. Experiencia

Observación de un fenómeno natural: "Un gas que se encuentra en un recipiente deformable, a presión constante, sometido a cambios de temperatura presenta cambios de volumen".

Problema: ¿Puede ser cuantificada la dependencia Temperatura-Volumen?



PRIMERO: Proponemos un debate a partir de la palabra cambio (el volumen: ¿aumenta ó disminuye?); de las variables del problema, rol y relevancia de cada una de ellas, etc. Concluimos que: "para $P = cte$; aumento de temperatura implica aumento de volumen".

SEGUNDO: Insistimos en lo útil de acudir a un esquema o representación gráfica de la cuestión a resolver, aun cuando este sea muy simple o elemental.

TERCERO: Buscamos el modelo matemático. En este momento es cuando empiezan a surgir las cuestiones más significativas en cuanto a la matemática; por ejemplo, aparece aquí un error muy común en relación a dos variables en las que el aumento de una determina el aumento de la otra.

Una cuestión muy importante es relativa a los datos: Experimentales vs. Teóricos. Al alumno le cuesta entender la relación entre el modelo matemático y la realidad; que el modelo propone una situación idealizada, que interpreta los hechos bajo ciertas simplificaciones.

Así, y de acuerdo a este análisis, pusimos al alcance de los alumnos una serie de valores de temperatura y volumen, resultado de mediciones realizadas en forma experimental.

$T(ºC)$	0	50	100	150	200	250	300
$V(cm^3)$	20.0	22.7	27.3	30.1	34.7	38.6	42.2

Una vez puesto en marcha el proceso que intentamos que el alumno trabaje en forma independiente, orientando las actividades a través de las preguntas, por ejemplo:

- ¿Qué concepto matemático comprende este problema?
- ¿Cuál es el rol de cada magnitud variable?

- ¿Cómo pasamos de la representación numérica a la representación analítica de la función?
- ¿Siempre podemos pasar de una representación a otra?, etc

Si el alumno es capaz de reconocer que está ante una función, el problema es un problema motivador. Si no puede hacerlo el problema está muy lejos de él y se generan otras situaciones distintas de las que se deseaba trabajar (las cuales deben ser atendidas). Si el alumno reconoce que está ante una función, su atención puede centrarse en el nudo del problema: hallar la ley de la función (ó modelo matemático para un gas ideal)

Los alumnos responden las preguntas y desarrollan las actividades que van surgiendo:

- grafican los puntos de la tabla en un sistema coordenado
- del gráfico leen que: los puntos se disponen sobre una recta
- reconocen el tipo de función que este hecho caracteriza: Función Lineal.
- recuerdan la ecuación general de la función lineal, $y = mx + h$

Finalmente, el alumno procede a traducir el fenómeno al lenguaje matemático, cuidando de dotar de sen*tido* a las variables.

	TEORÍA	EXPERIENCIA	RESULTADO
Var. Independiente	x	T	
Var. Dependiente	y	V	
Función	$y = mx + h$	$V = mT + h$	
m = pendiente	$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	$m = \dfrac{\Delta V}{\Delta T}$	$m = \dfrac{V_f - V_i}{T_f - T_i} = \dfrac{22.2}{300} = 0.074$
h = ordenada al origen	$x = 0 \rightarrow y = h$	$T = 0 \rightarrow V = 20$	$h = 20$
Conclusión			$V = 0.074T + 20$

Modelo Matemático

Este es también el momento de evaluar si los objetivos propuestos en la etapa de fijación y consolidación del concepto función lineal, se han logrado. O sea, si se ha alcanzado el dominio de las técnicas algebraicas, si se ha comprendido cabalmente el significado (geométrico y físico) de los coeficientes; particularmente el de m como razón de cambio:

Teoría $\rightarrow$ m $\rightarrow$ variación de y por cada cambio unitario de x

Experiencia $\rightarrow$ 0.074 $\rightarrow$ variación de volumen por cada grado de temperatura

Procedemos luego a la validación y generalización del modelo.

Por último planteamos los siguientes interrogantes, el resultado obtenido:

- ¿será válido para cualquier gas?
- ¿para cualquier condición inicial en que el mismo se encuentre? o sea ¿siempre que se caliente un gas a

presión constante este se expandirá a razón de 0.074 $cm^3/^{o}C$?

- ¿Coincide esto con lo visto en Química?

Sin duda nos encontramos ante otro problema que dejamos para otra ocasión. Particularmente para cuando el alumno haya visto la ecuación para un gas real en Química (materia paralela a la nuestra) y haya estudiado derivadas y funciones.

Referencias

Bonacina y otros (Junio, 2004). Las Funciones en la Resolución de Problemas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 17. CLAME. En: http://www.clame.org.mx/alme.htm

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Figueroa Garcia R. (2004). Cálculo 1. Editorial América.´

Godino, J. D., (1998), Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática, Comunicación presentada en el VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica. En: http://www.ugr.es/~jgodino.

Hitt F. (2000). Funciones en Contexto. Proyecto sobre Visualización Matemática. Departamento de Matemática Educativa. México.

Ramirez G. Elsa (2007). Tratamiento didáctico de las funciones reales de una variable: proceso de modelación. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 20. CLAME. En: http://www.clame.org.mx/alme.htm