

EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Huerta, M. P., Cerdán, F.

Universidad de Valencia

Resumen

En el marco de una investigación más amplia, en este trabajo mostramos parte de los resultados obtenidos en la actuación de una muestra de estudiantes del master de formación del profesorado de matemáticas de educación secundaria resolviendo problemas ternarios de probabilidad condicional. Identificamos dos mundos en los que los estudiantes sitúan la resolución de dichos problemas y estudiamos las dificultades de los problemas relacionadas con dichos mundos.

Abstract

In this piece of work we show part of the results about the observation of a sample of pre-service mathematics teachers solving ternary problems of conditional probability. We identify two worlds in which students place the resolution of these problems and we study the difficulties of these problems related to those worlds.

Palabras clave: Resolución de problemas, problemas de probabilidad condicional, dificultades de los problemas, educación secundaria, educación terciaria.

Key words: Problem solving, conditional probability problem solving, difficulties of problems, secondary and tertiary education.

Introducción

Shaughnessy (1992) relacionaba las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas con las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística afirmando que “teaching probability and statistics is teaching problem solving”.

Antes, Freudenthal (1970b) ya hacía una advertencia:

“In no mathematical domain is blind faith in techniques more often denounced than in probability; in no domain is critical thought more often required”, que recogen Jones y Thornton (2005) sugiriendo que los investigadores interesados en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad hagamos caso de ella (p. 84). “Probability applies in everyday situations, in games, in data processing, in insurance, in economics, in natural sciences. There is no part of mathematics that is universally applied, except, of course, elementary arithmetic”, nos recordaba también Freudenthal (1970b p. 167). “It should be made clear that the demand for technically formalized mathematics in probability is very low. Once you have mastered fractions, you can advance quite far in probability; a bit of algebra suffices to formulate the principles of probability in a general way” (Freudenthal 1970a, p. 583).

Por otra parte, Shaughnessy (1992) ya proponía un acercamiento a la enseñanza de la probabilidad a partir del tratamiento de datos y, así, sugería, refiriéndose al problema del taxi, su resolución mediante tablas de contingencia con frecuencias para una población total N de taxis (p. 471). La pregunta del problema, una probabilidad condicional, se resuelve así asignando una razón entre los números correspondiente de la tabla, fruto de un análisis de los mismos. A esta manera de resolver el problema le llamamos resolución aritmética del problema o resolución en el mundo de la aritmética. La distinguimos así de la que tiene lugar si el problema se ubica en lo que llamamos mundo teórico de la probabilidad y que supone la traducción del problema a sucesos y probabilidades y a las relaciones precisas, tanto entre sucesos como entre probabilidades, que resuelven el problema. Jones, Langrall y Mooney (2007) refieren trabajos de investigación en los que se insinúa que la propuesta de Shaughnessy, la resolución del problema en el mundo de la aritmética, resulta ser más eficiente para los estudiantes, pues se concluye que los estudiantes manejan mejor ítems de frecuencias condicionales que ítems de probabilidad condicional (p. 928), al menos en la enseñanza secundaria.

Nuestra línea de investigación lleva, desde hace algún tiempo, interesándose por el estudio de la resolución de problemas de probabilidad condicional, en particular los problemas ternarios de probabilidad condicional (véase por ejemplo, Cerdán y Huerta (2007), Lonjedo (2007); Carles y Huerta (2007), Huerta (2009)).

Así, nos interesamos por:

1. el estudio de los problemas: estructura, clasificación y lecturas analíticas de los problemas, situaciones y contextos en los que se presentan y significado de los conceptos implicados en la probabilidad condicional atados al contexto y,
2. en el estudio de la resolución de dichos problemas por estudiantes de diferentes niveles educativos.

Así, en Carles, y otros (2009) pueden verse los primeros resultados sobre el estudio de la resolución de problemas de probabilidad condicional de nivel N0 en estudiantes de secundaria obligatoria.

En este trabajo mostraremos los primeros resultados obtenidos al observar a estudiantes para profesores de matemáticas resolviendo problemas de la familia de problemas ternarios de probabilidad condicional. Identificamos como los futuros profesores sitúan la resolución de dichos problemas en mundos diferentes, el de la aritmética y el de la probabilidad, y mediremos las dificultades de dichos problemas relacionadas con el mundo en el que se han resuelto. Mostraremos esto prestando atención a las resoluciones de dos de los problemas que forman parte de un cuestionario más amplio.

Objetivos

Nuestra investigación¹ tiene por objetivo general investigar la resolución de una familia particular de problemas de probabilidad condicional. En particular, estudiamos la influencia que la estructura, el contexto y el formato de los datos tiene sobre las resoluciones de los estudiantes. Precisamente por eso, los problemas se formulan de la manera en la que así lo hacemos y como consecuencia las resoluciones tienen lugar en mundos diferentes.

Los objetivos, pues, en esta comunicación son los siguientes:

- Observar los mundos posibles en los que los estudiantes para profesores sitúan la resolución de los problemas.
- Identificar y medir niveles de dificultad de los problemas considerados en relación con el mundo en el que se ha situado dicha resolución.

Esta comunicación no plantea ninguna hipótesis previa que contrastar. Es posible, en cambio, que los resultados observados puedan proporcionar, eso sí, hipótesis futuras.

¹ Proyecto EDU2008-03140, financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Método

Hemos dicho en otros trabajos (Lonjedo, 2007; Carles y otros, 2009; Huerta, 2009) que la resolución de problemas de probabilidad condicional depende, entre otros, de factores como los que siguen y que son tomados como variables de la tarea (Kulm, 1979) a lo largo de todo nuestro proyecto de investigación, tomando los valores que se muestran:

- Estructura de los problemas, divididas en:
 - Cuatro familias N_i , para $i= 0, 1, 2, y 3$, dependientes del número de condicionales conocidas,
 - Subfamilias para cada N_i , dependientes del número de probabilidades absolutas (o característica C_i , para $i= 0, 1, 2$) y de la pregunta del problema (o tipo T_i , para $i= 1, 2, 3$, dependiendo de si se pregunta por una probabilidad condicional, una probabilidad absoluta o una intersección, respectivamente).
- Contextos:
 - Estadístico-social
 - Estadístico-salud
 - Test de diagnóstico salud/manufactura
- Formato de datos:
 - Frecuencias absolutas (cardinales de conjuntos)
 - Porcentajes
 - Probabilidades

En consecuencia, todo problema que forme parte del cuestionario está perfectamente identificado por su familia de pertenencia, el contexto y el formato de datos utilizado.

Por otra parte, el estudio teórico de dichos problemas nos ha permitido identificar problemas con lecturas aritméticas y con lecturas algebraicas, lo que desde el punto de vista de su dificultad pueden tener una evidente influencia. Finalmente, la experiencia previa con los problemas de nivel N0 (Carles y otros, 2009) nos permitió determinar que unos contextos son más influyentes que otros lo que, a la hora de confeccionar cualquier cuestionario, se tuvo en cuenta en, por ejemplo, no formular un problema con lectura algebraica en un contexto que resultó muy influyente en el estudio previo. Así está construido, por ejemplo, el problema 3.

La tabla siguiente resume los valores que toma la variable de la tarea para los problemas que son objeto de esta comunicación:

Problema	Estructura	Formato de datos	Contexto	Lectura
Problema 1	N0C2T1	Porcentaje	Estadístico-salud	Aritmética
Problema 3	N3C0T2	Porcentaje	Estadístico-social	Algebraica

TABLA 1. CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS

Los problemas 1 y 3 a los que hace referencia la tabla anterior (Tabla1) se enuncian a continuación:

Problema 1:

El 20% de los ciudadanos se vacunan para prevenir el contagio de la gripe A. Por otra parte, el 15% de los ciudadanos contrae la gripe A y un 70% ni se vacuna ni contrae la gripe A. Entre los ciudadanos que no se vacunan, ¿qué porcentaje contrae la gripe A?

Problema 3:

De las chicas del instituto, el 37.5% usa gafas. De los chicos, el 28.6% usa gafas. De los que no usan gafas, el 50% son chicos. Entre los estudiantes del instituto, ¿qué porcentaje son chicas?

El cuestionario con siete problemas, del cual estos dos forman parte como problemas 1 y 3, fue administrado a 44 estudiantes del Master de formación del profesorado de secundaria, en su especialidad de matemáticas, en la Universitat de València. El cuestionario fue administrado durante una de las sesiones del curso sobre la materia Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, empleando entre una hora y hora y media en completarlo. Los estudiantes no fueron advertidos de ello ni recibieron instrucciones precisas al margen de las necesarias cuando se administra un cuestionario. La participación fue voluntaria sin que ella afectara al normal desarrollo del curso.

No todos los estudiantes del master que participaron en esta investigación tienen como titulación de origen la Licenciatura de Matemáticas. Un porcentaje, que no podemos determinar con exactitud ahora, tienen su origen en ingenierías y otras licenciaturas pero, en todo caso, el estudiante puede acreditar que en su formación universitaria ha recibido un mínimo de 18 créditos de matemáticas con contenidos

en Álgebra, Cálculo, Geometría y Estadística y Probabilidad. Así pues, es bastante probable, salvo quizás algunas excepciones, que la totalidad de los estudiantes cursaron en algún momento de su vida académica lecciones sobre probabilidad condicional.

Con el fin de dar cuenta de los objetivos en esta comunicación, las variables a las que haremos referencia y su organización para posterior codificación de la información obtenida de las resoluciones de los estudiantes, pueden verse en la tabla siguiente (Tabla 2).

Estudiante	Abordado	Mundo	Lecturas (si es el caso)	Resultado	Número
1	sí (1), no (0)	Probabilidad (1), aritmética (0)	Aritmética (0) Algebraica (1)	sí (1), no (0)	Número correcto (1) incorrecto (0)

TABLA 2. VARIABLES OBSERVADAS Y SU CODIFICACIÓN

Mediante la variable abordado estudiamos la dificultad apreciada del problema. Decimos que un problema se ha abordado si el estudiante deja algún tipo de rastro de su resolución. La variable mundo nos informa de en qué mundo sitúan los estudiantes la resolución de los problemas, si en el mundo teórico de la probabilidad (1) o en el mundo de la aritmética (0). En el caso del problema 3, de cuya lectura analítica se deduce que existe una lectura algebraica del mismo, observamos, además, si los futuros profesores hacen dicha lectura y utilizan incógnitas para hallar la solución del problema. Con las variables resultado (el estudiante emite una respuesta a la pregunta del problema) y número (la respuesta es numérica y el número es correcto o incorrecto) estudiamos las dificultades del problema y de la solución del problema, variables que medimos como hicimos en (Carles, et alii. 2009):

$$\text{Dificultad apreciada del problema (DAP)} = 100 - \left(\frac{\text{abordados}}{\text{estudiantes}} \right) \times 100$$

$$\text{Dificultad (global) del problema (DP)} = 100 - \left(\frac{\text{resultado}}{\text{estudiantes}} \right) \times 100$$

$$\text{Dificultad del problema (DPR)} = 100 - \left(\frac{\text{resultado}}{\text{abordado}} \right) \times 100$$

$$\text{Dificultad de la solución del problema (DSP)} = 100 - \left(\frac{\text{número}}{\text{abordado}} \right) \times 100$$

El tratamiento que de los datos se hace aquí es meramente descriptivo, ya que en la actualidad estos datos están sujetos a un análisis más detallado.

Resultados

La tabla siguiente (Tabla 3) resume, de un modo global, los resultados obtenidos en el problema 1, en frecuencias absolutas y distribuidos según el mundo en el que los estudiantes han situado la resolución del problema:

Problema 1	Abordado	Resultado		Número	
		<i>Sí</i>	<i>No</i>	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>
Mundo					
Probabilidad (P)	18	15	3	5	10
Aritmética (A)	26	22	4	9	13
Total (N=44)	44	37	7	14	23

TABLA 3. TABLA RESUMEN DE LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA 1, EN FRECUENCIAS

Con estos datos absolutos, para una dificultad apreciada del problema ($DAP = 0$) nula, y una dificultad del problema baja ($DP = 15.1\%$), la dificultad de la solución del problema es elevada ($DSP = 62.2\%$) resultado así que podemos calificar este problema de problema difícil para los estudiantes del master.

Por otra parte, los futuros profesores, mayoritariamente, encuentran que es más razonable situar la resolución del problema en el mundo de la aritmética ($A=59.1\%$) que en el mundo teórico de la probabilidad ($P=40.9\%$). Tomados así los estudiantes, divididos en ambos mundos, las dificultades del problema son similares, $DP(A)=15.4\%$ para los primeros frente al $DP(P)=16.7\%$ para los segundos, pero llegar a una solución correcta del problema resulta más difícil para las resoluciones en el mundo de la probabilidad $DSP(P) = 66.7\%$ que en las resoluciones en el mundo de la aritmética $DSP(A) = 59.1\%$.

En el caso del problema 3, los resultados globales, en frecuencias absolutas, puede verse en la tabla siguiente (Tabla 4):

Problema 3	Abordado	Lectura del problema		Resultado		Número	
		<i>Algebraica</i>	<i>Aritmética</i>	<i>Sí</i>	<i>No</i>	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>
Mundo							
Probabilidad (P)	13	5	8	7	6	3	4
Aritmética (A)	31	11	20	20	11	7	13
Total (N=44)	44	16	28	27	17	10	17

TABLA 4. RESUMEN DE LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA 3 EN FRECUENCIAS

Otra vez, para una dificultad apreciada del problema nula ($DPA = 0$), la dificultad del problema ($DP = 38.6\%$) es mayor que en el problema 1 ($DP = 15.1\%$), siendo la dificultad de la solución del problema alta ($DSP = 77.7\%$) tanto si se toma como muestra todos los estudiantes que han abordado el problema como si se considera a aquellos que finalmente dieron un resultado a la pregunta del problema ($DSPR = 63\%$). Estamos hablando, pues, de un problema que resultó ser francamente difícil para los estudiantes del master, futuros profesores de matemáticas.

Esta vez, los estudiantes volvieron a escoger el mundo de la aritmética como más razonable para resolver el problema ($A=70.45\%$) que el mundo de la probabilidad ($P=29.55\%$), con una distancia mayor que para el problema 1. Incluso, las diferencias entre las dificultades del problema, según el mundo, son mayores: $DP(A) = 35.5\%$ frente al $DP(P) = 46.1\%$, lo que convierte la resolución de este problema más difícil en el mundo de la probabilidad que en el mundo de la aritmética. Pero, dar una solución correcta al problema invierte esta tendencia favorable al mundo de la aritmética, siendo $DPS(P) = 57.1\%$ y $DSP(A) = 65\%$, moviéndonos siempre en los números altos de las dificultades.

Si el problema 1 tiene una lectura aritmética, el problema 3 su lectura es, por el contrario, necesariamente algebraica. Los datos nos informan de que el 63.3% de los estudiantes no hacen una lectura algebraica del problema, lo que les conduce irremediablemente a no dar una respuesta al problema o bien a dar un número incorrecto como respuesta al porcentaje preguntado. Y esto se produce por una consciente o inconsciente interpretación equivocada de, al menos, uno de los datos conocidos del problema, generalmente una probabilidad de la intersección en lugar

de una probabilidad condicionada, lo que le permite hacer una lectura aritmética del problema, aunque sea de otro problema distinto del planteado. Aquellos que situaron la resolución en el mundo de la probabilidad optaron mayoritariamente por hacer una lectura no algebraica (61.5%), en porcentaje similares a quienes lo hacen desde la aritmética (64.5%).

Análisis de los resultados

Es verdad que a la luz de los resultados anteriores puede ser más provechoso el análisis de errores que el de las dificultades de los problemas, análisis que aún esta en curso. Pero, para los objetivos de este trabajo, el análisis de las dificultades tiene también su interés por el hecho de que no solamente hablamos de problemas escolares (fácilmente identificables en los libros de texto de secundaria y bachillerato, si exceptuamos acaso el problema 3) sino que porque sus resolutores son futuros profesores de matemáticas de secundaria. Tal vez, esto nos permita reflexionar sobre su formación de cara al futuro.

No hay duda de que el problema 3 es más difícil que el problema 1, si esta afirmación la basamos en las dificultades medidas de los problemas y que admiten comparación:

Problema	DAP	DP	DSP	A	P	DP(A)	DP(P)	DSP (A)	DSP (P)
P - 1	0	15.1	62.2	59.1	40.9	15.4	16.7	59.1	66.7
P - 3	0	38.6	63	70.45	29.55	35.5	46.1	65	57.1

TABLA 5. COMPARACIÓN DE LAS DIFICULTADES DE LOS PROBLEMAS, EN PORCENTAJES

A parte del contexto en el que los problemas están formulados, el problema 3 es teóricamente más complejo que el problema 1. A esta complejidad le asociamos una dificultad teórica por el número de datos condicionales conocidos en el primero. De esta forma, la posible hipótesis de que a mayor número de datos condicionales conocidos en el enunciado del problema más dificultad tiene el problema, puede ser una hipótesis razonable que no debe descartarse en futuras investigaciones.

En trabajos previos hemos visto como el contexto es un factor influyente en la resolución de estos problemas (Carles et alii, 2009). Precisamente, para mitigar la influencia conjunta de contexto+estructura en los problemas, decidimos formular el problema 3 en el contexto menos influyente y el problema 1 en el más influyente.

Tal vez esta sea la razón de que las dificultades para encontrar la respuesta correcta de los problemas sea tan similar para ambos (62.2% frente a 63%).

El caso es que la dificultad apreciada por los estudiantes de la dificultad de los problemas es nula pues todos los estudiantes abordan su resolución después de realizar sus lecturas. No hay problemas en blanco. Ahora bien, aun siendo mayoritario el porcentaje que dan una respuesta, es sorprendente que hayan porcentajes del 15.1% y del 38.6% de estudiantes que no lleguen a dar ninguna respuesta a la pregunta del problema. Esto nos permite pensar que o bien la lectura del problema no es intencionada ni analítica o bien que, partiendo de los datos conocidos, no pueden producir con sentido nuevos datos y que si lo hacen no ven la manera de llegar a dar una respuesta a la pregunta del problema.

Cuando mayor dificultad tiene el problema los futuros profesores prefieren, en un porcentaje mayor, situarlo en el mundo de la aritmética (70.45% frente a 59.1%). Una razón plausible de este hecho puede hallarse en que las dificultades que los estudiantes tienen para llegar a dar una respuesta el problema crecen si el mundo escogido es el mundo de la probabilidad (de 35.5% crece hasta el 46.1% en el problema 3 y del 15.4% crece al 16.7% en el problema 1). No obstante, el problema con lectura algebraica presenta menor dificultad, si de dar una respuesta correcta al problema se trata, en el mundo de la probabilidad que en el mundo de la aritmética (57.1% frente al 65%) invirtiéndose, sin embargo, los porcentajes de dificultad de la solución para el problema 1 (decrece del 66.7% hasta el 59.1%).

Finalmente, cerraremos este análisis prestando atención a las lecturas del problema 3. Siendo un problema con una lectura algebraica, resulta que el 63.6% de los estudiantes no reconocen el carácter algebraico del mismo. Esto supone que, aquellos estudiantes que dieron una solución al problema interpretaron los datos de manera errónea. El error más común está generado por la interpretación del dato condicional como una medida de la intersección de dos conjuntos o de dos sucesos, ampliamente referido en múltiples investigaciones. Siendo así, e interpretando, por ejemplo, las tres condicionales como tres intersecciones, el resolutor convierte un problema de nivel N3, como el problema 3, en un problema de nivel N0, como el problema 1 y cuya lectura es necesariamente aritmética.

Conclusión

Los problemas de los que hemos hablado aquí son problemas “difíciles” para los futuros profesores de matemáticas. Lo expresamos así porque, en cada caso, menos del 40% de los futuros profesores obtienen una respuesta correcta a los problemas. Más difícil aún si el problema tiene una lectura algebraica.

De los problemas que hemos hablado aquí son problemas que unos pueden considerar de probabilidad y otros no. La discusión se centrará en el hecho de que la palabra probabilidad o azar o aleatorio estén presentes o no, o que ni siquiera una

situación de incertidumbre esté creada en el problema. Sin embargo, el hecho de que esas palabras no aparezca en el texto de los problemas no ha impedido que un porcentaje elevado, aunque no mayoritario, de futuros profesores hayan ubicado su resolución en el mundo teórico de la probabilidad, mientras que el resto lo haya tratado de resolver en el mundo de la aritmética. Así, para los primeros el problema era de probabilidad mientras que para los segundos el problema era y tenía solución en el terreno de la aritmética. La distancia, sin embargo, entre ellos puede intuirse como mínima si confluyen en una situación de incertidumbre.

Por otra parte, en lo que los futuros profesores, en su gran mayoría, han tenido dificultades ha sido en resolver problemas en los que el número de datos conocidos es el mínimo necesario para responder a la pregunta del problema, tres; y que el formato de los números para los datos son porcentajes, números relativos que expresan relaciones parte-todo o parte-parte (en términos de probabilidades: probabilidades absolutas o probabilidades condicionales).

La descripción que hemos hecho, tanto de los problemas en sí mismos como en su relación con los resolutores, puede servirnos para reflexionar sobre la formación de los futuros profesores de matemáticas. Si los problemas que hemos descrito les son difíciles, no menos lo serán para sus futuros alumnos de secundaria, de tal manera que o bien difícilmente serán enseñados o bien serán reformulados con más datos de los que realmente son necesarios, perdiendo así el problema toda su riqueza y todo su potencial. Las sugerencias de Saughnessy y las advertencias de Freudenthal son aún pertinentes y actuales. No deberían caer en el olvido.

Referencias

- Carles, M. y otros (2009). Influencia de la estructura y el contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0 . Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (eds.) *Actas del XIII Simposio de la SEIEM, Investigación en Educación Matemática XIII*, 173-185. Santander:
- Carles, M., Huerta, M. P. (2007). Conditional probability problems and contexts. The diagnostic test context. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 5*, 702-710.
- Cerdán, F.; Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, 19 (1), 27-62.
- Freudenthal, H. (1970a). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1970b). The aims of teaching probability. En L. Rade (Ed.), *The teaching of probability and statistics*, 151-168. Stockholm: Almqvist & Wiksell.

- Huerta, M. P. (2009). On Conditional Probability Problem Solving Research —Structures and Context, en M. Borovcnik & R. Kapadia (2009), Special issue on “Research and Developments in Probability Education”. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4 (3), 163-194.
- Jones, G. A.; Langrall, C. W.; Mooney, E. S. (2007). Research in Probability (Responding to Classroom Realities). En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on mathematic teaching and learning*, 909-956. NCTM.
- Jones, G. A.; Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School (Challenges for Teaching and Learning)*, 65-92. New York: Springer.
- Kulm, G. (1979). The classification of Problem-Solving Research Variables. En G. A. Golding & C. E. McClintock (Ed.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*, 1-22. ERIC
- Lonjedo, M. A. (2007). *Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución*. Tesis Doctoral. Universitat de València.
- Saughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 465-494. New York: Macmillan.