Conocimientos sobre Números Fraccionarios en Profesores de Educación Básica

María José Ferreira da Silva*

Resumen

A aprendizagem de números fracionários pelas crianças não vem acontecendo, nos últimos anos, de forma a instrumentá-las, para o trato no cotidiano e para a aprendizagem de mais Matemática. No entanto, as pesquisas, em sua maioria, focam o estudante ou os professores das séries iniciais deixando na margem os professores das séries finais do Ensino Fundamental. Dessa forma, procuramos investigar que Organização Didática (segundo a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard) esses professores constroem para o ensino de números fracionários para a quinta série durante seis meses em uma formação continuada. A metodologia adotada foi a pesquisa-ação no sentido de investigação colaborativa, visto que propicia a interação entre pesquisador e professores em formação e a observação em ação. Procuramos evidenciar na formação tipos de tarefas que associam as concepções de números fracionários: parte-todo, medida, quociente, razão e operador, além de possíveis técnicas para resolução dessas tarefas e o discurso tecnológico-teórico que as justificam. De modo geral, verificamos que os professores constroem para a quinta série Organizações Matemáticas para números fracionários muito rígidas que associam, sobretudo a concepção parte-todo em contextos de superfícies, mobilizando a técnica da dupla contagem das partes e, com menos incidência, a concepção de razão

* Pontifícia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.

mobilizando a mesma técnica. A formação explicitou a necessidade dos professores desenvolverem autonomia e reflexão a respeito do conteúdo e de suas práticas docentes.

Introdução

Nosso interesse pelo ensino e aprendizagem dos números fracionários vem de longa data e teve início com um diagnóstico em alunos do Ensino Fundamental em que detectamos vários tipos de erros, alguns tratados em Jahn et al (1999). Essas constatações nos encaminharam para a pesquisa com professores em que verificamos que professores em exercício e em formação inicial apresentavam algumas das dificuldades detectadas nos alunos. Os futuros professores polivalentes, após a formação, mostraram algumas mudanças no tratamento com números fracionários, como pode ser visto em Silva (1997).

Passando a nos dedicar à formação continuada de professores de Matemática do Ensino Fundamental pudemos observar, mais de perto, os saberes desses professores. No projeto: *Estudo de Fenômenos do Ensino-Aprendizagem de Noções Geométricas* (2000 – 2002, financiado pela FAPESP) tínhamos como objetivo discutir, matemática e didaticamente, alguns tópicos de Geometria com professores especialistas das séries finais do Ensino Fundamental, e constatamos que, embora tenham mudado de postura perante algumas situações, pareciam ter mais facilidade em lidar com material manipulativo e que a formação inicial que receberam, provavelmente, não se preocupou em lhes proporcionar situações que os fizessem desenvolver compreensão de enunciados, vocabulário próprio, tratamento de informações etc. o que os impossibilitavam, muitas vezes, de solucionar um problema com sucesso. (Manrique, Silva, Almouloud, 2002, p. 16). No decorrer dessa pesquisa, já nos questionávamos a respeito do tratamento que esses professores dariam ao ensino dos números fracionários e também, a respeito de como desenvolver uma formação contínua que fosse eficaz para que os professores promovessem uma melhor aprendizagem para seus alunos.

Essas dúvidas e constatações nos levaram a planejar uma formação para um grupo de professores de Matemática dos ciclos finais do Ensino Fundamental, que haviam participado do projeto anterior e que agora faziam parte do projeto: *O Pensamento Matemático no Ensino Fundamental*, com o objetivo de tratar do ensino e da aprendizagem dos números fracionários privilegiando o acesso a alguns estudos já realizados sobre o assunto, como pode ser visto em Silva (2005).

Problemática

O estudo teve como objetivo prático a formação de um grupo de professores de Matemática e permitiu seu acesso a resultados de pesquisa sobre números fracionários pertinentes à quinta série baseados nas concepções tratadas por Behr e outros (1983): parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Enquanto pesquisa buscou observar as concepções de números fracionários e da aprendizagem de seus alunos, mobilizados pelos professores na elaboração de uma seqüência de ensino, bem como suas dificuldades e autonomia durante essa construção.

O nosso problema se ramifica de acordo com os três objetivos centrais da formação: o objeto matemático números fracionários, as concepções dos professores a respeito de seus alunos e as ações formativas que possam possibilitar um melhor conhecimento didático do professor a respeito do tema. Para isso nos baseamos na Teoria antropológica do Didático (TAD) que auxilia na modelagem das diversas concepções de números fracionários e permite analisar, descrever e estudar as práticas institucionais por meio de uma organização do saber matemático. Dessa forma a Organização ou Praxeologia Matemática (OM) de um conteúdo matemático seria o objetivo que o professor deve alcançar quando ensina e o suporte para a elaboração da Organização Didática (OD) desse conteúdo que será colocada em prática em sala de aula. Segundo Chevallard (2002) a TAD se divide em dois blocos. Um prático-teórico caracterizado pelo saber-fazer que considera as atividades matemáticas como tipos (T) de tarefas (t) que são resolvidas por, pelo menos uma técnica (τ) e um bloco, tecnológico-teórico, que caracteriza o saber, em sentido restrito e considera uma certa tecnologia (θ) que justifica a técnica utilizada e permite pensar sobre a própria técnica utilizada ou ainda na produção de novas técnicas. A tecnologia seria então justificada por uma teoria (Θ). A análise das concepções de números fracionários sob essa teoria nos permite visualizar outras práticas para o ensino. Dessa forma gostaríamos de saber: *que organização didática os professores constroem para o ensino de números fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental durante a formação?* É sobre essa questão que trataremos neste artigo.

Procedimentos Metodológicos

Como metodologia tomamos da pesquisa-ação dois objetivos: o prático e o do conhecimento, que segundo Thiolent (2003) o primeiro consiste em contribuir para o melhor equacionamento do problema central da pesquisa e, o seguinte, em obter informações que seriam de difícil acesso por outros procedimentos. Nesse sentido, para o primeiro caso tivemos como objetivo colaborar com os professores nas reflexões necessárias para a elaboração da seqüência de ensino pretendida, no sentido de ajudar a solucionar os problemas que pudessem se apresentar durante a ação formativa. No segundo caso, pretendemos contribuir para uma melhor compreensão dos conhecimentos de números fracionários mobilizados pelos professores, bem como suas relações com o ensino do assunto e com os alunos. Como a presente pesquisa está inserida em um projeto maior, que adota essa metodologia, utilizamos os mesmos instrumentos para coletar informações: questionários, observações, mapas conceituais e documentos escritos pelos professores.

No desenvolver do trabalho nosso interesse foi que os professores produzissem novos conhecimentos e adquirissem alguma experiência para discutir, levantar questões e propor soluções para problemas, não só a respeito do objeto de estudo, mas também sobre outros assuntos que pudessem surgir durante a formação.

Para a construção dessa formação fizemos alguns estudos preliminares que, em parte, apresentamos no que segue.

Estudos Preliminares

Nesta parte de nossa pesquisa, fizemos três estudos a respeito de números fracionários que serviram de base teórica para a formação dos professores. O primeiro, diz respeito à terminologia utilizada para identificar o objeto matemático em estudo e seus significados, que se justifica pela confusão conceitual provocada pelos termos: fração, número fracionário e número racional.

A questão nos persegue desde o início de nossos estudos, quando percebemos, em contato com professores, que muitos não aceitam como número fracionário um número irracional escrito na forma a/b $(b \neq 0)$ como, por exemplo $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pois para eles um irracional não pode ser escrito na forma de fração, embora aceitem a racionalização de denominadores de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por outro lado, aceitam as frações algébricas, em $\Re$, como representação fracionária, mas emudecem quando se substitui o x por um irracional qualquer. Provavelmente, o fato justifiquese pela identificação do conjunto dos racionais, como sendo o “conjunto das frações”, embora durante o Ensino Básico trabalhem com números fracionários do tipo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{x+1}{x}$ ou $\frac{2+3i}{5}$ aplicando inclusive as mesmas regras operatórias dos racionais. Assim procuramos em textos de matemática e de seu ensino, algum consenso para essa terminologia.

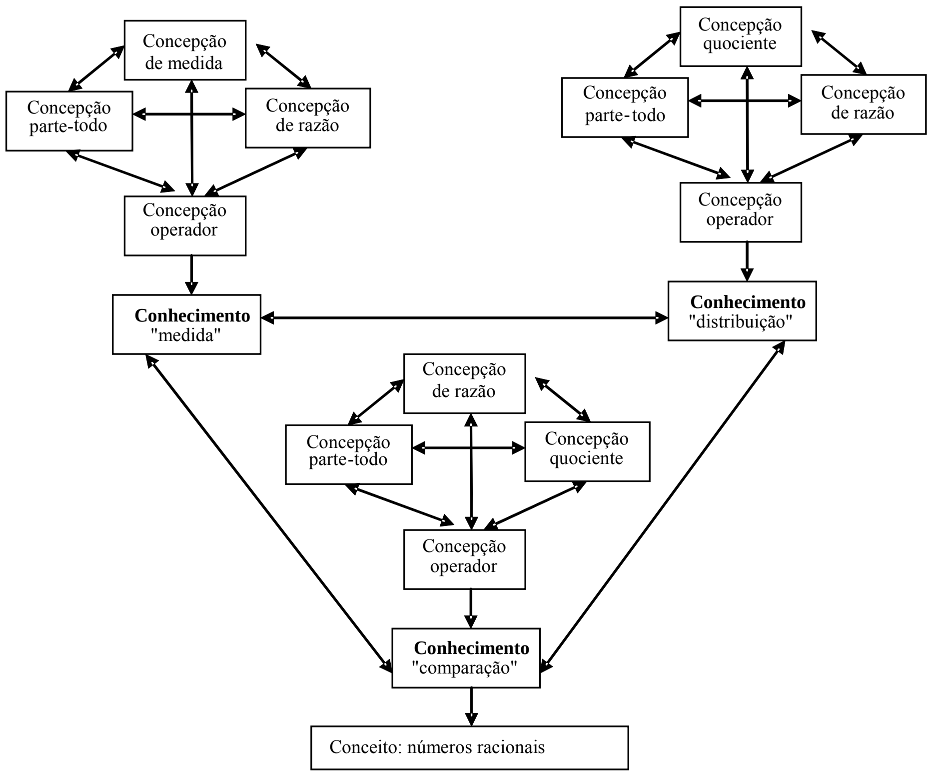
Entre eles citamos Alphonse (1976) para quem o número fracionário é representado por uma classe de frações e razão não é número, mas uma relação entre dois números inteiros, embora possa ser representada na forma de fração. Para Nivem (1984) a divisão de inteiros pode produzir frações e formar o conjunto dos racionais, embora esclareça que os termos número racional e fração ordinária são, às vezes, usados como sinônimos, a palavra fração sozinha é usada para designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador, esclarecendo então que a fração ordinária é um número racional e fração é uma representação.

Assim, não percebendo consenso, entre os vários autores pesquisados, para distinguir o objeto de suas diferentes representações e, adotar um termo que não deixe dúvidas e que seja, suficientemente abrangente, optamos por utilizar o termo **número fracionário** para indicar aquele número que pode ser representado por uma classe de frações, $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ e a, b pertencentes a um anel de integridade. Como estamos interessados no Ensino Fundamental, a e b podem ser números reais ou polinômios. Assim, trataremos por números fracionários todo elemento do conjunto dos reais ou do conjunto dos polinômios que pode ser representado por uma classe de frações. Daqui em diante, trataremos por números fracionários todo elemento do conjunto dos reais ou do conjunto dos polinômios que pode ser representado por uma classe de frações.

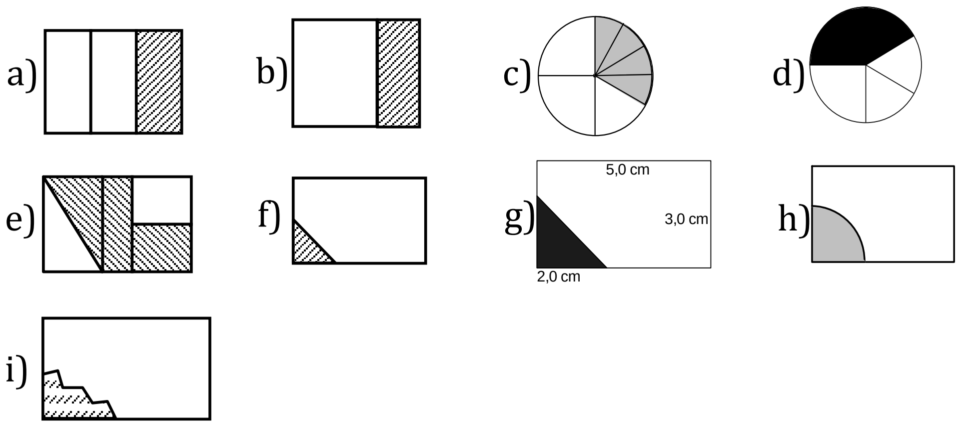
Em nosso segundo estudo buscamos a gênese do número fracionário nos apoiando em Artigue (1990) para quem a análise epistemológica, ancorada no desenvolvimento histórico do conceito, conduz o pesquisador a diferenciar uma variedade de concepções sobre um dado objeto e a reagrupá-los em classes pertinentes para a análise didática. Apoiamos-nos também na Teoria Antropológica do Didático porque esta situa a atividade matemática em um conjunto de atividades humanas de instituições sociais que produzem, utilizam ou ensinam tal saber como resultado da ação humana. Considerando as publicações que se teve acesso desde a antiguidade como instituição e que de acordo com Schubring (2003), há evidência da existência do ensino institucionalizado de matemática na Mesopotâmia a partir da necessidade da função de escriba e que os papiros de Rhind e de Moscou são os mais antigos textos conhecidos destinados ao ensino e os *"Dez manuais matemáticos" ou "Dez clássicos"* foi a primeira lista oficial de livros textos autorizados na china em 656.

A partir desse estudo constamos que o ensino de números fracionários, em sua gênese, apresenta tanto a concepção de operador quanto a concepção parte-todo associada à resolução de tarefas que solicitam a mobilização da concepção de medida, quociente e razão. A concepção parte-todo com vida própria para o ensino desses números, desvinculada de outras concepções, é orientação recente do ensino e são mobilizadas em tipos de tarefas que não aparecem nos primórdios da construção do campo dos números fracionários, provavelmente, porque as necessidades práticas do ensino realizado na época não eram pertinentes para as crianças. A inserção no contexto escolar do ensino de números fracionários baseado na concepção parte-todo e apoiado na dupla contagem parece-nos um movimento no sentido de auxiliar a criança no aprendizado dos novos números, utilizando seus conhecimentos dos números naturais.

Esse estudo nos mostrou que os tipos de tarefas que associam a concepção de medida e se associam diretamente ou mobilizam em suas técnicas as concepções parte-todo, razão e operador permitem a construção do conhecimento de medida relacionado aos números fracionários. Da mesma forma os tipos de tarefa que associam a concepção de quociente e de razão permitem construir os conhecimentos de comparação e distribuição relacionados a esses números. Os conhecimentos de medida, comparação e distribuição permitem a percepção da razão de ser dos fracionários e relacionados facilitariam a construção do campo dos números racionais, como pode ser observado no esquema abaixo.

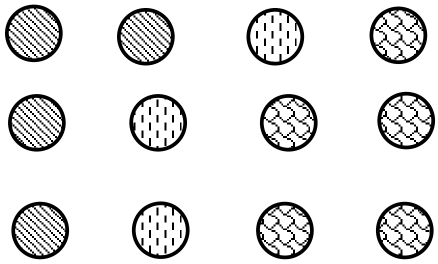


O terceiro estudo foi a elaboração de uma Organização Matemática para números fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental, visto que pretendemos utilizar os estudos realizados na escolha dos tipos de tarefas e alguns resultados de pesquisa sobre o assunto nessa elaboração. Iniciamos pela concepção **parte-todo** porque, geralmente, as primeiras tarefas utilizadas no ensino de números fracionários sugerem a mobilização dessa concepção e, também, porque está presente na maioria das discussões a respeito de outras concepções. Essa concepção emerge da ação de dividir uma grandeza contínua (comprimento, área, volume, ...) em partes equivalentes ou uma grandeza discreta (coleção de objetos) em partes iguais em quantidades de objetos. Como exemplo, podemos citar o tipo de tarefa: identificar o número fracionário que corresponde a uma figura apresentada.



As tarefas desse tipo permitem a construção de técnicas distintas que dependem da figura apresentada.

Tratando de grandezas discretas uma possível tarefa é: Pedro tem 3 bolinhas de gude, João tem 4 e Marcos tem 5 bolinhas. Que parte das bolinhas cada um tem?



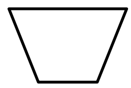
João: $\frac{4}{12}$,

Pedro: $\frac{3}{12}$

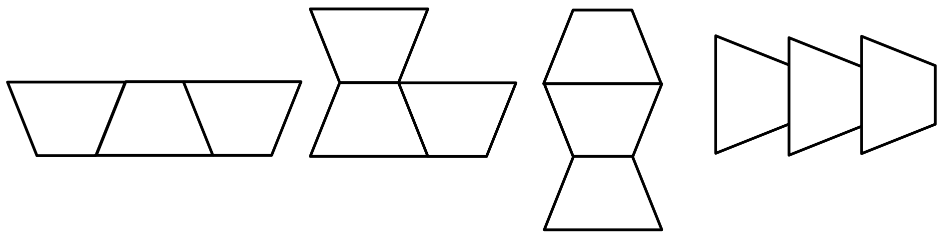
Marcos: $\frac{5}{12}$

A situação pode ser ilustrada como na figura acima com a parte que corresponde a cada criança pintada de uma cor e associar às bolinhas de cada cor um número fracionário que as representem. Neste caso, o conjunto de bolinhas apresentado no final, não possui partes de mesma quantidade, porque não resultam da divisão de um inteiro, mas sim, do agrupamento de três partes, com quantidades diferentes de bolinhas para a constituição de um inteiro.

Outro tipo de tarefa associado à concepção parte-todo é a que chamamos reconstituição do inteiro: se a figura abaixo é um terço do inteiro, desenhe o inteiro.



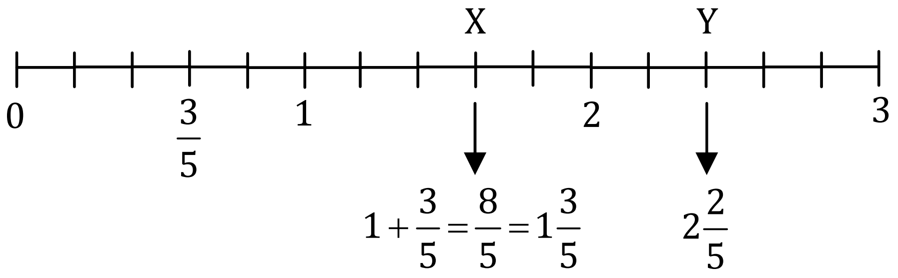
Esse tipo de tarefa permite a mobilização da reversibilidade da dupla contagem das partes, isto é, se para obter um terço de uma figura fazemos a divisão em três partes de mesma área, então quando apenas uma dessas partes for apresentada será necessário obter uma figura com três partes congruentes à figura dada para alcançar o inteiro. Além de auxiliar na percepção visual das figuras e seu tratamento com base na composição, aprofunda a compreensão da concepção parte-todo. É necessário, ainda, considerar que a resposta para essa tarefa não é única e entre elas podemos obter as seguintes representações:



As tarefas que envolvem medições de comprimentos, por exemplo, são apropriadas para a percepção da limitação dos números naturais como resultados de medições, e da necessidade de "novos números" para a quantificação adequada desses comprimentos. As tarefas de medição naturalmente associam a concepção de **medida** e solicitam a manipulação de um padrão, chamado unidade de medição que, por sua vez, depende diretamente da grandeza que está em jogo.

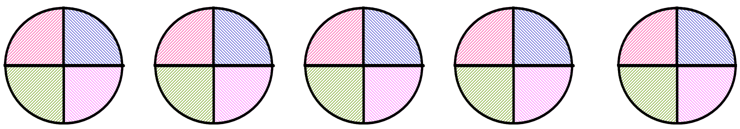
As tarefas envolvendo medições de comprimentos são apropriadas para a percepção da limitação dos números naturais, como resultados de medições, e da necessidade de "novos números" para a quantificação adequada de comprimentos. As tarefas associadas à concepção de medida de comprimento, geralmente, podem solicitar a manipulação de três tipos de representações: a figura de uma reta numérica ou algum esquema de medida, o número fracionário $1/b$ que representa uma subunidade, isto é, a unidade escolhida foi dividida em b partes para permitir a medição e o número fracionário a/b que representará o resultado da medição realizada. A divisão da unidade escolhida, por sua vez, permite mobilizar a concepção parte-todo para possibilitar tal divisão. Em retas numeradas ou esquemas de medida é necessario determinar o ponto de partida para a medição e o sentido em que a medição ocorrerá, podendo ser o zero ou um outro ponto qualquer. Entendemos que a utilização precoce da régua milimetrada para medições encaminha para a discretização do contínuo, porque exige como técnica somente a contagem de centímetros e milímetros escondendo suas origens como subunidades do metro. Um tipo de tarefa para essa concepção é: determinar medidas de comprimento de um objeto.

Nos tipos de tarefas que solicitam a mobilização da concepção de medida a variação do objeto a ser medido ou do esquema apresentado permite ao sujeito mobilizar a concepção de medida de comprimento em tarefas mais complexas, como as que apresentam esquemas maiores que a unidade. Essas tarefas permitirão a manipulação de números fracionários maiores que 1, tanto na forma mista como na imprópria, além de sua associação à soma de números fracionários, como podemos ver na figura abaixo:

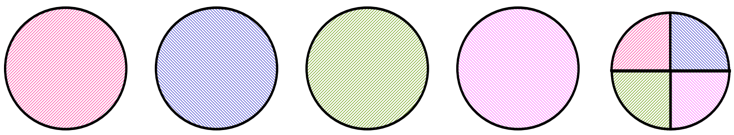


Nesse exemplo podemos perceber que a distância de 0 a X pode ser representada por $1\frac{3}{5}$ e que este número está localizado entre o 1 e o 2, porque diferente das tarefas anteriores esse esquema permite a ordenação dos fracionários e auxiliará, mais tarde, na conceituação do conjunto dos números racionais. Além disso, na representação *a/b* podemos ter *a* maior, menor ou igual a *b*.

As tarefas que solicitam a mobilização da concepçao de **quociente** para números fracionários estão, geralmente, associadas a distribuições de grandezas. A representação *a/b* mostra o resultado de uma distribuição em que *a* foi distribuido em *b* partes, ou seja, *a* foi dividido em um número *b* de partes iguais. Diferente das concepções anteriores *a* e *b* podem representar objetos diferentes como, por exemplo, crianças e chocolates. A operação de divisão se constitui na técnica que, geralmente, cumpre essas tarefas, fazendo com que o ato de distribuir ou dividir *a* em *b* partes iguais, associe ao fracionário *a/b* a operação $a \div b$. Em contextos discretos a técnica é a divisão de naturais em que não cabe a representação fracionária como resposta, mas a associação da concepção de operador. No caso de contextos contínuos a técnica pede um plano de ação que pode tornar a divisão mais complexa dependendo da distribuição solicitada. Um tipo de tarefa que solicita a mobilização da concepção de quociente é distribuir igualmente x objetos em um número y de partes, como por exemplo: quanto cada pessoa receberá de pizza se distribuirmos igualmente cinco pizzas entre quatro pessoas? Nesse caso temos, pelo menos, duas técnicas para cumprir a tarefa, ambas relacionadas à concepção parte-todo. Na primeira o sujeito divide cada pizza em quatro partes iguais, destinando a cada pessoa cinco dessas partes e concluindo que cada um recebe 5/4 de pizza. Essa técnica poderia levar o sujeito a considerar $20 \div 4 = 5$ em que discretiza o contínuo e utiliza a operação com naturais. Na segunda, pode distribuir uma pizza inteira para cada pessoa e dividir a última em quatro partes iguais concluindo que a cada pessoa corresponde $1\frac{1}{4}$ de pizza. Esses dois procedimentos podem ser representados como segue:



$$\mathbf{5 \div 4 = \frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4}}$$



$$\mathbf{5 \div 4 = 1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}}$$

Podemos notar que tal distribuição relaciona-se naturalmente à representação $5 \div 4$ e esta, por sua vez, à representação $\frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$ ou $1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ o que possibilita a compreensão de $a \div b = \frac{a}{b}$ em que o número fracionário é um quociente.

As tarefas associadas à concepção de **razão**, para números fracionários, geralmente, não permitem associar a idéia de partição como nas anteriores, mas a idéia de comparação entre medidas de duas grandezas. A representação $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ utilizada nesses casos, nem sempre se associa à concepção de quociente e seria entendida como um índice comparativo, sem necessariamente transmitir a idéia de número. Assim, a representação fracionária $\frac{2}{3}$, por exemplo, associada à concepção de razão não permite a leitura "dois terços" e, sim, "dois para três". O entendimento da razão como *"x para y"* encaminharia, naturalmente, para a equivalência de razões e para o raciocínio proporcional, que solicita a representação $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. As tarefas que associam a concepção de razão podem comparar grandezas de mesma natureza ou não, em contextos contínuos ou discretos, podendo ainda estar associadas a situações do tipo: todo-todo – quando compara as quantidades de dois inteiros; parte-parte – quando compara as quantidades de duas partes de um inteiro ou partes de dois inteiros, ou ainda, parte-todo.

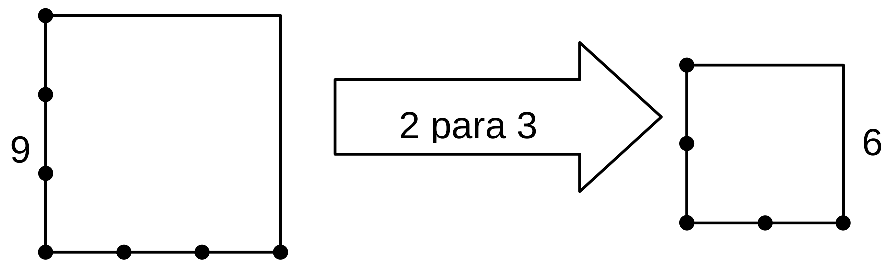
A proporcionalidade envolve diretamente a equivalência de números fracionários e caracteriza-se, como uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas. Na descrição inicial da situação, uma constante é apresentada, implícita ou explicitamente, determinada por uma relação particular entre *a* e *b*, em que qualquer mudança em *a* provocará uma mudança previsível em *b*.

Algumas tarefas que solicitam a mobilização da concepção de razão seriam: determinar a razão de ampliação ou de redução entre duas figuras; determinar um valor desconhecido etc.

Na elaboração desses tipos de tarefas as escolhas numéricas podem tornar as técnicas, mais ou menos complexas e aumentar ou não seu grau de dificuldade. Além disso, nas situações que associam a concepção de operador à concepção de razão surge uma dificuldade que deve ser contornada que diz respeito às operações. Embora os alunos possam mobilizar corretamente os conhecimentos necessários para o cumprimento da tarefa, seus registros podem levar a erros futuros. Por exemplo, uma tarefa que pede a duplicação de uma mistura na razão "*a* para *b*" pode ser representada por $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}=\frac{a+a}{b+b}=\frac{2a}{2b}$ que não condiz com a aritmética fracionária que define a adição por $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. Outra possibilidade de representação seria $2\times\frac{a}{b}=\frac{2a}{2b}$ que também não condiz com a aritmética fracionária que define $p\times\frac{a}{b}=\frac{pa}{b}$. A questão que se apresenta nestes casos é a representação das razões por fracionários, isto é considerá-las como números quando na realidade temos um índice comparativo. Assim, quando um aluno desenvolve um algoritmo próprio para a adição de fracionários e para a multiplicação de um inteiro por fracionário de forma incorreta ele pode estar mobilizando a concepção de razão para qualquer número fracionário e isto poderia ser evitado com a adoção de uma representação própria para razões que não fosse fracionária.

Nas tarefas que solicitam a mobilização da concepção de **operador** o fracionário $\frac{a}{b}$ é manipulado como "algo que atua sobre uma quantidade" e a modifica produzindo uma nova quantidade. Essa ação pode ser entendida pela ação de operador fracionário que modifica um estado inicial e produz um estado final. Nessas tarefas, os fracionários $\frac{a}{b}$ são manipulados efetivamente como números e facilitam a compreensão da operação de multiplicação entre fracionários. Um tipo de tarefa que solicita a mobilização de fracionário enquanto operador é transformar grandezas pela ação de um operador fracionário, como por exemplo, construir um quadrado cujo lado tenha 2/3 da medida do lado de um quadrado dado. Supondo que este quadrado tenha 9 de medida de lado o cumprimento da tarefa se dá quando percebe-se que ele deve ser transformado pelo operador 2/3 e um novo quadrado de lado medindo 2/3 de 9 é produzido.

Associando, na técnica, a concepção parte-todo, podemos dividir o lado do quadrado em três partes de mesma medida e considerar duas dessas partes para obter a medida 6 do lado do novo quadrado. Essa técnica encaminha à percepção de uma ordem operatória que caracterizará a mobilização da concepção de operador, em que se realiza primeiro, a divisão de 9 por 3 para então multiplicar o quociente, 3, por 2, obtendo a medida procurada 6.



Uma outra possiblidade de técnica é associar a concepção de razão entendendo que, para cada três partes da figura inicial, correspondem duas partes na figura final. Partindo do pensamento proporcional e equivalência de razões esse procedimento remete à medida procurada e pode ser representada por: 3:2 = 9:6 ou $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$. A utilização das duas técnicas faz com que se perceba que a figura final pode ser obtida, tanto pela ação do operador $\frac{2}{3}$ quanto pela razão $\frac{3}{2}$. Esse tipo de tarefa permite ainda construir o conhecimento de que o operador $\frac{a}{b}$ provoca uma redução na medida da figura original quando $a < b$ ou amplia essa medida quando $a > b$ além da possibilidade de propor tarefas que solicitam a composição de mais do que um operador.

A Formação

O objetivo da formação continuada era observar e analisar as ações dos professores durante a elaboração e aplicação de uma Organização Didática para o ensino de números fracionários a uma quinta série da escola em que fizemos a formação. Ela foi dividida em cinco etapas. Na primeira, em cinco sessões, fizemos um mapa conceitual, a aplicação de um questionário diagnóstico e sua posterior discussão, a definição do melhor caminho para o ensino do tema e a coleta individual de atividades para a elaboração da Organização Didática. Na segunda etapa, em três sessões, foi realizada a socialização das atividades coletadas anteriormente. Na terceira etapa, fizemos a formação específica em seis sessões abrangendo um breve histórico dos números fracionários e a institucionalização das concepções: parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Na quarta etapa, retomamos a Organização Didática em quatro sessões e os professores terminaram a elaboração da OD que foi entregue na última sessão do ano. Durante as férias a formadora analisou as organizações construídas pelos professores e a reelaborou aproveitando o máximo suas atividades e acrescentando algumas que não tinham sido privilegiadas. Na quinta etapa fizemos uma análise coletiva dessa nova OD em cinco sessões. Finalmente, na sexta etapa, aplicamos a OD reformulada pelos professores em uma quinta série.

Análises

Para Chevallard (2002) o professor quando *"ensina um determinado conteúdo matemático"* também cumpre um tipo de tarefa que seria *"ensinar uma organização de natureza matemática"*. Assim, o professor deve elaborar organizações de natureza didática baseadas em organizações matemáticas previamente construídas. Chevallard (1999) alerta para as tarefas rotineiras, isto é, aquelas que são cumpridas por respostas imediatas e assinala que essas surgem, geralmente, depois de alguns anos de carreira. Sugere então que os professores sejam colocados frente à situações problemáticas, que segundo ele, são aquelas que necessitam de elaboração de uma organização para que sejam cumpridas. Para o autor a necessidade de enfrentar tarefas problemáticas justificaria, por si só, a necessidade de formação continuada. Entendemos que esses tipos de tarefas poderiam basear-se em resultados de pesquisas e colaborar para a reflexão a respeito dos conteúdos ensinados e de sua problemática didática.

O autor caracteriza os momentos didáticos mais por uma realidade funcional do estudo, do que por uma realidade cronológica que permite descrever uma construção elaborada por ensaios, retoques, paradas e avanços. Assim empregando a definição que o autor dá para cada um desses momentos fizemos a análise das OD elaboradas pelos professores durante a formação identificando a OM que mobilizaram por meio dos tipos de tarefas e técnicas apresentadas nessas OD.

1º momento: primeiro (re)encontro com a OM em jogo.

2º momento: exploração de tipos de tarefas e da elaboração de uma técnica associada.
Constatamos que as OM mobilizadas nas OD apresentadas eram pontuais, muito rígidas e mostravam pouca coordenação entre os tipos de tarefas, dificultando a reconstrução de uma OD que mobilizasse OM relativamente mais completas. Duas das OD apresentadas determinam OM cujas tarefas são resolvidas pela técnica da dupla contagem das partes e justificadas basicamente pela concepção parte-todo. Somente em uma delas percebe-se uma OM que permite mobilizar diferentes técnicas e algum critério de escolha, o que não acontece com as outras. Nenhuma delas apresenta tarefas reversíveis e apenas uma situação sem solução.

3º momento: constituição do ambiente tecnológico-teórico
O discurso tecnológico-teórico que utilizam atém-se à técnica da dupla contagem das partes, justificado pela concepção parte-todo, visto que não se arriscaram a buscar figuras em que a dupla contagem fosse insuficiente. Apresentaram dificuldades em justificar se uma razão representava sempre uma divisão, ou não. A gênese e o desenvolvimento histórico dos números fracionários não fazem parte do discurso desses professores e por isso não perceberam tipos de tarefas que justificassem a necessidade dos números fracionários.

4º momento: tornar a técnica mais eficaz e confiável.
Durante a formação foi mostrado aos professores a limitação do domínio da técnica da dupla contagem das partes, escolhendo representações apropriadas para que novas técnicas pudessem ser construídas. No entanto os professores não re-estruturaram suas concepções e interiorizaram as tarefas tratadas na formação.

5º momento: institucionalização da OM entra na cultura da instituição que abrigou sua gênese

Aplicação da OD final em uma sala de quinta série fez com que a professora da classe tivesse acesso a todo material utilizado e acompanhasse as aulas. Comprometeu-se a dar continuidade ao trabalho e a utilizá-lo com a ajuda dos professores da escola que participaram do projeto. Assim, parte da OM mobilizada nessa OD foi instituída nessa instituição escolar.

Não pudemos avaliar o efeito da aplicação da OD na aprendizagem das crianças, mas detectamos algumas observações dos alunos por parte dos professores, tais como a necessidade de ensinar as crianças a trabalhar em grupo; ter autonomia para resolver as tarefas apresentadas, além da dificuldade de gerenciar momentos de impasse e o trabalho coletivo.

Percebemos então que a tarefa de preparar uma seqüência para o ensino de um determinado tema, não é rotineira e, para esses professores baseiam-se, principalmente, na reprodução do livro didático.

6º momento: avaliação, análise do que valeu e se aprendeu.

No final detectamos que os professores apresentam dificuldade em fazer relações de forma geral e de elaborar e seguir um plano de trabalho, pois recuavam e modificavam decisões já tomadas, a cada impedimento que encontravam. Entendemos que, possivelmente, não foram formados para tomar decisões em sua prática e sim para reproduzir modelos já construídos o que impede a autonomia para elaboração de OD que não tenham o livro didático como referencial. As concepções que os professores têm a respeito dos números fracionários e que os ajudam a dar sentido a esse conteúdo, na realidade atuaram como uma espécie de filtro que bloqueavam novas realidades.

Conclusões

Entendemos que as dificuldades e a produção para o ensino baseado em regras prontas, localizadas em desenvolvimentos históricos mais recentes, devem-se à crença na aprendizagem por memorização. O que fica evidente quando afirmam que "razão é quociente", por exemplo, mesmo que na situação a divisão não faça sentido ou quando se surpreendem com a resolução de uma regra de três por tabela, sem explicitar uma letra como incógnita ou, ainda, quando procuram justificativas para a regra de divisão de números fracionários.

De forma geral, nossas análises permitiram indicar algumas mudanças nas concepções de números fracionários, não tanto por garantir que estejam aptos a promover ações formativas eficazes com autonomia para a aprendizagem do assunto por seus alunos, mas, por percebermos a conscientização do grupo da limitação do domínio que tinham dsse conteúdo, além da não eficácia de um ensino baseado em regras, sem compreensão. Não acreditamos que voltem as antigas práticas para tratar de números fracionários.

Referências

Jahn, A. P. et al. *Lógica das equivalências*. In: 22ª Reunião Anual da ANPEd – Associação Nacional de Pós Graduação e Pesquisa em Educação. Caxambu/MG. 1999.

Chevallard, Yves. *L´analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique.* In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v. 19. nº 2. 1999, p.221-266.

Chevallard, Yves. *Organiser l´etude. 1. Structures & Fonctions.* Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage. 2002. Versão eletronica.

Schubring, Gert. *Análise Histórica de Livros de Matemática: Notas de Aula*. Campinas, SP: Editora Autores Associados, 2003.

Silva, Maria José Ferreira da. *Sobre a introdução de número fracionário.* São Paulo: PUC/SP. 1997. Dissertação (mestrado em Ensino da Matemática).

Silva, Maria José Ferreira da.. *Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. Tese (doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2005, 301 f.

Manrique, Ana Lúcia; Silva, Maria José F. da; Almouloud, Saddo Ag. *Conceitos Geométricos e Formação de Professores do Ensino Fundamental.* 25ª Reunião da ANPED – Caxambu, MG. 2002.