# Los bloques de Cuisenaire y la función de segundo grado

Guillermo Jaime Liu Paredes*

## Resumen

Pretender hacer cambios en los modelos tradicionales en la enseñanza de la matemática en nuestra docencia no es una tarea fácil. Sin embargo, si queremos construir una didáctica que pueda transformar este paradigma hay que tener en cuenta e interiorizar los resultados de las nuevas investigaciones para enrumbar un cambio a favor primero de los estudiantes y luego, de la educación matemática en el país. Teniendo en cuenta esta situación, presentamos una actividad que pertenece a todo un trabajo de investigación usando material estructurado, y utilizarlo al tema de funciones cuadráticas. Estas las venimos usando y construyendo desde el 2007 con alumnas de quinto de secundaria. Como punto de partida, uno de los objetivos es colocar en escena material estructurado –Bloques de Cuisenaire- como elemento motivador fundamental, en el descubrimiento y construcción de funciones segundo grado. El otro objetivo que buscamos es que las alumnas, en forma cooperativa, vayan encontrando una serie de procesos inductivos que ayudarán a descubrir la generalización de una secuencia de segundo orden a través de cinco formas distintas.

## Pertinencia del tema

El sistema de enseñanza de la Matemática a nivel básico se encuentra en una situación muy crítica, ya que pese a ser el objetivo fundamental de esta disciplina desarrollar una serie de capacidades como la intuición, creatividad, razonamiento lógico, resolución de problemas, abstracción, etc., esto no se logra en la medida deseada. A través de diversas evaluaciones del

* Colegio Villa María

rendimiento escolar, se pone en evidencia esta situación. Una de las razones que refuerza esta realidad, es que la Matemática se sigue enseñando bajo los esquemas tradicionales, es decir, clases expositivas, reiterativas y memorísticas.

Frente a esta situación hace siete años nació la idea de apoyarnos y utilizar un material didáctico denominado Bloques de Cuisenaire (triángulos, cuadrados, trapecios, rombos de dos tamaños y hexágonos) con la finalidad de poner al alcance de los alumnos un aprendizaje por el descubrimiento dirigido. Es decir, aprender Matemática de manera distinta y sencilla, en buena cuenta, “jugando” -en sentido pedagógico- para convertir a las alumnas en protagonistas de su propio aprendizaje. Sólo una hora a la semana haciendo un total de cinco a seis por bimestre, inversión de tiempo plenamente justificada por los resultados que se obtienen como se señalan en los resúmenes de trípticos que las alumnas han preparado.

## Marco teórico

Numerosos estudios a lo largo de este tiempo coinciden en que los patrones o regularidades no deben faltar en las clases de manera permanente, cualquiera que sea el tema a tratarse, mejor aún cuando hay presencia de esquemas o fórmulas que se puedan deducir, para así contribuir a elevar la capacidad de abstracción y a construir o reconstruir modelos matemáticos para predecir el comportamiento de fenómenos del mundo real. Pensamos que parte de ello se puede lograr con los bloques de Cuisenaire pues invita al juego brindando una motivación muy alta, cuando existen condiciones de libertad para poder crear diversos modelos o formas con las figuras geométricas que se hagan, y los alumnos por si mismos descubran las regularidades y generalizaciones. Así, contribuiremos a hacer a nuestros alumnos más independientes en su aprendizaje hacerles apreciar la belleza de las matemáticas y finalmente contribuir a romper los esquemas rígidos de nuestras exposiciones, evitando que aprendan todo de memoria y limitando sus potencialidades.

> Bishop: "*El modelo existe por todas partes, en la naturaleza y en las cosas que la gente crea. Este modelo es importante porque una vez que ellos son identificados; la gente puede usarlos como instrumentos para descifrar y organizar significados y hacer elecciones y predicciones*"

María Cecilia Papini en el artículo: "Algunas explicaciones Vigostkianas para los primeros aprendizajes del álgebra" en la Revista Relime (pp.41-71), señala:

> Mason: *"La generalización es tan central en la matemática que el modo de pensar del matemático incluye una búsqueda permanente de generalidades. Al sacar la atención de la generalidad, con la esperanza de hacer el aprendizaje más fácil, se está quitando el derecho de cada alumno de experimentar y trabajar con confianza con la generalidad tanto como con la particularidad, de ver lo general a través de lo particular y lo particular en lo general en matemática".*

Por otro lado, desde el punto de vista social, el aprendizaje cooperativo hace que los alumnos se sientan mejor, más relajados frente a la materia y con más confianza en sí mismos y mejorar las relaciones del grupo. Esto es debido a que personalmente el trabajo cooperativo desarrolla la capacidad de entender cómo puede verse una misma situación desde diferentes puntos de vista y mejorar la autoestima.

Reforzamos estas ideas con las enseñanzas que recibimos de Miguel de Guzman[1]

- *el grupo proporciona apoyo y estímulo en una labor que de otra manera puede resultar dura, por su complejidad y por la constancia que requiere*

- *el trabajo con otros nos da la posibilidad de contrastar los progresos que el método es capaz de producir en uno mismo y en otros*

---

[1] Extraído el 25 enero del 2007 de: http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

- *el trabajo en grupo proporciona la posibilidad de prepararse mejor para ayudar a nuestros estudiantes en una labor semejante con mayor conocimiento de los resortes que funcionan en diferentes circunstancias y personas.*

**MATEMATICA QUINTO SECUNDARIA**

FECHA : 01-09-08 **FICHA 13**

**<u>FUNCION DE SEGUNDO GRADO</u>**

OBJETIVO: Hallar regularidades y generalizar sucesiones de segundo orden (función de segundo grado), usando los bloques de Cuisenaire y resolver problemas.

MATERIAL: 15 TRAPECIOS isósceles de los bloques de Cuisenaire.

**FUNCIÓN CUADRÁTICA:** Trapecios –Perímetros

INSTRUCCIONES:

Los lados no paralelos y base menor del TRAPECIO son iguales y asumiremos que miden UNA UNIDAD, la base mayor DOS UNIDADES. Los trapecios se unen por BLOQUES por los lados no paralelos y deben colocarse en fila.

Figura 1: Inicia con un trapecio y halla su perímetro.

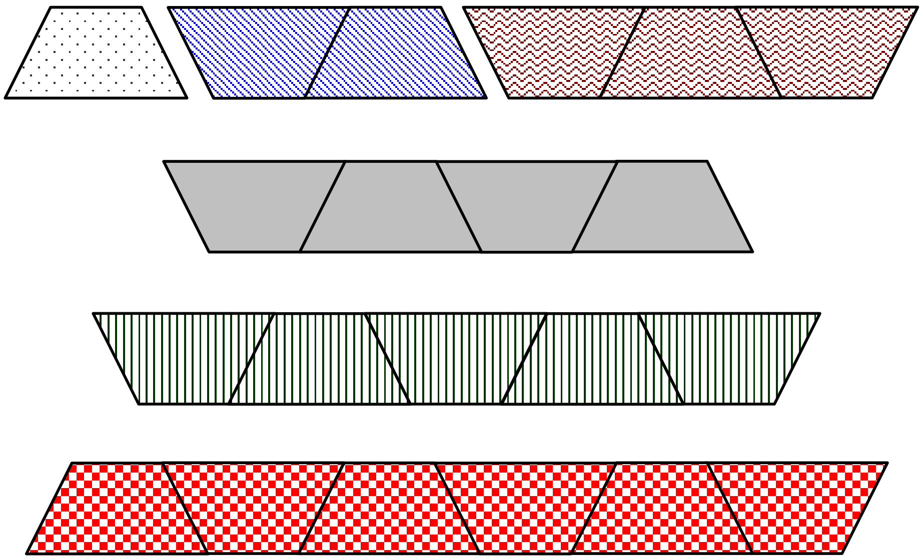
Figura 2: Agrega al trapecio anterior, un bloque de dos trapecios y halla su perímetro.

Figura 3: Agrega a la figura anterior, un bloque de tres trapecios y halla su perímetro.

Figura 4: Agrega a la figura anterior, un bloque de cuatro trapecios y halla su perímetro.

Figura 5: …… Y así sucesivamente.

## BLOQUES DE TRAPECIOS



Con esta información, completa la siguiente TABLA.

TABLA 1

| Figura (n) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 12 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Perímetros | 5 | *11* | *20* | *32* | *47* | *65* | *86* | *236* | *695* |

La sucesión de perímetros corresponde a una progresión aritmética de segundo orden, función que llamaremos f(n) y tiene la forma $f(n) = an^2 + bn + c$. Halla esta función según se indica:

**1. Primera forma**: Usa tres pares ordenados de la tabla y forma un sistema de tres ecuaciones para hallar: *a , b* y *c.* Expresa f(n) en función de n, con dominio y rango en $Z^+$.

| | |
|---|---|
| $(1; 5) \rightarrow a + b + c = 5$<br>$(2;11) \rightarrow 4a + 2b + c = 11$<br>$(3;20) \rightarrow 9a + 3b + c = 20$ | Resolviendo el sistema:<br>a= 1/2 ; b=1/2<br>c= 2<br>$f(n) = \dfrac{3n^2 + 3n + 4}{2}$ |

**2. Segunda forma**: Usa la forma por "saltos" con los datos de la TABLA 1

Observando las primeras diferencias:

| Figura (n) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Perímetros | 5 | *11* | *20* | *32* | *47* | *65* | *86* |

*Primera diferencia*

+6 +9 +12 +15 +18 +21

i) Completando las secuencias a partir de las primeras diferencias:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \rightarrow & 5 \\ 2 & \rightarrow & 5+6 \\ 3 & \rightarrow & 5+6+9 \\ 4 & \rightarrow & 5+6+9+12 \\ 5 & \rightarrow & 5+6+9+12+15 \\ 6 & \rightarrow & 5+6+9+12+15+18 \\ 10 & \rightarrow & 5+6+9+\ldots.+\ 30 \\ 28 & \rightarrow & 5+6+9+\ldots.+\ 84 \\ \ldots & & \\ n & \rightarrow & 5+6+9+\ldots.+\ 3n \end{array}$$

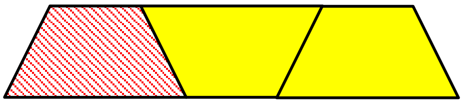
ii) A partir de esta secuencia identifica una progresión aritmética y luego halla la función f(n).

Aplicando la suma de términos de una progresión aritmética:

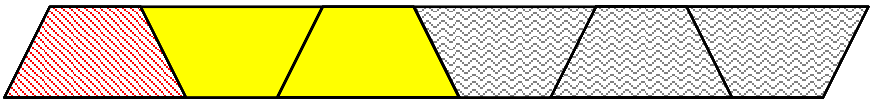
$$S_n = \frac{(a+u)n}{2} \quad a=6\ ; \quad u=3n\,; \quad n=n-1$$

$$f(n)=5+\frac{(6+3n)(n-1)}{2}=\frac{10+3n^2+3n-6}{2}=\frac{3n^2+3n+4}{2}$$

**3. Tercera forma**: Geométrico-algebraico. Los perímetros de cada una de las figuras, se pueden separar en bloques. Completar los términos que continúan la secuencia y muestra que su generalización es igual a f(n). (Usa puntos suspensivos si requiere el caso)



n=2; 1 unión entre bloques



n=3 ; 2 uniones entre bloques

a) 1 $\rightarrow$ 5

2 $\rightarrow$ 5 + 8 – 2(1) $\rightarrow$ Significa: perímetro del primero (5) más perímetro del segundo bloque (8), menos una unión entre dichos bloques (Fig. n=2)

| | |
|---|---|
| 3 $\rightarrow$ 5 + 8 + 11 – 2(2) | 5 $\rightarrow$ 5+8 +11+.... + 47– 2(14) |
| 4 $\rightarrow$ 5 + 8 +11+14 –2(3) | 37 $\rightarrow$ 5+8 +11+.....+113–2(36) |
| 5 $\rightarrow$ 5+8+11+14+17–2(4) | *a* $\rightarrow$ 5+8+11+....+131-2(b) |

Halla ***a* , *b***

8 $\rightarrow$ 5+8 +11+....+26–2(7)   n $\rightarrow$ 5+8+11 +.....+3n+2–2(n-1)

b) Halla f(n)

$$S_n = \frac{(a+u)n}{2} \quad a=5 \quad ; \quad u=3n+2 \quad ; \quad n=n$$

$$f(n) = \frac{(5+3n+2)n}{2} - 2(n-1) = \frac{7n+3n^2-4n+4}{2} \rightarrow$$

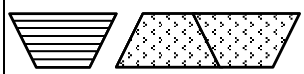
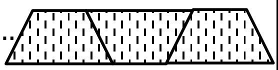
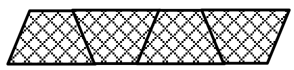
$$f(n) = \frac{3n^2+3n+4}{2}$$

4. Demuetra que si a f(n) se le agrega el siguiente bloque de trapecios, se obtiene la expresión: f(n+1)

$$f(n) = \frac{3n^2+3n+4}{2} + 3n + 3 = \frac{3n^2+3n+4+6n+6}{2},$$ ordenando convenientemente se obtiene lo siguiente

$$= \frac{(3n^2+6n+3)+(3n+3)+4}{2} = \frac{3(n+1)^2+3(n+1)+4}{2}$$

**5. Cuarta forma**: geométrico-algebraico: Perímetro de la figura anterior más perímetro del **último bloque** menos **una unión** entre este último bloque y todo lo anterior. Siendo f(1) = 5, completar la siguiente tabla.

| Perímetro de la figura *n* | Perímetro de la figura anterior | **Perímetro de último bloque menos** uniones entre si. | Una unión entre bloques | Figuras |
|---|---|---|---|---|
| f(2) | 5 | + 5(2) - 2(1) | - 2 |  |
| f(3) | 5+ 6 | + 5(3) – 2(2) | - 2 | ...  |
| f(4) | 5+6+9 | + 5(4)-2(3) | - 2 |  |
| f(5) | 5+6+9+12 | + 5(5)-2(4) | - 2 | .... |
| f(6) | 5+6+9+12+15 | + 5(6)-2(5) | - 2 | |
| f(10) | 5+6+9+12+15+...+27 | + 5(10)-2(9) | - 2 | |
| f(20) | 5+6+9+12+15+...+57 | + 5(20)-2(19) | - 2 | |
| f(n) | 5+6+9+12+15+...+3n-3 | +5(n)-2(n-1) | -2 | |

a) Halla una expresión para el **perímetro de la figura anterior** (segunda columna)

Aplicando la suma de una progresión aritmética:

$$S_n = \frac{(a+u)\,n}{2} \quad : \quad a=6 \quad ; \quad u=3n-2 \quad ; \quad n=n-2$$

$$= 5 + \frac{(6+3n-3)\,(n-2)}{2} = \frac{10+3n^2-3n-6}{2}$$

$$= \frac{3n^2-3n+4}{2}$$

b) Halla una expresión para el **perímetro del último bloque** y **la unión entre bloques**

(3ra+4ta columna)

5(n) – 2(n-1) – 2 = 3n

c) Muestra que la suma de ambas a) y b) es igual a f(n)

$$f(n) = f(n-1) \; + 3n \; = \frac{3n^2-3n+4}{2} + 3n = \frac{3n^2+3n+4}{2}$$

d) Siendo f(1) = 5 , halla f(5).
Usa la definición: f(n)= f(n-1) + 3n, para encontrar en forma inductiva el desarrollo de sus términos.

$$f(5) = \underbrace{f(4)} + 3(5) \rightarrow \underbrace{f(3)} + 3(4) + 15 \rightarrow \underbrace{f(2)} + 3(3) + 12 + 15$$

$$\rightarrow f(1) + 3(2) + 9 + 12 + 15 = 5 + 6 + 9 + 12 + 15$$

III. Número de trapecios.- completar el número de trapecios que intervienen en cada figura.

Halla el valor de *m*.

TABLA 2

| Figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 12 | m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N° trapecios | 1 | ***3*** | ***6*** | ***10*** | ***15*** | ***21*** | *78* | 153 |

6. Esta sucesión del número de trapecios en cada figura, corresponde a una progresión aritmética de segundo orden, función que llamaremos T(n).

a) Usa un sistema de tres ecuaciones simultáneas para halla T(n)

| | |
|---|---|
| $(1\,;1) \rightarrow \quad a + b + c \;= 1$<br>$(2\,;3) \rightarrow \; 4a + 2b + c \;= 3$<br>$(3\,;6) \rightarrow \; \underline{9a + 3b + c \;= 6}$ | Resolviendo queda:<br>a = 1/2<br>b = 1/2, $T(n) = \dfrac{n^2+n}{2}$ |

b) Halla **n :** $\dfrac{n^2+n}{2} = 153$,

resolviendo $n^2 + n - 306 = 0$ $\boxed{n = 17}$ y n= -18 (no)

**7. Quinta forma**: Halla f(n), usando T(n), el total de trapecios y el total de uniones.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1→5(1)- 2(0) | →5(1)–2(1-1) | → 5(1)–2(1)+2 | →3(1)+2 |
| 2→5(3)– 2(2) | →5(3)–2(3-1) | → 5(3)–2(3)+2 | →3(3)+2 |
| 3→5(6)– 2(5) | →5(6)–2(6-1) | → 5(6)–2(6)+2 | →3(6)+2 |
| 4→5(10)- 2(9) | →5(10)–2(10-1) | → 5(10)–2(10)+2 | →3(10)+2 |
| 5→5(15)–2(14) | →5(15)–2(15-1) | → 5(15)–2(15)+2 | →3(15)+2 |
| 6→5(21)- 2(20) | →5(21)–2(21-1) | → 5(21)–2(21)+2 | →3(21)+2 |

La última columna tiene la forma de: $f(n) = aT(n) + b$ siendo $\rightarrow T(n) = \dfrac{n^2+n}{2}$

reemplazando $f(n) = 3\left(\dfrac{n^2+n}{2}\right) + 2 \rightarrow f(n) = \dfrac{3n^2+3n+4}{2}$

**Resultados**

La promoción de alumnas de quinto de secundaria del 2008 elaboró unos trípticos y mostramos sólo los comentarios del sentir de esta forma de trabajo.

Maria A. # 2; Maria D. # 9; Daniela M. # 19; Carolina R. # 21

Gracias a este trabajo, hemos podido, de una manera fácil y dinámica, encontrar las formulas generales para las funciones cuadráticas y reconocer que somos capaces de llegar a una formula siguiendo distintos pasos. Es por eso que esta clase de trabajos nos ayuda a elevar nuestro potencial a un nivel superior.

Ana Lucía A. #3; Mayra D. #8; Mariana H. #16; Úrsula R. #23

El trabajo didáctico creado por el profesor Guillermo Liu nos ha servido mucho y nos ha marcado pues nosotras mismas hemos tenido que deducir las diferentes fórmulas de las funciones. Creemos que con el desarrollo de este proyecto hemos adquirido mayor capacidad de aprendizaje y razonamiento porque nos ha brindado la oportunidad de observar cada ejemplo y encontrar más de un resultado, indagando por diferentes caminos. Hemos relacionado lo cotidiano, las figuras geométricas con la matemática, y estamos seguras de que lo que hemos aprendido no se olvidará debido a la técnica que hemos empleado.

Jimena O. #17; Deborah U. #25; Macarena V. #26; Verónica Z. #28

Hemos podido ver la importancia de buscar un origen a las cosas por nosotras mismas y no simplemente aprender fórmulas. Nosotras mismas hemos formado parte del proceso de principio a fin, lo cual hace que nos identifiquemos con él, y de esa manera recordarlo más fácilmente.

Las fichas que hemos estado trabajando a lo largo del año, nos han servido inmensamente para entender la razón de las fórmulas. No sólo las hemos aprendido de memoria, sino que sabemos de dónde provienen. Con este tipo de aprendizaje, estamos seguras que no lo vamos a olvidar fácilmente.

Mariana Ll. # 19; Ale M. # 20; Alejandra R. #22; Francesca V. #27

Podemos decir que este trabajo nos sirve de gran ayuda para comprender teoría y funciones, a través de la experiencia propia. Con la manipulación de los materiales podemos nosotras mismas crear funciones, entendiendo el por qué de las cosas, mediante explicaciones lógicas.

Adriana C. #8; Estefania K. #15; Karina L. #17; Alessandra R. #23

Como dice la frase; "Me lo contaron y lo olvidé, lo vi y lo entendí, lo hice y lo aprendí" con este trabajo nos hemos dado cuenta que esta frase es realmente cierta, ya que la mejor manera para aprender algo es haciéndolo, descubriéndolo por ti misma. También por medio de las fichas le hemos encontrado la parte divertida y lógica a las matemáticas la cual nos servirá a lo largo de nuestras vidas.

Fabiola F. #10; Flavio G. #11; Jimena H. #17

Manejar este método es muy útil porque al formar verdaderamente parte del proceso (pues no solo el profesor se involucra en nuestro aprendizaje), uno se da cuenta de los problemas que debe solucionar y paso a paso, gracias a los objetos, va comprendiendo como hallar las respuestas y como comprobarlas también.

Nosotras mismas hemos comprobado lo afirmado en este trabajo, porque al haber trabajado con figuras tangibles, y haber sido capaces de recrear cómo se desarrolla la actividad, nos hemos dado cuenta de que efectivamente pudimos hallar las respuestas por nosotras mismas y así, resolver problemas que nunca hubiéramos sabido solucionar solo memorizando fórmulas.

## Referencias


Bishop, B., Jenner, G., Rainville, M., Whispple-Smith, M. (1998) *Putting Patterns to work.* Usa: Prentice Hall

Garcia, J., (1998). Tesis Doctoral "*El proceso de generalización desarrollado por los alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*" Tesis doctoral Universidad La Laguna España.

Groves, S., Stacey, K. (1999) *Resolver problemas: Estrategias* España: Narcea S.A. Ediciones

Lages, E., Carvhalo, C., Wagner, E. & Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media vol. 1*, Lima: Hozlo.

Liu, G., (2005) *El uso de materiales educativos en la formación del pensamiento matemático.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19, 460-465.

Malaspina, U., (2006) *El rincón de los problemas.* Revista UNIÖN (7) 89-93. Obtenido en octubre 8, 2006, de http:/www.fisem.org/descargas (7) Unión_007_011.pdf

RELIME Revista Latinoamericana de investigación de matemática educativa. Marzo 2003 Vol 6. Número 001. pp. 41-71