Problemas de optimización en la educación básica: Reflexiones y propuestas

Uldarico Malaspina Jurado*

Resumen

En este artículo se presenta reflexiones y propuestas en torno al uso de problemas de optimización, desde los niveles básicos de la educación primaria. Se destaca la importancia de los acercamientos intuitivos a la solución de estos problemas, considerando la existencia de una "intuición optimizadora", en el marco de la ciencia cognitiva de las matemáticas (Lakoff y Núñez, 2000) y el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). Se da lineamientos para la inclusión de problemas de optimización en la educación básica regular y se da un ejemplo de carácter lúdico para la primaria y la secundaria.

Palabras Clave: resolución de problemas, optimización, intuición

1. Introducción

Consideramos que los problemas de optimización están muy presentes en la vida cotidiana de cada niño, joven o adulto y que lamentablemente las experiencias cotidianas con esos problemas no son aprovechadas en la educación matemática, a pesar de que puede hacerse desde los primeros grados de la educación primaria, usando problemas lúdicos y sin recurrir a métodos formales. Son

---

* Pontifícia Universidad Católica del Peru.

muy pocos los problemas de optimización presentes en los textos de educación básica, son muy pocas las alusiones a temas o problemas de optimización en el diseño curricular nacional y son muy pocas las ocasiones en las que los profesores trabajan con sus alumnos problemas de optimización; sin embargo son muchas las experiencias de optimización que tiene un niño en su vida cotidiana: de un conjunto de juguetes, de alimentos, de vestidos, etc., escoge el que le brinda la mayor satisfacción (el más preferido); cuando va a un cine, teatro, etc. busca el lugar óptimo, adecuándose a las restricciones existentes (asientos ya ocupados, limitaciones establecidas en el local, distancia a la pantalla o al escenario, etc.); cuando participa en un juego competitivo, busca una estrategia óptima para ganar; cuando va de un lugar a otro busca el mejor camino, sin que necesariamente sea el más corto; etc. Evidentemente, en ninguno de estos casos se usa matemática formalizada y rigurosa para resolver los problemas, pues se afrontan con los criterios que dan la experiencia y la intuición, aunque no necesariamente se encuentre la solución óptima.

Es innegable que los profesores de matemática de educación básica deben tener un conocimiento más profundo de la matemática para estimular adecuadamente el pensamiento matemático de sus alumnos, orientar las iniciativas personales de ellos e incentivar el estudio y el cariño a la matemática. Sin embargo, esta es solo una condición necesaria, y no suficiente. También es necesario conocer recursos pedagógicos y didácticos; pero ambos conocimientos deben complementarse con una adecuada cultura, tanto relacionada con la matemática como con la pedagogía y la didáctica. En verdad, con varias ciencias humanas y sociales, como la filosofía, la sociología, la antropología y la sicología. Existen teorías en el ámbito de la didáctica de las matemáticas que explicitan sus relaciones con diversos campos del conocimiento, evidenciando el carácter interdisciplinario no sólo de la matemática sino de su enseñanza. Algunos ejemplos son la teoría antropológica (Chevallard); la teoría de situaciones didácticas (Brousseau); la teoría de acción, proceso, objeto y esquema – más conocida como APOS – (Dubinsky); la socioepistemología (Cantoral y Farfán); y el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática – más conocida como EOS – (Godino, Batanero y Font). Cabe mencionar que este último, tiene un carácter más holístico y engloba aspectos considerados por varias otras teorías. Por otra parte, hay estudios sumamente interesantes como los de Lakoff y Núñez (2000) en el campo de la ciencia cognitiva de la matemática, que nos hacen ver la estrecha relación entre nuestras experiencias vivenciales y las estructuras matemáticas fundamentales que manejamos. Ya desde el título del libro se plantea una pregunta inquietante: *Where mathematics come from?* (*¿De dónde vienen las matemáticas?*). En el presente artículo usaremos como marco de referencia algunos aspectos de la ciencia cognitiva de las matemáticas y del enfoque ontosemiótico, en relación a los problemas de optimización y al papel que juega la intuición en la comprensión y solución de tales problemas.

2. Problemas de optimización

La optimización matemática es uno de los campos en los que la matemática ha avanzado mucho y una muestra de ello son las numerosas publicaciones en revistas (journals) especializadas, con énfasis tanto en aspectos teóricos como aplicados. El avance de este campo de la matemática, no guarda armonía con su presencia casi nula en la educación básica, a pesar de la existencia de situaciones vivenciales, desde la infancia, vinculadas con problemas de optimización. En este artículo nos referiremos a estos problemas con un carácter amplio y sin enfatizar los aspectos formales; así, llamaremos *problema de optimización* a todo problema en el cual el objetivo fundamental es obtener un valor máximo o un valor mínimo de alguna variable. Esta perspectiva es consistente con la definición intuitiva que se expone en Pinto Carvalho et al (2003):

> *Intuitively, optimization refers to the class of problems that consists in choosing the best among a set of alternatives.*
>
> *Even in this simple, imprecise statement, one can identify the two fundamental elements of an optimization problem: best, that conveys a choice of criterium used to choose the solution; this is usually expressed by means of a function, that should be minimized or maximized; alternatives, that refers to the set of possible solutions that must be satisfied by any candidate solution* (p. 17)

En el enunciado de un problema de optimización generalmente se usan palabras o expresiones como máximo, mínimo, el más (o la más, lo más), el menos (o la menos, lo menos), el mejor (o la mejor, lo mejor), el peor (o la peor, lo peor), a lo más, por lo menos, el mayor (o la mayor), el menor (o la menor). En este sentido, podríamos decir que en la educación primaria los únicos problemas de optimización que se consideran son los de máximo común divisor (MCD) y de mínimo común múltiplo (MCM). Lamentablemente, el énfasis está puesto en lo algorítmico y no en la toma de conciencia de lo que es máximo o mínimo.

Una manera formal de presentar una gran variedad de problemas de optimización, en el campo de lo que suele llamarse "programación matemática", es usando funciones con características específicas; así, se explicita la función objetivo f (la que se va a maximizar o minimizar) y las funciones g_j que especifican las restricciones. Si se tiene n variables no negativas y m restricciones, el problema suele plantearse de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Maximizar} & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
\text{sujeto a:} & \\
& g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \mathrm{b}_1 \\
& g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \mathrm{b}_2 \\
& \dots
\end{array}
$$

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_m$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$$

(b_j son constantes asociadas a cada restricción, que provienen del problema propuesto)

Los problemas de programación lineal se presentan de esta forma y en ellos tanto la función objetivo como las funciones que especifican las restricciones son funciones lineales. Por ejemplo, el siguiente problema:

> *Halla dos números no negativos cuya suma sea la mayor posible, sabiendo que la suma del doble de uno de ellos con el triple del otro es 120.*

se plantearía como:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & x + y \\ \text{sujeto a:} & \\ & 2x + 3y = 120 \\ & x \ge 0,\ y \ge 0 \end{array}$$

Este tipo de problemas ya se incluyen en el quinto año de secundaria, precisamente en el capítulo de introducción a la programación lineal; sin embargo, consideramos que el énfasis que se pone en lo algorítmico aleja una aproximación intuitiva a las soluciones y a la comprensión del significado de la obtención de un valor óptimo como solución del problema.

3. ¿Existe una intuición optimizadora?

La comprobación de que niños desde muy temprana edad resuelven problemas elementales de optimización, nos hace pensar que la intuición juega un papel muy importante y que bien podríamos añadir la "intuición optimizadora" a la clasificación usual de las intuiciones, según el contenido matemático al que se aplica (intuición geométrica, intuición numérica, etc.); sin embargo la ciencia cognitiva de las matemáticas y el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, nos permiten fundamentar mejor la conjetura de existencia de una intuición optimizadora. A continuación presentaremos muy resumidamente algunos aspectos de estas teorías (mayor información se encuentra en las publicaciones que damos en las referencias.)

Ciencia Cognitiva de las Matemáticas

Lakoff y Núñez (2000) sostienen que para llegar al pensamiento abstracto, necesitamos usar esquemas más básicos que se derivan de la experiencia muy inmediata de nuestros cuerpos. Usamos estos esquemas básicos, llamados *esquemas de imágenes*, para dar sentido, a través de *proyecciones metafóricas*, a nuestras experiencias en dominios abstractos. **Las metáforas** se caracterizan por crear una relación conceptual entre un *dominio de partida* y un *dominio de llegada* que permite proyectar propiedades e inferencias del dominio de partida en el de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se trasladen una serie de características y estructuras de un dominio a otro. Lakoff y Núñez distinguen dos tipos de metáforas conceptuales en relación con las matemáticas

- "***Conectadas a tierra***" (*grounding metaphor*): Son las que basan nuestra comprensión de las ideas matemáticas en nuestra experiencia cotidiana. Relacionan un *dominio de partida* fuera de las matemáticas con un *dominio de llegada* dentro de ellas.

  Por ejemplo: "Las categorías son contenedores", "los puntos son objetos", "una función es una máquina", etc. Estas metáforas sirven para organizar un dominio de llegada matemático (por ejemplo las categorías) a partir de lo que sabemos sobre un dominio de partida que está fuera de ellas (lo que sabemos sobre los contenedores).

- ***De enlace*** (*linking metaphor*): Tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas y nos permiten conceptualizar un dominio matemático en términos de otro dominio matemático.

  Por ejemplo, "los números reales son los puntos de una recta", "las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen de coordenadas", etc.

  Las metáforas de enlace ocurren cuando una rama de las matemáticas se usa para modelar otra.

Haremos una ilustración gráfica de la relación de estos conceptos con los problemas de optimización, teniendo en cuenta que en la vida cotidiana tenemos experiencias relacionadas con la obtención de máximos y mínimos, tales como:

- Buscamos maximizar satisfacciones (desde niños).
- Buscamos obtener lo mejor y con el mínimo esfuerzo.
- Recorremos caminos que tienen altibajos.
- Observamos a lo largo de la vida – tanto en nosotros mismos como en los otros – el crecimiento y el decrecimiento de ciertas características vitales (como la fortaleza física), pasando por momentos críticos (máximos o mínimos).

A continuación ilustramos gráficamente que las experiencias corporales contribuyen a la aparición de un esquema de imagen y de una proyección metafórica en torno a los problemas de optimización.

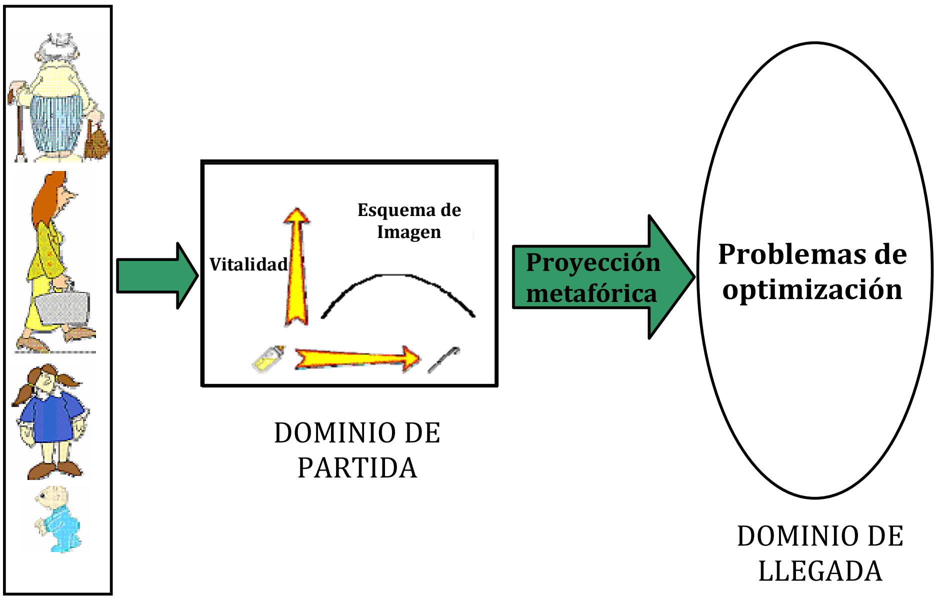

Figura 1. Una proyección metafórica de los problemas de optimización

El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS)

Para este resumen tomamos como referencia Font y Contreras (2008). Consideramos que la figura que usan (p. 35) y que reproducimos en la figura 2, ayuda a visualizar aspectos esenciales del EOS que hemos tomado en cuenta para nuestro análisis. La actividad matemática juega un papel central y es modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. A partir de ellas emergen diversos tipos de objetos matemáticos – problemas, lenguajes, argumentos, conceptos, proposiciones y procedimientos – construyendo configuraciones cognitivas o epistémicas (ver el hexágono más grande en la figura 2).

Figura 2. Objetos y procesos matemáticos

Los objetos que intervienen en las prácticas y los que emergen de éstas, pueden considerarse desde las cinco facetas de las dimensiones duales del EOS (lados opuestos del decágono más grande en la figura 2): personal / institucional, extensivo / intensivo, ostensivo / no-ostensivo, unitario/sistémico y contenido/expresión.

Tanto las dualidades como los objetos pueden analizarse desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a considerar los procesos que se muestran en la figura 2. En el EOS se consideran dieciséis procesos importantes en la actividad matemática, sin pretender ser exhaustivos en la lista. Estos son los diez que aparecen en los lados del decágono más pequeño de la figura 2 y los seis que aparecen en los lados del hexágono más pequeño.

Con estos elementos teóricos, consideramos, por ejemplo, que hay una relación muy estrecha entre la intuición y los procesos que permiten afirmar sin demostración formal, que toda curva en forma de parábola abierta hacia abajo tiene un punto de máxima altura. En el marco del EOS, consideramos que esto es el resultado de tres procesos: el de *idealización,* que lleva a considerar una curva específica de esa forma (un objeto ostensivo y extensivo) como una parábola (un objeto no ostensivo y extensivo); el de *generalización*, que lleva a considerar a la parábola como un caso particular de una curva estrictamente cóncava, creciente y decreciente (un objeto no ostensivo e intensivo); y el de *argumentación*, que lleva a obtener un resultado como "en toda curva estrictamente cóncava, creciente y decreciente, existe un punto de altura máxima". Este ejemplo ilustra el hecho de considerar la intuición, metafóricamente, como un vector de tres componentes:

INTUICIÓN = (IDEALIZACIÓN, GENERALIZACIÓN, ARGUMENTACIÓN)

Así, por las razones expuestas en el marco de la ciencia cognitiva de la matemática y del EOS, y por diversas experiencias realizadas, conjeturamos que sí existe la intuición optimizadora.

4. La optimización en la educación básica

Como decíamos en la introducción, es muy escasa la presencia de situaciones de optimización que se presenta a los estudiantes de educación básica. En este sentido, el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica del 2009 no tiene diferencias respecto al anterior. En primaria, las únicas ocasiones para trabajar con los conceptos de máximo y mínimo que proponen son – como ocurre desde hace muchos años – al considerar máximo común divisor y mínimo común múltiplo de números naturales. En secundaria, el único tema explícito para problemas de optimización es introducción a la programación lineal, que se incluyó por primera vez en el 2003, en quinto año de secundaria (Ministerio de Educación del Perú, 2003). Lamentablemente no hay pautas para desarrollar el tema poniendo énfasis en lo intuitivo, ni en la toma de conciencia, tanto de la obtención de un valor óptimo (máximo o mínimo) como de la importancia de éste, en el contexto dado, cuando se resuelve un problema de programación lineal. Estos hechos nos dan una idea del escaso significado institucional que tienen en el Perú los problemas de optimización. Una mirada a los textos de primaria y secundaria, confirma que se le da muy poca importancia a estos problemas en la educación básica. Veamos por ejemplo la tabla 1, en la que se presenta un cuadro comparativo de la cantidad de problemas de optimización (PO) que hay en dos colecciones de libros (llamadas A y B[1]) usados en secundaria en el Perú. Es claro que la cantidad de PO encontrados – y con criterio bastante amplio – es muy pequeña, a pesar de que los diversos temas que se desarrollan en la secundaria – y también en la primaria – brindan ocasiones para proponer problemas interesantes de optimización.

	1er Grado		2º Grado		3er Grado		4º Grado		5º Grado	
	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO
A	792	17 (2,1%)	820	9 (1,1%)	562	4 (0,7%)	1682	5 (0,3%)	496	26 (5,2%)
B	3922	22 (0,6%)	3439	17 (0,5%)	3730	27 (0,7%)	4119	10 (0,2%)	4145	79 (1,9%)

Tabla 1. Cuadro resumen de información cuantitativa comparativa (Fuente: Malaspina, 2008)

Cabe destacar que, de manera general, en el aspecto de resolución de problemas, lo más frecuente es encontrar un enfoque que brinda al alumno pasos específicos para obtener la respuesta y no una orientación o acompañamiento en el análisis de la información y del uso

1 Colección A: Textos del 2005, repartidos por el MINEDU a colegios estatales de secundaria
Colección B: Textos de la Editorial Santillana del 2005.

de los recursos matemáticos disponibles para resolverlo, que estimulen su intuición y creatividad. En Malaspina (2008) se hace un estudio de aspectos cualitativos y se examina algunos problemas que ilustran las deficiencias encontradas en los textos al trabajar PO.

5. ¿Es posible incluir problemas de optimización en la Educación Básica Regular?

Nuestra respuesta es afirmativa, basada en los análisis hechos en las secciones anteriores y en las experiencias realizadas con niños y jóvenes con diversos problemas, inclusive de carácter lúdico (Malaspina 2002 y 2008). Proponemos tres lineamientos básicos: 1) *Incluir PO en todos los grados de primaria y secundaria.* Para esto hacemos propuestas de PO para primaria y secundaria, destacamos la importancia de crear problemas, damos características de un “buen” problema, teniendo en cuenta la experiencia docente y los criterios d idoneidad didáctica del EOS y proponemos algunos métodos a tener en cuenta al resolver PO. 2) *Modificar los contenidos y las formas de tratar algunas unidades didácticas.* Nos referimos de manera especial a las unidades de funciones, MCM, MCD e introducción a la programación lineal. 3) *Incluir nuevos temas*. Consideramos posible, formativo y entretenido, incluir elementos de teoría de juegos y temas seleccionados de matemáticas discretas; entre estos últimos podría considerarse elementos de teoría de grafos y elementos de teoría de números, incluyendo ecuaciones diofánticas lineales. Problemas creados con ese fin, analizados didáctica y matemáticamente se pueden encontrar en la sección “El Rincón de los problemas” de la revista UNIÓN, desde el año 2005 (Malaspina). A manera de ejemplo proponemos uno nuevo, que expresado formalmente parece inadecuado inclusive para el capítulo de introducción a la programación lineal de quinto de secundaria. El problema, formalmente presentado es:

Minimizar $(n+m+p+q+r)$

sujeto a:

$$n+3m+5p+7q+9r = 24$$
$$n, m, p, q, r \in \{0,1,2,3\}$$

Podemos ver inmediatamente que por tener cinco variables es imposible usar los métodos gráficos que se sugieren en los textos; sin embargo, se facilitan aproximaciones intuitivas si lo entendemos como el siguiente problema en un contexto aritmético:

> *Expresar el número 24 como una suma, usando como sumandos únicamente números del conjunto {1, 3, 5, 7, 9}. Cada sumando se puede repetir a lo más tres veces y el número total de sumandos debe ser el menor posible.*

Más aún, se puede diseñar actividades para niños de segundo grado de primaria, considerando un caminito de 24 unidades de longitud, 3 palitos azules, cada uno de 1 unidad de longitud; 3 palitos lilas, cada uno de 3 unidades de longitud; 3 palitos amarillos, cada uno de 5 unidades de longitud; y 3 palitos rojos, cada uno de 9 unidades de longitud. Después de algunas actividades manipulativas, se puede pedir la siguiente actividad:

- *Construye un camino del mismo tamaño que el caminito que tienes, poniendo los palitos uno a continuación de otros y sin sobreponerlos. ¿Cuántos palitos usaste?*

Y luego, siempre construyendo un camino del mismo tamaño que el dado, pedir gradualmente actividades más desafiantes (será interesante que sean actividades en grupos de a lo más cuatro alumnos):

- *Usa <u>la menor</u> cantidad posible de palitos.*
- *Usa <u>la mayor</u> cantidad posible de palitos.*
- *Examina si es posible construir el camino, usando solamente 5 de los palitos dados*

Será muy importante, teniendo en cuenta el grado en que se aplique, examinar las soluciones de los alumnos y las respuestas a preguntas como *¿Cómo sabes que ya no es posible construir el camino con menos (o con más palitos)? ¿Cómo sabes que es imposible construir el camino usando solamente 5 palitos?* Ciertamente, alumnos de secundaria podrían dar respuestas rigurosas a estas preguntas, beneficiándose con el desarrollo de su intuición optimizadora y con el establecimiento de conexiones intramatemáticas[2].

Referencias

Font, V. and Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 69, 33-52.

Godino, J. D.; Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 39, 127-135.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. New York, NY: Basic Books

Malaspina, U. (2008) Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el EOS. Tesis doctoral. PUCP.
www.pucp.edu.pe/irem/Tesis_Doctoral_Uldarico_Malaspina_Jurado.pdf

[2] El problema y las actividades están enunciados tal como se hizo en la conferencia en el coloquio de febrero del 2009. Con estas ideas, con el marco de las situaciones didácticas y usando la ingeniería didáctica, se ha diseñado con Wilhelmi, Lacasta y Pascual la situación denominada "*¡Que no se manche la alfombra!*", con actividades para segundo grado de primaria, que se han experimentado en España y Perú. Una comunicación nuestra con este tema ha sido aceptada por los árbitros para su presentación en el *XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Matemática Educativa*, en setiembre del 2009, en la Unviersidad de Santander.

Malaspina, U. (2005, 2006, 2007, 2008) El rincón de los problemas. Revista UNIÓN.
www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Malaspina, U. (2002) Elements for teaching game theory.- Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of mathematics.- University of Creta.

Ministerio de Educación del Perú (2003). Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores. Lima.

Pinto Carvalho, P. et al (2003). Mathematical Optimization in Graphics and Vision. Lima: Monografías del IMCA.