

Diseño de engranajes: una actividad cooperativa para el aprendizaje de coordenadas polares

Nélida Medina García*

Roy Sánchez Gutiérrez*

Resumen

Como una aplicación del capítulo Coordenadas Polares del curso Matemáticas Básicas de Estudios Generales Ciencias en ingeniería, desarrollamos la actividad colaborativa *Diseño de engranajes*.

Antes de la realización de la actividad, los profesores de cada uno de los trece grupos horarios formamos grupos de trabajo integrados por cuatro alumnos. Durante la actividad, a cada alumno se le entregó dos hojas de papel polar. En cada grupo de trabajo se formaron dos parejas: Una graficó una rosa de 7 hojas y la otra, una rosa de 8 hojas. Las dos parejas hallaron intersecciones y simetrías de las curvas con el eje polar, eje

$\theta = \frac{\pi}{2}$ y el polo; además determinaron regiones definidas por inecuaciones polares. En el trabajo grupal (cuatro alumnos) se presentó información sobre engranajes, instrucciones sobre cómo diseñar el engranaje central, EC. En el diseño de los engranajes laterales, cada grupo de trabajo decidió el número de hojas de la rosa, la medida del diámetro interior de modo que los dientes de las ruedas dentadas engranaran. El trabajo realizado previamente por las parejas facilitó esta tarea.

Palabras clave: coordenadas polares, diseño, engranajes.

* Pontificia Universidad Católica del Perú – Estudios Generales Ciencias

Problema

¿Cómo aplicar conceptos matemáticos sobre coordenadas polares en ingeniería? Una aplicación es aproximar el diseño de un tren de engranajes.

Marco teórico

Sistema de Coordenadas polares. Curvas en coordenadas polares. Gráfica de una curva polar usando intersecciones, simetrías respecto al eje polar, eje $\theta = \frac{\pi}{2}$ y el polo, Intersección de dos curvas polares Regiones en coordenadas polares

Representación gráfica de curvas en coordenadas polares usando el Programa Derive.

Actividad cooperativa

Objetivo de aprendizaje: Representar analítica y geoméricamente algunas curvas en coordenadas polares es mucho más simple que en coordenadas cartesianas.

Trabajo en parejas

Tiempo: 40 minutos

Pareja 1

- Escriba la ecuación $(x^2 + y^2)^3 = 4x^3y - 4xy^3$ en coordenadas polares. Identifique la curva
- Grafique la curva $C_1 : r = 3 \operatorname{sen}(7\theta)$, usando simetrías, intersecciones con los ejes y el polo.

Sombree la región $0,5 \leq r \leq 2$ y la región $2 \leq r \leq 2,5 \wedge r \leq 3 \operatorname{sen}(7\theta)$.

Solución. Las gráficas que presentamos, correspondientes a las soluciones, se realizaron usando el programa Derive

- La ecuación en coordenadas polares es $r^2 = \operatorname{sen}(4\theta)$ y está representada por la curva de la figura 1 a)

- b) La región que cumple con las condiciones está representada por la figura 1 b).

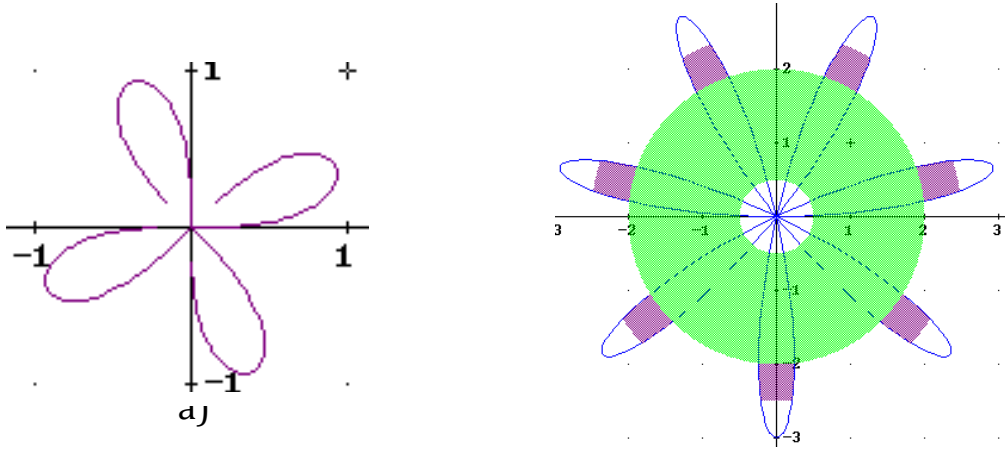


Figura 1

Pareja 2

- Analice las simetrías de la curva $C : r = 1 + 2 \operatorname{sen}(\theta)$ respecto a los ejes y el polo. Escriba la ecuación de C en coordenadas cartesianas.
- Grafique la curva $C_2 : r = 4 \operatorname{sen}(4\theta)$ usando simetrías, intersecciones con los ejes y el polo.
- Grafique las circunferencias $r = 1, 1r = 3$. Sombree las regiones $r \leq 1, 3 \leq r \leq 4$.

Solución

- La ecuación de C en coordenadas polares es $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + 2y$

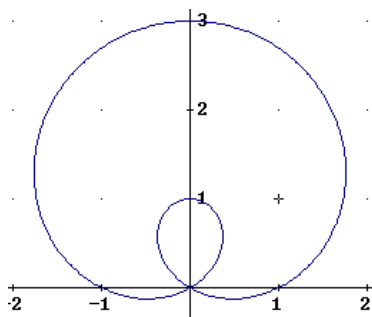


Figura 2

b) La gráfica de $C_2: r = 4 \operatorname{sen}(4\theta)$ es la curva de la figura 3 a).

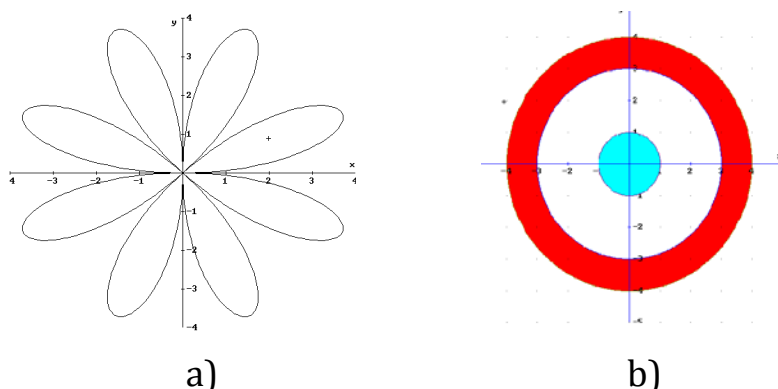


Figura 3

c) La región que cumple con las condiciones está en la figura 3 b).

Trabajo grupal (cuatro alumnos)

Tiempo 50 minutos

Engranajes

Se denomina engranaje al mecanismo utilizado para transmitir potencia mecánica entre las distintas partes de una máquina. Los engranajes están formados por dos ruedas dentadas; la mayor se llama **corona** y la menor, **piñón**. Un engranaje sirve para transmitir movimiento circular mediante contacto de ruedas dentadas.



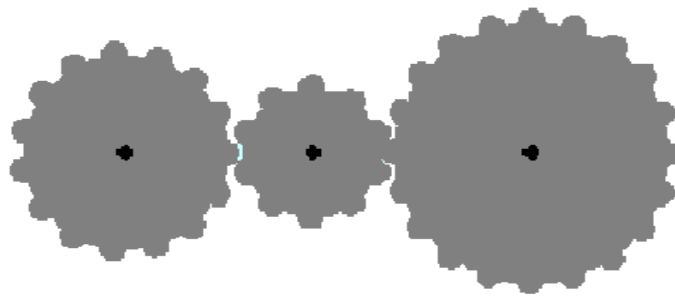
Una de las aplicaciones más importantes de los engranajes es la transmisión del movimiento desde el eje de una fuente de energía, como puede ser un motor de combustión interna o un motor eléctrico, hasta otro eje situado a cierta distancia y que ha de realizar un trabajo. De este modo, una de las ruedas (engranaje motor) estará conectada por la fuente de energía y la otra (engranaje conducido) estará conectada al eje que debe recibir el movimiento del eje motor. Si el sistema está compuesto de más de un par de ruedas dentadas, se denomina **tren de engranajes**.

Diente de un engranaje: son los que realizan el esfuerzo de empuje y transmiten la potencia desde los ejes motrices a los ejes conducidos. El perfil del diente, o sea la forma de sus flancos, está constituido por dos curvas envolventes de circunferencias

Módulo: Se define como la relación entre la medida del diámetro primitivo y el número de dientes. Dos engranajes que engranan deben tener el mismo módulo.

Circunferencia primitiva. Circunferencia a lo largo de la cual engranan los dientes.

El trabajo grupal consiste en diseñar aproximadamente un tren de engranajes de 3 ruedas dentadas, como se muestra.



Para el diseño del engranaje **central** EC, siga los siguientes pasos:

- a) Considere la región $3 \leq r \leq 4$.
- b) Grafique en el mismo plano polar la curva $r = 6 \cos(6\theta)$.
- c) Seleccione en esta gráfica la región que corresponda a un engranaje con 12 dientes y cuyo diámetro interior (el menor diámetro) es 6.
- d) Describa la región de la parte c) mediante un conjunto de inecuaciones polares

El diseño de los engranajes **laterales** queda a cargo del grupo. Tenga en cuenta lo siguiente:

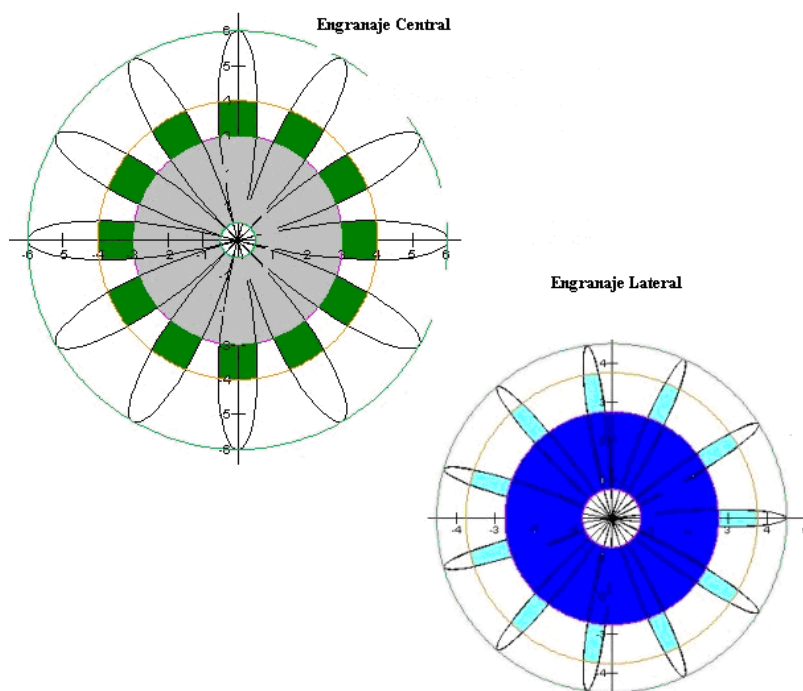
- a) Para cada engranaje lateral, la relación entre el diámetro interior y el número de dientes (módulo) es constante. El módulo del engranaje central EC es $1/2$.
- b) Los engranajes laterales son iguales.
- c) En el bosquejo de la gráfica final, considere el polo como centro de EC. Use rosas, circunferencias y procedimiento similar al anterior en un engranaje lateral.

Solución

Los engranajes central y lateral deben tener el mismo módulo.

Como el módulo del engranaje central es $1/2$, para el engranaje lateral podemos considerar un diámetro interior de 5.5 centímetros y por tanto 11 dientes.

Después de sombrear las regiones que cumplen las condiciones dadas, se muestran las gráficas de ambos engranajes (Figura 4).



Metodología empleada: Activa-colaborativa. Los alumnos resolvieron las preguntas en equipo. Emplearon papel polar, la información dada sobre engranajes, calculadoras. Los profesores,

así como los dos asistentes de docencia, actuamos como facilitadores del aprendizaje.

Análisis de los resultados: Esta actividad colaborativa se calificó con un puntaje de cuatro puntos que se sumó a la nota de la cuarta práctica calificada del curso. Durante el desarrollo de la actividad se observó muy buena actitud de los alumnos para desarrollar la actividad trabajando en equipo. La mayoría de los grupos terminó la actividad satisfactoriamente.

Reflexiones: La preparación de esta actividad necesitó trabajo en equipo de los docentes tanto en la búsqueda de información, sugerencias de los colegas de Matemáticas, Ingeniería mecánica, diseño y tiempo, De este modo encontramos nuevas aplicaciones de la matemática a otras áreas de la ciencia, y también de la vida real.

Referencias

Stewart, J. (1998). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares (pp. 544-566). México. International Thompson Editores S.A.

WIKIPEDIA, La enciclopedia libre. Artículo: Engranaje. (Consulta: 9 de noviembre de 2008). <http://es.wikipedia.org/wiki/Engranaje>