Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2017, nº 96, 23-44**

Algunos Fenómenos Matemáticos que organiza el concepto de desigualdad

Silvia Bernardis, Liliana Nitti, Sara Scaglia
Facultad de Humanidades y Ciencias.
Universidad Nacional del Litoral, Argentina

RESUMEN: *En este artículo presentamos un estudio teórico realizado en el marco de una investigación en torno a las desigualdades en matemática, cuyo propósito es contribuir a mejorar la calidad de su enseñanza.*
Realizamos un estudio fenomenológico que consiste en indagar en textos de matemática avanzada el tratamiento del tema, con la finalidad de identificar fenómenos matemáticos organizados por el concepto de desigualdad. Los fenómenos matemáticos que encontramos a partir de las definiciones formales son: la ordenación, la especificación y la generalización. Además analizamos en los textos los tipos de tareas propuestas para abordarlos. Consideramos que los fenómenos se vinculan con las tareas de: comparación de expresiones, resolución de inecuaciones y demostraciones de desigualdades absolutas.
Reflexionamos respecto del tipo de experiencias que es necesario ofrecer a los estudiantes para que construyan buenos"objetos mentales"(Freudenthal, 2002) de la desigualdad matemática.
PALABRAS CLAVES: *Fenómenos; concepto de desigualdad; análisis de textos; matemática elemental; matemática avanzada*

Some mathematical phenomena organizing the concept of inequality

Abstract: *In this article we present a theoretical contribution as part of an investigation about the inequality, in order to help to improve the quality of the teaching of this theme. We do a phenomenological study that consists on researching in texts of advanced mathematics, with the objective of identifying mathematical phenomena organized by the concept of inequalities in mathematics. The mathematical phenomena that we find from formal definitions are: ordering, specification and generalization. We also analyze in the texts the types of tasks proposed to deal with them. We consider that the phenomena are*

linked to the tasks of: comparison of expressions, resolution of inequalities and demonstrations of absolute inequalities.
We reflect on the type of experience that is necessary to offer students to create optimal "mental objects" (Freudenthal, 2002) of mathematical inequality.
KEYWORDS: *Phainomenon; concept of inequalities; textbook analysis; elementary mathematics;advanced mathematics*

INTRODUCCIÓN

En nuestras prácticas como docentes de las asignaturas del primer curso de la formación inicial del Profesor en Matemática, observamos recurrentemente las dificultades que se presentan en la comprensión de algunas definiciones y procedimientos que devienen del uso y análisis incorrecto de las desigualdades.

Algunos de estos problemas se observan en el tratamiento de la definición de límite de una función, en los procedimientos de acotación, en la comparación de expresiones algebraicas y en otras nociones relacionadas con el cálculo y el álgebra.

Uno de los procedimientos propios del cálculo es la acotación que requiere un uso hábil de las desigualdades. Según Noriega (1991, p. 99), es tan importante en el Análisis Matemático la acotación que hay quienes dicen que "*hacer Análisis es acotar*". Como afirma Sinaceur (1992) fue Weierstrass quien eliminó del lenguaje del análisis toda relación con el movimiento. Considera que frases como "una variable se acerca a un límite", que recuerdan las ideas temporales de Newton, fueron transformadas en desigualdades, intentando basarlas estrictamente en el manejo puramente algebraico de estas. Además agrega el autor que se debe al mismo matemático la definición de continuidad que hoy se llama épsilon-delta. Destaca que en su obra de 1968, Jean Diudonné define explícitamente el cálculo infinitesimal como "un aprendizaje en el manejo de las desigualdades", un aprendizaje que puede resumirse en tres palabras: "minorización, mayorización, aproximación". Claramente estos tres procedimientos requieren destreza en el trabajo con desigualdades.

Estas cuestiones se ven claramente observadas por Artigue (1995) cuando propone desarrollar investigaciones que se ubiquen en la transición álgebra-cálculo, ya que considera que no existe un paso natural entre estos dominios sino que se da un desarrollo caótico provocando una ruptura que impacta en la comprensión de los temas del cálculo. Consideramos que las desigualdades constituyen uno de los temas que forman parte de esta transición por lo que en este artículo abordamos su estudio desde el punto de vista fenomenológico, en el sentido de Freudenthal (2002).

Algunas investigaciones en torno a las desigualdades estudian las dificultades de los estudiantes al abordar el trabajo con desigualdades y formulan propuestas para mejorar el tratamiento en el aula. Tal es el caso de Diez (1996), Malara, Brandoli y Fiori (1999), Tsamir y Almog (2001), Garrote, Hidalgo y Blanco (2004), Garuti (2003), Kieran (2004), Sackur (2004), Alvarenga (2006). Otras se dedican a indagar concepciones de estudiantes y docentes sobre el tema, como por ejemplo, Borello, Farfán y Lezama (2008), Borello (2010) y Halmaghi (2011). Asimismo otros autores estudian las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las nociones del cálculo como Artigue (1995), Tall (1995), Azcárate y Camacho (2003) y Calvo (2001). Como Artigue (1995) afirma, generalmente se han atacado los problemas de incomprensión del cálculo con reformas e innovaciones al interior del mismo, sin estudiar todo el proceso que le antecede.

La investigación realizada tuvo como objetivos:

- Describir los fenómenos que organiza la desigualdad matemática.
- Identificar las tareas que se vinculan con los fenómenos, en relación con las cuestiones que necesita construir el estudiante en la etapa elemental[1] para comprender mejor la matemática en la etapa avanzada.

En este artículo presentamos una pequeña parte de un estudio más amplio que realizamos focalizado en los fenómenos que organiza el concepto de desigualdad matemática. Dicho estudio constó de dos etapas. En la primera, realizamos un estudio fenomenológico que consiste en indagar en la historia de la matemática, en la opinión de investigadores y en textos de matemática avanzada con la finalidad de identificar fenómenos matemáticos organizados por el concepto de desigualdad. El hallazgo de estos fenómenos constituye un aporte inédito de dicho trabajo. Con este insumo, en la segunda etapa analizamos el tratamiento del tema en la escuela secundaria, a partir del estudio de opiniones de docentes, libros escolares y producciones de estudiantes.

En este trabajo se pretendió proporcionar un aporte teórico con un estudio fenomenológico de la desigualdad matemática y un aporte práctico, con el propósito de contribuir a mejorar la calidad de la enseñanza del tema.

El objetivo de estos aportes es reflexionar en torno a las condiciones requeridas para que los estudiantes construyan buenos "objetos mentales" (Freudenthal, 1983) de la desigualdad durante la etapa elemental, para abordar en mejores condiciones el estudio de nociones matemáticas en la etapa avanzada.

Nuestro interés en este artículo es describir el análisis de libros de texto de matemática avanzada y presentar los fenómenos matemáticos que encontramos. La investigación se realizó en el contexto de enseñanza de precálculo en Santa Fe (Argentina), específicamente, el caso de estudio es la cohorte 2012 del primer año del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Por lo tanto, las conclusiones reflejan las características del proceso educativo que impacta a esta población estudiantil. Los libros seleccionados para el análisis son los que utilizaron dichos estudiantes para el abordaje del tema.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico en el que basamos nuestro estudio proviene principalmente de la perspectiva de Freudenthal (2002). Este autor afirma que los conceptos, ideas y estructuras (en la mente) sirven para organizar fenómenos del mundo físico, social y mental. La fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlo en su

1. Adoptamos de Calvo (2001) la distinción entre etapa elemental y etapa avanzada. La primera tiene lugar en las clases de matemática hasta la escuela secundaria obligatoria, y la segunda está asociada a la enseñanza matemática universitaria.

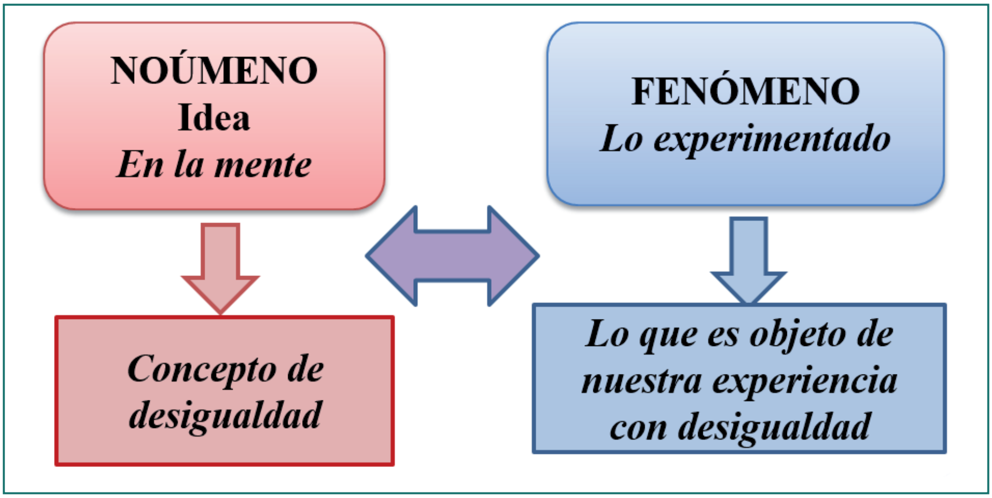

Figura 1. Términos de Freudenthal.

relación con los fenómenos para los que fue creado y a los que ha sido extendido en el proceso de aprendizaje de la humanidad. Cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, se habla de fenomenología didáctica, que consiste en una manera de mostrar al profesor los lugares en los que el alumno puede entrar en el proceso de aprendizaje.

Propone comenzar por los fenómenos que solicitan ser organizados y desde aquí enseñar a manipular los correspondientes medios de organización. En el proceso de construcción del conocimiento matemático, como se muestra en el Figura 1, distingue entre fenómeno y *noúmeno*. En palabras del mismo Freudenthal (2001):

> Los objetos matemáticos son *noumena,* pero un trozo de matemáticas puede ser experimentado como un *phainomenon;* los números son *noumena*, pero trabajar con números puede ser un *phainomenon*. (p.1)

- *Fenómeno*: es aquello que se comprende a través de la experiencia, que queremos comprender y estructurar.
- *Noúmeno*: corresponde a las entidades de pensamiento, las ideas con las que organizamos tal fenómeno. Es decir, lo que es capaz de concebirse con la mente.

Una discusión detallada sobre estos términos e ideas de Freudenthal se encuentra en Puig (1997).

En su postura didáctica Freudenthal asume que el objetivo de la acción educativa en el sistema escolar ha de ser básicamente la constitución de buenos objetos mentales y solo en segundo lugar la adquisición de conceptos tanto temporalmente como en orden de complejidad.

En nuestra investigación nos proponemos encontrar los fenómenos matemáticos que son organizados por el concepto de desigualdad.

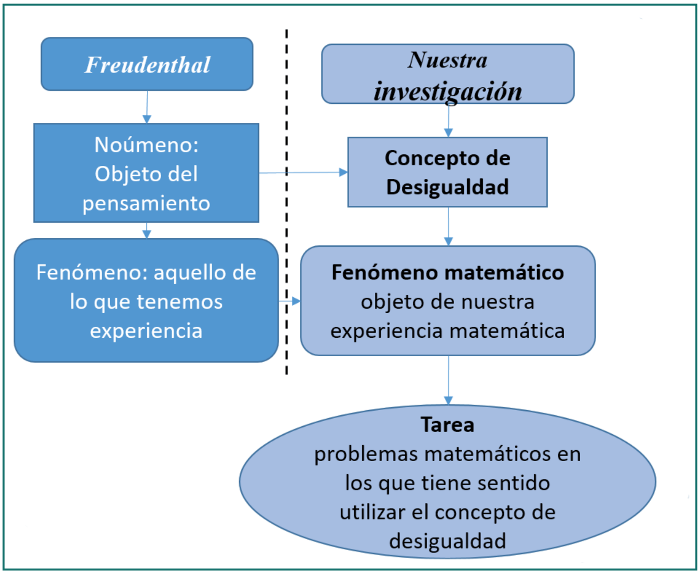

Figura 2. Términos en nuestra investigación.

En el Figura 2 mostramos los sentidos con los que utilizamos los términos en nuestro estudio. La expresión *concepto de desigualdad* para *noúmeno*, es decir lo que está en la mente del estudiante referido a la desigualdad. Con respecto a los *fenómenos* optamos por describir los del tipo matemático, aquellos de lo que tenemos experiencia matemática. En los textos analizados se presentan distintas *tareas*, llamamos así a los problemas cuya resolución se vincula con los fenómenos analizados.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

En el marco de la modalidad cualitativa (McMillan y Schumacher, 2005), llevamos a cabo una investigación no interactiva, consistente en el análisis de libros de texto con el fin de identificar los aspectos enfatizados en el desarrollo de las desigualdades matemáticas. Los documentos de estudio son los textos de matemática avanzada utilizados por los estudiantes del primer año de la Formación Inicial de Profesorado en Matemática, por lo que se trata de un muestreo intencionado.

Para el desarrollo de la fenomenología didáctica de la desigualdad seguimos el criterio adoptado por Claros Mellado (2010) y Sanchez Compaña (2012), quienes realizan una búsqueda de fenómenos (del límite finito de una sucesión y de límite finito de una función en un punto, respectivamente) que surgen directamente de las definiciones formales, en nuestro caso las propuestas por los textos de matemática avanzada.

Los objetos matemáticos suelen presentarse en los textos mediante una definición; generalmente unido a la misma está el procedimiento en el que entran en juego las relaciones y propiedades que los involucran. Indagamos en la definición que presentan estos textos con el objetivo de analizar los fenómenos matemáticos que organizan. El estudio tiene un carácter exploratorio y la categorización inicialmente es inductiva. Para la descripción detallada de los fenómenos recurrimos a herramientas teóricas que ayudaron a precisar y ampliar la fundamentación de la categorización, de modo que ésta adopta un carácter inductivo-deductivo.

Seleccionamos los libros que corresponden a la bibliografía básica que contiene el tema desigualdades en los planes de cátedra de las asignaturas Matemática Básica y Cálculo I, del primer año de la Formación Inicial del Profesorado en Matemática (ver Tabla1). Recordemos que dicha búsqueda la restringimos específicamente a aquellos fenómenos del tipo matemático.

Tabla 1. *Libros analizados*

Libro	Asignatura	Autores	Editorial	Título	Año
L1	Matemática Básica	Lehmann	Limusa	Algebra	1992
L2	Cálculo I	Salas, Hille y Etgen	Reverté	Calculus. Una y varias variables	2002

Los libros seleccionados fueron utilizados por los alumnos del caso de estudio.

El libro **L1** se utiliza en la asignatura Matemática Básica donde se trata por primera vez en la carrera el tema desigualdades. El propósito de la asignatura es ayudar al estudiante a pasar por una transición cómoda de la matemática en la etapa elemental al cálculo. Para ello, se estudian los temas y métodos esenciales del álgebra y el precálculo que se necesitarán en los estudios posteriores de matemática.

El libro **L2** de la Tabla 1 corresponde a la bibliografía utilizada en la asignatura Cálculo I de la carrera mencionada. El objetivo general de esta asignatura es que el alumno adquiera los conceptos esenciales del cálculo diferencial e integral de funciones de una variable, la habilidad para usar su lenguaje y sus técnicas en problemas analíticos, geométricos y físicos.

ANÁLISIS DE LOS TEXTOS

Libro L1

El autor presenta tres definiciones en el capítulo 6 titulado "Desigualdades e inecuaciones". A continuación analizamos estas definiciones con la finalidad de identificar y caracterizar los fenómenos matemáticos que organizan.

Definición 1: Fenómeno de Ordenación

Como mostramos en la figura 3, el capítulo 6 titulado "Desigualdades e inecuaciones", comienza con la sección 6.1 denominada "Introducción", donde el autor relaciona explícitamente la idea de mayor y menor entre dos números con la de ordenación, y vincula esta última con la relación de orden en el conjunto de números reales.

Al concepto de mayor y menor entre dos números corresponde el de *ordenación. La relación de orden queda restringida a los números reales* y se puede interpretar geométricamente en un sistema coordenado unidimensional (Art. 3.7). En otras palabras, *todo nuestro estudio con desigualdades se limitará a los números reales.* No tiene sentido decir que un número complejo es mayor o menor que otro.

Aunque ya hemos dado algunas definiciones de términos y símbolos asociados con las desigualdades, las vamos a repetir, por comodidad, en los siguientes artículos.

6.2. DEFINICIONES Y TEOREMAS FUNDAMENTALES

Hemos definido una ecuación como una igualdad entre dos expresiones (Art. 4.2). Si dos expresiones son desiguales, tenemos una *desigualdad,* diciéndose que una de las expresiones es mayor o menor que la otra.

Figura 3. Extracto del libro L1 (p.135)

En la sección 6.2, denominada "Definiciones y Teoremas Fundamentales", el autor retoma la definición de ecuación para introducir por oposición la de desigualdad, concepto que utiliza para expresar la idea de que una expresión es mayor o menor que otra.

Si asumimos, como el autor lo hace para los números reales, que "al concepto de mayor y menor" entre dos expresiones "corresponde el de ordenación", tenemos directamente vinculado el concepto de desigualdad con la idea de ordenación.

Como observamos en la Figura 4, a continuación el autor define *mayor* y *menor*. Además, destaca que dos desigualdades tienen el *mismo sentido* si sus símbolos apuntan en la misma dirección; en caso contrario tienen *sentidos opuestos*.

El autor habla de la desigualdad entre expresiones en las que aparecen variables. Considera que la variable toma valores en un subconjunto de números reales, nosotros lo llamaremos dominio de valores admisibles de la variable. Esto es, el conjunto de valores de la incógnita para los cuales tienen sentido (son definidos) su primero y segundo miembro. Es importante aclarar que el autor con el término "expresiones" se refiere a las expresiones algebraicas que define en los capítulos previos.

Así como el autor de **L1** relaciona mayor y menor con la *ordenación*, extendemos esta idea a las expresiones algebraicas y consideramos que el *fenómeno de ordenación* surge en relación con la definición de desigualdad entre éstas.

Fenómeno de Ordenación: como su nombre indica, la relación de orden, o simplemente orden, es la herramienta matemática diseñada para ordenar los elementos de un conjunto. Los elementos de un conjunto no están ordenados, claramente a modo de ejemplo $\{1, 2, 3\}$ es el mismo conjunto que el $\{3, 2, 1\}$. En particular, cuando se trata del concepto de desigualdad, los elementos que resultan ordenados son las expresiones en las que aparecen variables.

El número real x se dice que es *mayor* que el número real y siempre que $x - y$ sea un número positivo. Entonces escribimos $x > y$ que se lee "x es mayor que y". Así, $2 > -3$, pues $2 - (-3) = 5$ es un número positivo.

Se sigue de esta definición que el número real y es *menor* que el número real x siempre que $y - x$ sea un número negativo. Entonces escribimos $y < x$ que se lee "y es menor que x". Así, $5 < 7$, pues $5 - 7 = -2$ que es un número negativo.

El estudiante debe observar que, para ambos símbolos de desigualdad, la cantidad mayor queda siempre en el lado hacia el cual se abre el símbolo, mientras que el vértice apunta hacia la cantidad menor. También vamos a introducir otros dos símbolos útiles: $a \geq b$, que se lee "a es mayor o igual que b", y $c \leq d$ que se lee "c es menor o igual que d". En particular, la desigualdad $a \geq 0$ es un modo conveniente de afirmar que a representa a todo número no negativo.

Se dice que dos desigualdades tienen el *mismo sentido* si sus símbolos apuntan en la misma dirección; en caso contrario tienen *sentidos opuestos*. Por ejemplo las desigualdades $a > b$ y $c > d$ tienen el mismo sentido, pero las desigualdades $a > b$ y $c < d$ tienen sentidos opuestos.

Figura 4. Extracto de la Sección 6.2 del libro **L1** (p. 136)

Según Tarski (1977) la teoría de las relaciones es una de las ramas más desarrolladas de la lógica matemática. Agrega que en el cálculo de relaciones tenemos dos relaciones especiales, la identidad y la diversidad entre individuos. En el cálculo de relaciones se las denota por medio de los símbolos I y D, y no por los símbolos = y ≠ empleados en otras partes de la lógica.

El orden supone una estructura agregada al conjunto, y se adquiere mediante la definición en dicho conjunto de una relación apropiada. Para establecer un orden debemos señalar qué elementos preceden a cuáles, lo cual se indica mediante la relación R: "si a precede a b, entonces $(a, b) \in R$". Claramente la pareja inversa no puede ser parte de la relación, por lo cual pediremos que sea asimétrica. Además, si un elemento precede a otro y éste a un tercero, entonces el primero debe preceder al tercero, por lo cual exigiremos transitividad.

La definición de desigualdad como una relación que cumple con ciertas propiedades (tricotomía y transitividad) en un conjunto, nos conduce a plantear la existencia del *fenómeno de ordenación*. Como resultado de la condición de orden en el conjunto de los números reales surgen en paralelo las desigualdades de expresiones. Es fácil entender que este fenómeno está presente en la necesidad de compararlas y ordenarlas.

Definición 2: Fenómeno de Generalización

El autor del libro **L1** define dos tipos de desigualdades diferenciándolas de acuerdo a su dominio de validez: las "desigualdades absolutas" (ver Figura 5) y las "desigualdades condicionales o inecuaciones" (ver Figura 6). Este hecho es relevante a nuestro entender para identificar cada uno de estos conceptos en relación con los fenómenos que organizan.

Además establece una coherencia con el caso de las igualdades en lo que se refiere a la definición de identidad y ecuación.

Una *desigualdad absoluta* o *incondicional* es aquella que tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables para los que están definidos sus miembros. Son ejemplos de desigualdades absolutas $5 > -7$ y $x^2 + 1 > 0$.

Figura 5. Extracto de la Sección 6.2 del libro **L1** (p. 136)

Observamos que la expresión "tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables" supone la existencia de una función proposicional cuantificada universalmente que será necesario validar. Esta validación se concreta para todos los elementos del dominio de valores admisibles de la variable. Interpretamos que refiere al *fenómeno de generalización*.

Fenómeno de Generalización: se fundamenta en la lógica proposicional y en particular en el principio de generalización universal, que establece que: "del ejemplo de sustitución de una función proposicional respecto del nombre de un individuo cualquiera arbitrariamente elegido, se puede inferir válidamente la cuantificación universal de la función proposicional" (Copi, 1999, p. 375).

Por otro lado, observamos que el autor incluye la desigualdad 5 > -7 como ejemplo de desigualdad absoluta, aun cuando no contiene variables. Este caso es considerado en nuestro estudio como una desigualdad numérica, que se rige por las nociones de orden en los reales que naturalmente nos remite al fenómeno de ordenación.

Definición 3: Fenómeno de Especificación

Por otro lado, como observamos en la Figura 6, define desigualdades condicionales.

En la definición de desigualdad condicional expresa que es aquella que tiene el "mismo sentido para ciertos valores de las variables". Esta expresión es relevante ya que pone de manifiesto que existirán o no valores, que se toman de un dominio admisible, que harán cierta la desigualdad. Esta idea nos remite a la acción de particularizar las variables con valores del dominio. Desde el punto de vista matemático se trata

Una *desigualdad condicional* o *inecuación* es aquella que tiene el mismo sentido solo para ciertos valores de las variables, tomados entre los valores para los que sus miembros están definidos. Son ejemplos de desigualdades condicionales o inecuaciones

$$x - 2 < 3, \text{ válida solo si } x < 5;$$
$$x^2 > 4, \text{ válida solo si } x > 2 \text{ ó si } x < -2.$$

Figura 6. Extracto del libro **L1** página 136.

de una cuestión fundamental de la teoría de conjuntos, relacionada con la definición de estos objetos. En la teoría axiomática de conjuntos, uno de los axiomas que fundamenta la existencia o no de un conjunto, es el de especificación (Halmos, 1967, p. 15), el cual es utilizado para justificar la existencia de un subconjunto especificado por la cláusula o condición dada de un conjunto A. Este hecho se refiere también a la constatación de la verdad o falsedad de una proposición a partir de la verificación de la existencia o no de individuos que la satisfacen, tomados de un dominio admisible. Surge de esta manera el *fenómeno de especificación.*

Fenómeno de Especificación: refiere al dominio de validez de la desigualdad entre dos expresiones. Se basa en el llamado axioma (esquema) de especificación destinado a la formación de nuevos conjuntos a partir de un referencial, según Halmos (1967).

> Axioma de especificación: a todo conjunto A y a toda condición *S(x)* corresponde un conjunto B cuyos elementos son precisamente aquellos elementos *x* de A para los cuales se cumple S(*x*). (...) Para indicar la forma en que B es obtenida de A y de *S(x)*, se escribe: B = $\{x \in A / S(x)\}$ (Halmos, 1967, p. 15)

Según Halmos, el axioma de especificación significa que dada una propiedad S, podemos formar un conjunto con los elementos de un conjunto A que satisfacen la propiedad. Esta restricción de la propiedad S a los elementos de un conjunto A previamente dado, es coherente con la descripción intuitiva del universo U: todos los elementos de A deben haberse definido en etapas anteriores, por lo tanto están disponibles para ser elementos de un conjunto.

Además menciona que esta restricción es la idea fundamental de Zermelo para evitar paradojas del tipo de la de Russell, cuando se daba por supuesta la existencia de un universo. Para especificar un conjunto no es suficiente dar la propiedad, sino que también hay que disponer de un conjunto a cuyos elementos pueda aplicarse esa propiedad.

Otra interpretación es considerar a una desigualdad con variable como una función proposicional o proposición abierta. Según Negrete (2002), una función proposicional o proposición abierta es aquella expresión de la que no puede decirse si es verdadera o falsa. Por ejemplo, $3x+1<4$ es una función proposicional. La característica de la función proposicional es que puede dar origen a una proposición si se sustituyen las variables

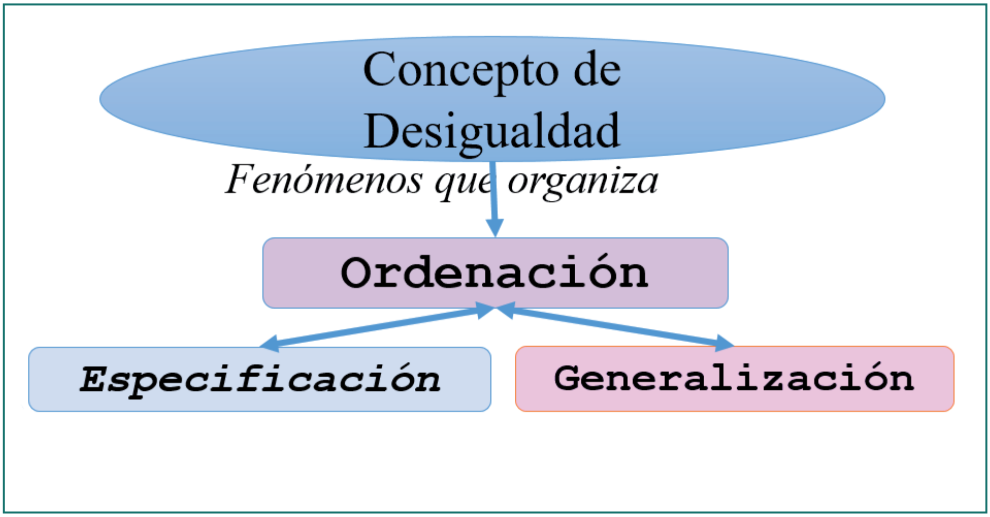

Figura 7. Fenómenos que organiza la desigualdad.

o si se la cuantifica. Al conjunto de valores que hacen verdadera una proposición, este autor lo llama "campo de variabilidad", lo que coincidiría con lo que llamamos previamente especificación. En el ejemplo, el campo de variabilidad de la función proposicional $3x+1<4$ es B = $(-\infty,1)$. Es decir, que al sustituir cualquier $x \in$ B en la función proposicional, la proposición resultante es verdadera.

También es interesante analizar que una inecuación expresa la propiedad que define por comprensión los elementos de un conjunto, es decir hay una variable y una propiedad expresada por medio de una relación de desigualdad, como por ejemplo en el conjunto B=$\{x\in \mathbb{R}/\ 3x+1<4\}$. La especificación de x, en cierta forma, refiere a condicionar la extensionalidad de un conjunto. Es preciso encontrar los elementos que forman este conjunto, es decir mostrar, en una especie de extensión, cuáles son los elementos de este conjunto. En el ejemplo, B es el intervalo $(-\infty,1)$.

Es importante destacar que en las desigualdades condicionales se habla de "solución" de la desigualdad, y para abreviar razonamientos se dice a veces que la solución es un conjunto de valores de x (por ejemplo el intervalo $a<x<b$). En realidad se entiende de esta manera que cualquier valor x de este conjunto es una "solución". Por ejemplo para todo x real, encontrar los x tales que $x - 3 < 2$ consiste en hallar los elementos del conjunto B = $\{x\in \mathbb{R}\ /\ x - 3 < 2\} = (-\infty, 5)$.

Resumiendo, en el libro **L1** identificamos tres fenómenos: ordenación, especificación y generalización. En la Figura 7 observamos los fenómenos matemáticos encontrados que organizan las definiciones de desigualdad analizadas. La disposición de los fenómenos en el esquema, obedece a que el de ordenación atraviesa el trabajo matemático que involucra una desigualdad y está presente en una primera instancia, es decir, subyace naturalmente debido al paralelo que se establece con el orden definido en el conjunto de los números reales.

Propiedades de orden

Si a y b son números reales, entonces a *es menor que* b ($a < b$) si $b - a$ es un número positivo. Esto es equivalente a decir que b *es mayor que* a ($b > a$). Desde el punto de vista geométrico, $a < b$ si el punto a está a la izquierda del punto b sobre la recta real. La notación $a \leq b$ significa tanto $a < b$ como $a = b$ (equivalentemente, $b \geq a$).

Los números reales están ordenados de manera que si a y b son números reales, entonces se verifica solamente una de las siguientes afirmaciones:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b. \qquad \text{(tricotomía)}$$

Los símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ se llaman *desigualdades*. Las desigualdades satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (propiedad transitiva)
(ii) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todos los números reales c.
(iii) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
(iv) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
(v) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Estas propiedades también se verifican para $>$, $\leq$ y $\geq$. La propiedad (v) es muy importante: si se multiplica una desigualdad por una cantidad negativa, entonces la "dirección" de la desigualdad se invierte. Las técnicas para resolver desigualdades utilizan estas propiedades, por lo que se volverán a ver en la sección 1.3.

Figura 8. Extracto de la Sección 1.2 del libro **L2** (p. 6).

Libro L2

En la sección 1.2 los autores del libro **L2** definen para números reales las nociones de mayor, menor y explican el significado de las notaciones que expresan las relaciones de menor o igual y de mayor o igual. A continuación enuncian la ley de tricotomía, que vincula el concepto de orden con las nociones de mayor, menor e igualdad entre números reales. Posteriormente enuncian propiedades del orden en R, como mostramos en la Figura 8.

Después de la referencia a la sección anterior, los autores continúan en la sección 1.3 con la siguiente aclaración: "En esta sección nos ocuparemos de una clase de desigualdades que abundan en el cálculo: aquellas que incluyen una variable" (ver Figura 9).

Observamos que no definen formalmente la expresión desigualdades que incluyen una variable. En la explicación que realizan, la interpretación de ésta queda subordinada a la establecida para la desigualdad de números reales. Es decir, hacen referencia a la definición de mayor, menor, menor o igual y mayor o igual, la ley de tricotomía y las propiedades del orden.

Según nuestra interpretación, el fenómeno que organiza esta caracterización de desigualdad como la relación entre expresiones que no son iguales, mencionando las propiedades que cumple esta relación, es el de *ordenación*, en este caso de expresiones que incluyen variables.

1.3 DESIGUALDADES

(Todo nuestro trabajo con las desigualdades está basado en las propiedades de orden de los números reales enunciadas en la página 6.)

En esta sección nos ocuparemos de una clase de desigualdades que abundan en el cálculo: aquellas que incluyen una variable.

Resolver una ecuación en x es hallar el conjunto de los números x para los cuales se verifica la ecuación. Resolver una desigualdad en x es hallar el conjunto de los números x para los cuales la desigualdad se verifica.

La manera de resolver una desigualdad es muy parecida a la que usamos para resolver una ecuación, pero existe una diferencia importante. Podemos conservar una desigualdad sumándole el mismo número a ambos miembros, o restándole el mismo número a ambos miembros, o multiplicando o dividiendo ambos miembros por un mismo número *positivo*. Pero si multiplicamos o dividimos por un número *negativo*, entonces la desigualdad se *invierte*:

$$x-2<4 \quad \text{da} \quad x<6, \qquad x+4<2 \quad \text{da} \quad x<2, \qquad \tfrac{1}{2}x<4 \quad \text{da} \quad x<8,$$

pero

$$-\tfrac{1}{2}x<4 \quad \text{da} \quad x>-8.$$

observar

Figura 9. Extracto de la Sección 1.3 libro **L2** (p. 13)

A continuación, los autores realizan una explicación referida a la resolución de una desigualdad. En la expresión "resolver una desigualdad en x es hallar el conjunto de los números para los cuáles la desigualdad se verifica" observamos el *fenómeno de especificación* que consiste en definir el dominio de validez de dicha desigualdad. Otra cuestión importante, a diferencia del texto anterior, es que no se realiza distinción entre desigualdades condicionales y absolutas. Es decir, bajo el nombre desigualdades se incluyen tanto las inecuaciones como las desigualdades absolutas. Cuando se describe la resolución de una desigualdad se hace en referencia a una desigualdad condicional.

Al final de la sección 1.3 "Desigualdades" (ver Figura 10) los autores presentan la desigualdad triangular para números reales, exhibiendo en este caso la demostración de una desigualdad absoluta. Según la caracterización realizada en el análisis de **L1**, consideramos que en esta propiedad está presente el *fenómeno de generalización.*

En síntesis, en el libro **L2** los autores no presentan una definición formal de desigualdad, sino que exponen una descripción detallada de ejemplos de algunas tareas. En las mismas, observamos indicios de los fenómenos que encontramos en el texto anterior, a saber: ordenación, especificación y generalización.

TIPOS DE TAREAS

Según Rico, Marín, Lupiañez y Gómez (2008) el análisis fenomenológico de estructuras y conceptos matemáticos, desde una perspectiva funcional de la matemática escolar, aporta una técnica para mostrar cuáles son los sentidos con que se utilizan conceptos y estructuras. Esta perspectiva pone el acento en el uso y aplicación de los conceptos, en los medios y en los modos en que, con ellos, se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a determinados problemas, en definitiva, cuando contribuyen a la comprensión de ciertos fenómenos.

Llegamos ahora a una de las desigualdades fundamentales del cálculo: para dos números reales a y b,

(1.3.7) $$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Se la denomina *desigualdad triangular* por analogía con el principio geométrico "en un triángulo, la longitud de cada lado es inferior o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados".

Demostración de la desigualdad triangular La demostración es fácil si se piensa en $|x|$ como $\sqrt{x^2}$. Obsérvese, en primer lugar, que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2.$$

Comparando los extremos de la desigualdad y tomando raíces cuadradas, obtenemos

$$\sqrt{(a+b)^2} \leq |a| + |b|. \qquad \text{(ejercicio 59)}$$

El resultado se obtiene observando que

$$\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|.$$

La variante de la desigualdad triangular que aparece a continuación también se presenta en el cálculo: para a y b números reales cualesquiera,

(1.3.8) $$||a| - |b|| \leq |a-b|.$$

La demostración se deja como ejercicio.

Figura 10. Extracto de la sección 1.3 del libro **L2** (p. 18)

Los autores mencionan que el análisis fenomenológico se propone mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, y que los vinculan con el mundo natural, cultural, social y científico. Y esto, con la finalidad de dotar de sentido el aprendizaje de tales conceptos y estructuras.

Sostienen los autores que cuando se quiere presentar una estructura matemática en toda su plenitud de significados, se considera la conexión de sus diferentes subestructuras con distintas familias de fenómenos y se vincula con aquellos campos del conocimiento donde tiene una utilidad establecida.

Los textos de la Tabla 1 presentan distintas tareas que vinculamos con los fenómenos analizados. No existe una correspondencia lineal entre los fenómenos encontrados y las tareas, dado que en los procedimientos de resolución de estas últimas aparecen integrados los fenómenos descriptos. Es decir, una misma tarea puede comprender distintos fenómenos y viceversa. No obstante, es posible hallar una vinculación central entre cada tipo de tarea con alguno de los fenómenos, como veremos en breve.

La presentación siguiente de las tareas es pertinente para nuestra investigación ya que nos proponemos encontrar las necesidades conceptuales que requiere el estudio de la matemática en la etapa avanzada, con el objetivo de analizar si es que existen rupturas con respecto al tratamiento del tema en la escuela secundaria.

Los tipos de tareas más relevantes que encontramos en los textos analizados son las siguientes:

- Tarea 1: Comparar expresiones (CE). Vinculamos esta tarea fundamentalmente con el fenómeno de ordenación, dado que la comparación conduce a establecer si una expresión es mayor o menor que otra.
- Tarea 2: Resolver inecuaciones (RI). Esta tarea está especialmente vinculada con el fenómeno de especificación, dado que se trata de encontrar el dominio de validez de la desigualdad dada.
- Tarea 3: Demostrar desigualdades absolutas (DDA). Esta tarea se vincula centralmente con el fenómeno de generalización, dado que se trata de validar la desigualdad para todos los elementos del dominio de valores admisibles de la variable.

Tarea 1: CE

En el libro **L1** el autor propone una única tarea de este tipo que mostramos en la Figura 11, en la que, para resolverla, será necesario encontrar primero la relación de orden que se establece para luego respaldar con una demostración lo que se afirma.

18. Si a y b son números positivos, determinar cuál de las dos siguientes expresiones es la mayor $\frac{a+2b}{a+3b}$ o $\frac{a+b}{a+2b}$.

Figura 11. Ejemplo de tarea **CE** del libro **L1** (p. 142)

En el libro **L2** encontramos en los ejercicios propuestos tres enunciados de tareas del tipo **CE** como se muestra en la Figura 12.

54. Ordenar los siguientes términos: $1, x, \sqrt{x}, \frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}$ cuando $1 < x$.

55. Mismo ejercicio que el anterior con $0 < x < 1$.

56. Comparar

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} \text{ y } \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

cuando $x > 0$.

Figura 12. Ejemplo de tarea **CE** del libro **L2** (p. 19)

Tarea 2: RI

En el libro **L1** encontramos el tipo de tarea **RI** que corresponde al Grupo 22 en la página 149 y consta de 50 ejercicios de la sección 6.4 Desigualdades lineales y a la sección 6.5 Inecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

En cada uno de los ejercicios 1-6, resolver la inecuación lineal dada y comprobar el resultado gráficamente.

1. $x - 5 > 3 - x$.
2. $x + 4 < 3$.
3. $2x + 1 < 3x - 1$.
4. $4x + 10 > 4 - 2x$.
5. $x - 2/3 > 2x + 4/3$.
6. $x + 1/2 < 2 + \frac{x}{4}$.

Figura 13. Ejemplo de tarea **RI** del libro **L1** (p. 149)

En el libro **L2** encontramos esta tarea en los ejemplos propuestos en la presentación del tema. Es importante mencionar que en los Ejercicios 1.3 (página 19) presenta 66 tareas para esta sección y propone 43 tareas de tipo **RI**.

Resolver las siguientes desigualdades y representar el conjunto de soluciones en la recta real.

1. $2 + 3x < 5$.
2. $\frac{1}{2}(2x + 3) < 6$.
3. $16x + 64 \leq 16$.
4. $3x + 5 > \frac{1}{4}(x - 2)$.
5. $\frac{1}{2}(1 + x) < \frac{1}{3}(1 - x)$.
6. $3x - 2 \leq 1 + 6x$.
7. $x^2 - 1 < 0$.
8. $x^2 + 9x + 20 < 0$.
9. $x(x - 1)(x - 2) > 0$.
10. $x(2x - 1)(3x - 5) \leq 0$.
11. $x^3 - 2x^2 + x \geq 0$.
12. $x^2 - 4x + 4 \leq 0$.
13. $\frac{1}{x} < x$.
14. $x + \frac{1}{x} \geq 0$.

Figura 14. Ejemplo de tarea **RI** del libro **L2** (p. 13)

Tarea DDA

En el libro **L1** en la sección 6.3 Desigualdades absolutas presenta el Grupo 21 que consta de 25 tareas del tipo **DDA**. Como se muestra en los ejemplos de la Figura 15.

1. Demostrar que la suma de cualquier número positivo (excepto la unidad) con su recíproco, es mayor que 2.
2. Si a y b son dos números positivos desiguales, demostrar que

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}.$$

3. Si a y b son positivos y $a > b$, demostrar que $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ por un método independiente del Corolario 3 del Teorema 6 (Art. 6.2).
4. Si a y b son números positivos desiguales, demostrar que $a/b^2 + b/a^2 > 1/a + 1/b$.
5. Si a y b son números positivos desiguales, demostrar que $a + b < a^2/b + b^2/a$.
6. Si a y b son números positivos desiguales, demostrar que $a + b > 2\sqrt{ab}$.

Figura 15. Ejemplo de tarea **DDA** del libro **L1** (p. 141)

En el libro **L2** los autores presentan 10 tareas del tipo **DDA** de las 66 propuestas como ejercicios de la sección de Desigualdades. Mostramos algunas, a modo de ejemplo, en la Figura 16.

57. Sean a y b dos números que tienen el mismo signo. Demostrar que $(1/b) < (1/a)$.

58. Sean a y b dos números no negativos. Demostrar que

$$\text{si} \quad a^2 \leq b^2 \quad \text{entonces} \quad a \leq b.$$

59. Sean a y b dos números no negativos. Demostrar que

$$\text{si} \quad a \leq b \quad \text{entonces} \quad \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$$

60. Demostrar para dos números reales a y b cualesquiera

$$|a-b| \leq |a| + |b|.$$

Figura 16. Ejemplo de tarea **DDA** del libro **L2** (p. 18)

CONCLUSIONES

Esta búsqueda fue orientada por la necesidad de encontrar fenómenos que surgen en las tareas que se abordan con los estudiantes y que pueden iniciarse en la etapa elemental. Es decir, nos preguntamos: ¿es posible iniciar a los estudiantes de la escuela secundaria en estos fenómenos?

En este artículo describimos los fenómenos matemáticos organizados por el concepto de desigualdad que encontramos en los textos de matemática avanzada seleccionados. Los mismos tienen su origen en procedimientos importantes en matemática: la ordenación, la especificación y la generalización.

En la Figura 17 representamos gráficamente dichos fenómenos matemáticos. Según la indagación realizada en la primera parte del estudio más amplio que llevamos a cabo, consideramos que la matemática avanzada necesita éstos como insumo. Consideramos que se vinculan con las tareas **CE**, **RI**, **DDA**.

A partir de los resultados obtenidos en la investigación mencionada, proponemos las siguientes recomendaciones para la enseñanza.

- Es necesario tener en cuenta los fenómenos matemáticos que organiza el concepto de desigualdad, y ofrecer experiencias a los estudiantes abordando distintos tipos de tareas que enriquezcan su *objeto mental desigualdad*.
- Las tareas **CE** involucran a los estudiantes en actividades enmarcadas en el *fenómeno de ordenación,* y aportan sentido de relación a la desigualdad. Por ello, es fundamental promover la interpretación de la desigualdad con un sentido de relación entre objetos sin restringirla solamente al concepto de inecuación.
- Las tareas **RI** se enriquecen al incluir los casos no típicos, donde los procedimientos no se automatizan en una búsqueda algorítmica del conjunto solución. Comprender que la inecuación no es una mera complejización de la ecuación, respecto del conjunto solución y de su signo, favorece un tipo de aprendizaje no rutinario. Para ello, estas tareas deben estar fundadas en el reconocimiento de que los "pasajes de términos" son las transformaciones de una inecuación en otras equivalentes.
- Las tareas **DDA** contribuyen a introducir a los estudiantes en la problemática de la demostración matemática y brindan experiencias dentro del *fenómeno de generalización*. Es importante habituar a los estudiantes a que justifiquen sus decisiones con las herramientas matemáticas que poseen, respaldando las afirmaciones con propiedades conocidas. Como sostiene Dreyfus (2000), "no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático" (p. 130).

Finalmente, consideramos que es importante no retardar indebidamente las experiencias de los estudiantes con los distintos tipos de tareas requeridas en la matemática avanzada. De esta manera los estudiantes alcanzarán un conocimiento preciso y más profundo de las desigualdades y serán capaces de aplicarlas con flexibilidad en contextos distintos.

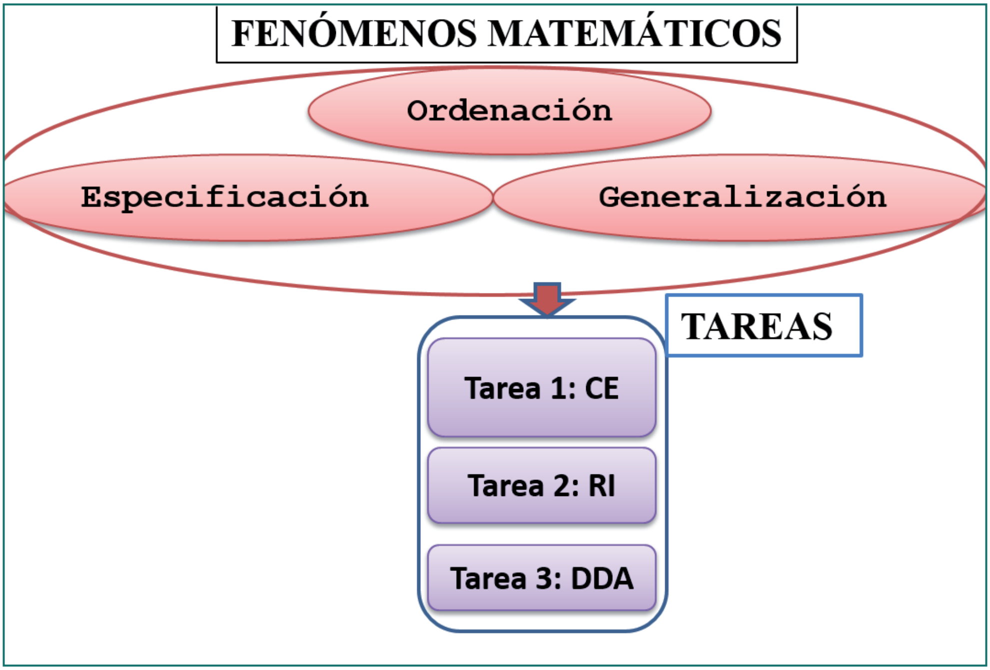

Figura 17. Fenómenos y tareas que requiere la matemática avanzada.

REFERENCIAS

Alvarenga, K. (2006). *Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios* (Tesis doctoral no publicada). Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Artigue, M (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en la educación Matemática*. (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 135-149.

Borello, M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada. Instituto Politécnico Nacional. México

Borello, M., Farfán, R. M. y Lezama, J. (2008). Relazione tra le concezioni e le idee del docente e l'apprendimento dell'allievo nel caso delle disequazioni. Lo stato dell'arte. *La matematica e la sua didattica*, 22 (3), 331-361. Bologna, Italia: Pitagora.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona.

Claros Mellado, F. (2010). *Limite finito de una sucesión: fenómenos que organiza* (Tesis de doctorado). Universidad de Granada. Disponible en: http://fqm193.ugr.es/~fclaros/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7459/

Copi, I. (1999). *Introducción a la lógica*. Buenos Aires: Eudeba.

Diez, M. (1996). *Sobre la simbolización en el Álgebra. Aplicación al proceso de aprendizaje de las desigualdades en Educación Secundaria* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid. España.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido del currículum. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Coords.): *Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: ICE de la Universidad de Barcelona y Editorial Graó.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. (Textos seleccionados). 2ª Edición.* Traducción, notas e introducción de Luis Puig. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. New York: Kluwer Academic publishers.

Garrote, M., Hidalgo, M. y Blanco, L. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma*, 46, 37-44.

Garuti, R. (2003). Attività sulle disequazioni come contesto per lo sviluppo dei concetti di variabile e funzione. *Rivista di Matemática della Università Di Parma 2001*, 1-9.

Halmaghi, E. (2011). *Undergraduate students' conceptions of inequalities: sanding the lens*. (Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy). Faculty of Education. Simon Fraser University.

Halmos, P. (1967). *Teoría intuitiva de los conjuntos*. México: Compañía editorial continental S.A.

Kieran, C. (2004). The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations. En M. Hoines and A.B. Fuglestad, eds., *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, (pp. 143-147). Noriega: Bergen. Lehmann, C. H. (1992). Álgebra. México: Limusa.

Malara, N., Brandoli, M. T. y Fiori, C. (1999). Comportamenti di studenti in ingresso all'universitá di fronte allo studio di disequazioni. En Jean-Philipe y Maryse Maurel *Actes des Séminaires-SFIDA XII*. vol.III, Modena L'IREM de Nice, pp.XII 13-28.

Mcmillan, J.H. y Schmacher, S. (2005). *Investigación educativa*. 5° edición. Madrid: Pearson Addison Wesley.

Noriega, R. (1991). *Cálculo Diferencial e Integral*. Cuarta edición. Buenos Aires: Docencia.

Negrete, J. (2002). *Lógica elemental*. México: Limusa.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Rico, L, Marín, A., Lupiáñez, J. y Gomez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma*, 58, 7-23.

Salas, S., Hille, E. y Etgen, G. (2002). *Cálculus. Una y varias variables*. Volumen I. (4ta ed). España: Editorial Reverté, S.A.

Sánchez, M. (2012). *Limite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza* (Tesis de doctorado). Universidad de Granada.

Sackur, C. (2004). Problems related to the use of graphs in solving inequalities. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, (pp. 148-151). Noriega: Bergen.

Sinaceur, H. (1992). *La construction algébrique du continu: calcul, ordre, continuité*. En Jean-Michel Salanskis y Hourya Sinaceur (Edit.) *Le labyrinthe du continu: Coloquio de Cerisy* (French Edition). Paris: Springer-Verlag.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, *Conference of the International Group Psychology of Learning Mathematics*, (1) (161- 175) Recife, Brazil.

Tarski, A. (1977). *Introducción a la lógica y a la metodología de las Ciencias deductivas*. Madrid: Espasa-Calpe.

Tsamir, P. y Almog, M. (2001). Students' strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*. 32(4), 513-524.