

El aprendizaje del conteo y el recitado de la secuencia de palabras número: Articulando las matemáticas importantes con las imprescindibles

Carlos de Castro Hernández

Universidad Autónoma de Madrid

Mónica Ramírez García

Universidad Complutense de Madrid

Resumen: *Los fundamentos del conteo se aprenden a edad temprana. Con tres años, el recitado de la secuencia de palabras número debe alcanzar hasta “diez” e, idealmente, hasta “quince”. El recitado es imprescindible para el conteo, y tiene regularidades que se infravaloran, poniendo énfasis solo en la memorización. Al tiempo, se aprenden ideas matemáticas importantes relativas al conteo como la correspondencia uno a uno, el principio de cardinalidad o la funcionalidad del conteo. Describimos el trabajo de elaboración de álbumes ilustrados para articular el aprendizaje de matemáticas importantes e imprescindibles para el conteo a los 3 años. Explicamos cómo el texto y las ilustraciones responden a pautas didácticas emergentes de la investigación sobre el pensamiento numérico infantil. Describimos los usos de los álbumes en el aula y nuestras expectativas sobre posibles relaciones entre las imágenes y la actividad matemática infantil.*

Palabras clave: *Conteo, cuentos, educación infantil, imágenes, literatura infantil, secuencia de palabras número.*

Learning counting and recitation of the number words sequence: The articulation of important and indispensable mathematics

Abstract: *Counting foundations are learned at an early age. With three years, recitation of the number words sequence should reach up to “ten” and, ideally, up to “fifteen”. Recitation is indispensable for counting, and has regularities that are undervalued, with emphasis on memorization only. At the same time, children learn important mathematical ideas related to counting, such as one-to-one correspondence, the cardinality principle, or functionality in counting. We describe the elaboration of children’s books to*

articulate important and indispensable mathematics for the learning of counting with 3 years. We explain how text and illustrations respond to mathematics education ideas that emerge of research on early numerical thinking. We describe the uses of children's books in the classroom, and our expectations about potential relationships between illustrations and children's mathematical activity.

Keywords: *Counting, children's books, early years education, images, children's literature, number words sequence.*

LA NECESIDAD DE ARTICULAR LAS MATEMÁTICAS IMPORTANTES CON LAS IMPRESCINDIBLES

El pensador español José Ortega y Gasset decía que era crucial no confundir lo importante con lo que solo es absolutamente imprescindible. Por ejemplo, comer es imprescindible para vivir, pero no podemos decir que sea lo más importante en la vida. Cualquier docente podría elaborar su propia lista de los aspectos que considera importantes, y otra con los imprescindibles, en la educación.

En este sentido, abarcar una gran cantidad de contenidos matemáticos en el aula puede provocar un aprendizaje superficial por parte de los estudiantes, corriendo el riesgo de no construir los cimientos para futuros aprendizajes. El *National Council of Teachers of Mathematics* (en adelante, NCTM) indica que un currículo debe estar centrado en *ideas matemáticas importantes*, bien articuladas a lo largo de la escolaridad, y que preparen a los niños para la resolución de problemas en el aula o en la vida cotidiana (NCTM, 2003). De acuerdo con esto, los contenidos matemáticos que mayor atención merecen son los que capacitan a los estudiantes para desarrollar otras ideas importantes y facilitan la construcción de conocimientos cada vez más complejos, y con mayor profundidad, a medida que avanza la escolaridad. Más concretamente, las ideas matemáticas:

...se consideran importantes por diferentes razones, tales como su utilidad en el desarrollo de otras ideas matemáticas, en la vinculación de diferentes áreas de las matemáticas, o en la profundización de la apreciación de los estudiantes de la matemática como disciplina y como creación humana (NCTM, 2003, p. 16).

En nuestro trabajo, también recogemos la apreciación de Clements y Sarama (2009) sobre los objetivos del aprendizaje de las matemáticas como *ideas matemáticas importantes*, refiriéndose con este término a los conceptos y destrezas matemáticas centrales y coherentes, consistentes con el pensamiento de los niños y que son generativas de futuros aprendizajes (Clements y Sarama, 2009). De este modo, ponemos también el énfasis en que la actividad matemática se adecúe al desarrollo infantil. Por otra parte, consideramos *matemáticas imprescindibles* a aquellos conocimientos matemáticos que pudiendo no tener aplicaciones directas a la vida cotidiana, constituyen prerrequisitos indispensables para otros conocimientos matemáticos. Suele tratarse de procedimientos que tienden a mecanizarse para centrarse en una actividad matemática más valiosa. Son más ricos en conexiones intramatemáticas que en relaciones de la matemática con otras disciplinas.

En el territorio de las matemáticas infantiles, quizá el contenido más *importante* sea el conteo (Clements, 2004). Dentro de los conocimientos requeridos para el aprendizaje del conteo está el recitado de la secuencia de las palabras número. Este recitado tiene por sí mismo aplicaciones a la vida cotidiana infantil, lo que hace que tenga sentido para los pequeños. Por ejemplo, se usa dentro de las rimas de conteo para echar a suertes quién comienza una actividad. También dentro de algunos juegos, como “el escondite”, como recurso para ocupar el tiempo necesario para que los participantes se escondan. En estos casos, el recitado tiene significados matemáticos relativos a la aleatoriedad o a la duración temporal. Sin embargo, este recitado podría ser sustituido por otros que no incluyan palabras número y cumplan las mismas funciones (Rodríguez Pastor, 2006), de modo que estas aplicaciones podrían considerarse de “bajo nivel matemático”. Así, el mayor valor del recitado reside en sus conexiones intramatemáticas con otros prerrequisitos del conteo como la correspondencia uno a uno (al usar las palabras número para etiquetar objetos) o el principio de cardinalidad (la última palabra número recitada indica el cardinal de los objetos contados).

Siendo el recitado de la secuencia de palabras número *imprescindible*, su aprendizaje no está muy prestigiado en ámbitos académicos. Suele considerarse un aprendizaje “de segunda”, fundamentalmente mecánico y memorístico, y que quizá no sea merecedor de una propuesta de enseñanza. En nuestra opinión, no nos parece adecuada la expresión tan habitual referida al recitado de la secuencia de palabras número como “la cantinela de los números”, debido a sus connotaciones negativas. Según el diccionario de la Real Academia Española (DRAE), la palabra “cantinela” es un término coloquial que significa “Repetición molesta e importuna de algo”. Como prototipo de frase que transmite el significado de la palabra, el DRAE propone: “Siempre vienen con esa cantinela”. Parece como si para privilegiar los contenidos matemáticos más “dignos”, los que implican mayor reflexión, razonamiento, simbolización, etc., hubiese que denostar otros contenidos que, por otra parte, son absolutamente imprescindibles. Esta doble condición de prerrequisito, que idealmente llega a mecanizarse para liberar recursos para tareas de un nivel superior, pero es poco valorado matemáticamente *per se*, se aprecia en el extraordinario texto de Borghi (2005), que utilizamos como referencia para organizar talleres en el aula.

La habilidad puramente lingüística de recitar una secuencia de palabras-número que coincida con la convencional (uno, dos, tres...) es el presupuesto sobre el que se basa la capacidad de contar objetos. La memorización de la secuencia convierte el recitado poco a poco en algo automático y permite desviar la atención hacia el procedimiento, más complejo, de contar objetos (Borghi, 2005, pp. 186-187).

Estando de acuerdo en que hay situaciones de aprendizaje matemáticas mucho más ricas (digamos *importantes*) relacionadas con el conteo (Hernández, 2012; Rada, 2013; Sierra y Rodríguez, 2012), nos preguntamos: ¿Se trata verdaderamente de una “habilidad puramente lingüística”, de una secuencia a memorizar y automatizar sin más? Nosotros pensamos que no. Por eso en este trabajo queremos explicar, en primer lugar, los elementos matemáticos presentes en la secuencia de las palabras número. Después, presentaremos la propuesta de enseñanza planificada en el Proyecto “¡A contar! Matemáticas para

Algunas regularidades de este sistema de numeración oral son especialmente importantes en la educación infantil (Figura 1).

ORIENTACIONES CURRICULARES Y DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONTEO Y EL RECITADO DE LA SECUENCIA DE LAS PALABRAS NÚMERO

Algunos documentos actuales sobre el currículo matemático de educación infantil presentan referencias por edades para el aprendizaje de la secuencia de las palabras número. Clements y Sarama (2004) recomiendan que, entre los 2 y los 4 años, se aprenda la secuencia hasta el “diez”. A los 4-5 años, hasta el “treinta” (o más) haciendo un especial énfasis en los patrones en el conteo oral; es decir, sabiendo que “veintiuno, veintidós...” acaba igual que “uno, dos...” (Figura 1). Con 5-6 años, la secuencia puede llegar a “cien”, incluyendo el conteo de diez en diez, con especial atención a los patrones. Por ejemplo, “sesenta, setenta, ochenta...” se parecen a “seis, siete, ocho...”. Los *Focos Curriculares para Prekindergarten* (Fuson, Clements y Beckmann, 2010) proponen para los niños más pequeños de 2-3 años iniciarse con el recitado hasta el “seis”; cuando avanzan en 2-3 años, llegar hasta el “diez”, familiarizarse con la segunda década (del once al veinte) y comenzar a percibir la regla de formación de las palabras de “veinte” a “treinta”. Se espera que, con práctica adecuada, en el curso de 4-5 años niñas y niños alcancen hasta “treintainueve” en el recitado y que el objetivo sea llegar al recitado hasta “cien” al final de la educación infantil (pp. 13-16).

El *National Research Council* organiza los contenidos importantes referentes al número en tres núcleos: números, relaciones y operaciones (NRC, 2009). La secuencia numérica es uno de los cuatro aspectos del núcleo del número para las primeras edades, junto con la cardinalidad, la correspondencia uno a uno y la escritura de los símbolos numéricos (NRC, 2009). Estos cuatro aspectos, que comienzan a adquirirse aisladamente, van después relacionándose y permitiendo el desarrollo de los tres núcleos del número, abarcando las relaciones y operaciones.

La secuencia de las palabras numéricas tiene un orden establecido y es infinitamente larga. Cada palabra-número es única y tiene un único sucesor. Se utiliza en el conteo de objetos para indicar la cantidad de objetos que hay en una colección. Para ello, se debe establecer una correspondencia uno a uno entre las palabras número enunciadas y los objetos señalados durante el conteo. El NRC (2009) distingue cuatro niveles de pensamiento para el camino de aprendizaje de los núcleos del número en las primeras edades. A continuación, describimos estos niveles haciendo referencia sobre todo a lo relacionado al aprendizaje de la secuencia numérica.

En el primer nivel, de 2 a 3 años, los niños comienzan a desarrollar los cuatro aspectos importantes del núcleo del número por separado. Los niños pueden aprender la secuencia numérica escuchando o recitando las palabras número sin hacer ninguna actividad o coordinándola con algún tipo de actividad (NRC, 2009). Inicialmente son capaces de enunciar la secuencia numérica hasta el 6 sin aplicarla a una colección de objetos. Realizan adecuadamente la correspondencia uno a uno al aplicar la secuencia numérica a una colección de hasta 3 objetos. Más tarde, recitan la secuencia numérica

hasta 10 y cuentan hasta 6 elementos, repitiendo la última palabra numérica como cardinal del conjunto. Comienzan a recitar términos irregulares de once a quince, y las primeras décadas irregulares (en inglés, *twenty*, hasta *fifty*, en español, *diez*, *veinte*) y algunas combinaciones de decenas y unidades hasta 29 como veintiuno, veintidós (NRC, 2009). En este nivel, respecto al núcleo relacional y operacional, las estrategias se basan en la correspondencia uno a uno entre colecciones de objetos o en la subitización.

En un segundo nivel, sobre los 4 años, los niños extienden los conocimientos anteriores a números más grandes. Los niños comienzan a dominar el recitado de términos irregulares hasta quince, las décadas hasta cincuenta y combinaciones de decenas y unidades hasta 39. Cuentan colecciones de hasta 15 objetos, y desarrollan la capacidad de formar una colección con n objetos, aplicando la secuencia, lo que supone recordar una palabra número durante el conteo. Esto permite comparar colecciones hasta 5 elementos mediante el conteo, y problemas verbales mediante modelización con objetos o dedos, formando pequeñas colecciones de objetos, realizando las acciones pertinentes y contando las colecciones resultantes, con la cantidad mayor del problema menor o igual que 8 (NRC, 2009).

En un tercer nivel, sobre los 5 años, los niños conocen las décadas hasta 100, cuentan oralmente de 10 en 10 hasta 100, lo que refuerza el concepto de agrupamiento de 10. También recitan la secuencia hasta 100. Dominan la correspondencia uno a uno entre palabras número y objetos hasta 25. En el núcleo de relaciones, comparan el cardinal de dos colecciones de hasta 10 objetos a través del conteo y resolver problemas por modelado directo con totales de hasta 10 objetos (NRC, 2009).

En el cuarto nivel, ya en la educación primaria, los alumnos deben haber integrado los cuatro aspectos del núcleo del número. Son capaces, tanto de contar de 10 en 10 hasta 100, como de contar decenas (una decena, dos decenas, ...). También aplican la secuencia de palabras número a colecciones de objetos distribuidas en grupos de 10, contando de 10 en 10 cada grupo, y de 1 en 1 el resto de objetos. En este nivel, los niños resuelven problemas verbales con estrategias de conteo, en las que comienzan a contar a partir de una palabra número diferente de “uno” (NRC, 2009).

La teoría de Karen Fuson sobre la adquisición y elaboración de la secuencia numérica

Fuson (1992) describe el aprendizaje de la secuencia de palabras número distinguiendo fases de adquisición y niveles de elaboración. Con “adquisición” de la secuencia se refiere al recitado de la lista de palabras, teniendo en cuenta las unidades de distinto orden (uno, dos, tres, ... diez, veinte, ...), las palabras irregulares, excepciones que no siguen la regla de formación general (“once”, “doce”... no siguen la regla “dieciuno”, “diecidós”), o no guardan similaridad fonética con las palabras del mismo número de unidades de orden inferior (“veinte” no suena igual que “dos”) y las reglas para combinarlas. La construcción de la secuencia de palabras número no se realiza de una vez. En las secuencias infantiles se pueden distinguir: una parte inicial convencional y estable, un segundo tramo no convencional, pero que sigue siendo estable y, finalmente, una parte no convencional ni estable (Figura 2).

Paralelamente, Fuson (1992) describe varios niveles en la elaboración de la secuencia numérica, basándose en las relaciones de orden y equivalencia, y operaciones que hacen que la secuencia de palabras se construya de forma más sofisticada y compleja. En un primer *nivel hiler*a, los niños enuncian la secuencia numérica como una estructura entera unidireccional sin distinción de elementos y sin establecer ninguna relación entre ellos. En el segundo nivel, llamado *cadena irrompible*, los niños distinguen las palabras número que la forman pudiendo establecer relaciones como anterior o posterior, pero tienen que empezar siempre desde el uno. El tercer nivel, *cadena rompible*, los niños establecen la relación “entre” dos numerales y son capaces de contar desde un número hasta otro en ambas direcciones. El cuarto nivel, *cadena numerable*, los niños utilizan los numerales como ítems que se pueden contar y son capaces de ver el número de numerales que hay entre dos números. Además, pueden llevar el rastro de las palabras número que van enunciando, controlando la cantidad de palabras que enuncian. Finalmente, el nivel *cadena bidireccional*, implica total dominio de la secuencia de numerales. Este permite evolucionar en las estrategias de resolución de problemas aritméticos, ya que cuando los niños están en el nivel de cadena numerable, su nivel de elaboración de la secuencia les permite emplear estrategias como contar a partir de un sumando sin objetos (Fuson, 1992).

La adquisición y la elaboración de la secuencia son necesarios para aprendizajes posteriores (Fuson, 1992). La adquisición permite alcanzar un recitado estable y convencional. Los niveles de elaboración explican cómo la secuencia recitada de palabras número va convirtiéndose poco a poco en un modelo, en una herramienta para resolver problemas aritméticos, que permite el paso de estrategias de modelización a las de conteo. Cuando los niños alcanzan el nivel de cadena numerable de la secuencia numérica pueden evolucionar del uso de estrategias de modelización directa a estrategias más eficientes como son contar a partir de un número o “contar hasta”. Las fases de adquisición y elaboración de Fuson son el perfecto ejemplo de articulación de matemáticas *importantes* (el uso de estrategias avanzadas como el conteo a partir de un número “*counting on*”) y matemáticas *imprescindibles* (el recitado de la secuencia). La adquisición de la secuencia es un prerrequisito para la elaboración.

Observaciones del aula de 3 años

La investigación y los documentos curriculares nos proporcionan una información fundamental para el trabajo en el aula. Sin embargo, en estas edades abundan las variaciones en el desarrollo, las influencias socioculturales, las diferencias en los estímulos y las oportunidades de aprendizaje recibidas (NRC, 2014). Pero más allá de las orientaciones que ofrecen la teoría y los documentos curriculares, resultan indispensables los ajustes en las propuestas. La Tabla 1 nos trae directamente del aula de 3 años las recitaciones recopiladas por la maestra Clara Pastor a mediados de enero.

Una primera inspección confirma la enorme variabilidad en las recitaciones de niñas y niños de tres años, cuyo rango abarca desde un inicial “uno, dos, tres”, a veces con repeticiones para prolongar la secuencia, como en el caso de Clara, hasta un recitado avanzado hasta “diez” o hasta “quince”, en los casos de Natalia o Diego. Los ejemplos de

Tabla 1. Recitaciones de niñas y niños de 3 años un 13 de enero

| Nombre | Primera recitación | Segunda recitación | Tercera recitación |
|-----------|--|---|--|
| Zacarias | Uno, dos, cuatro, cinco, once. | Uno, dos, cuatro, cinco, once, doce. | Uno, dos, cuatro, cinco, once. |
| Natalia | --- | --- | Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince. |
| Diego | Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. | Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. | Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. |
| Daniel S. | Uno, dos, tres, cuatro, cinco, siete. | Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. | Uno, dos, tres, cuatro. |
| Nicolás | Dos, tres, quince, cinco. | Quince, catorce, tres, dos. | Cinco, cinco, doce, trece. |
| Clara | Uno, cuatro, nueve, cuatro, cuatro, nueve, diez, ocho, nueve, nueve. | Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, cuatro, seis, tres, cuatro, seis. | Uno, dos, tres, uno, dos, tres, uno, dos, tres. |
| Eric | --- | Uno, dos, tres, cuatro, seis, ocho, nueve, diez, cinco, seis, ocho, seis, ocho, seis, seis. | Uno, cinco, uno. |
| Daniel H. | Uno, dos, tres, cuatro. | Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. | Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve. |

recitados nos permiten contrastar la teoría entendida como herramienta para reflexionar sobre la práctica. La Tabla 1 ejemplifica las teorías de Fuson (1988) sobre la adquisición y elaboración de la secuencia de las palabras número. La parte que el pequeño repite sistemáticamente, en varias recitaciones en el mismo día, y que coincide con la secuencia convencional, es la parte de la secuencia ya adquirida y en fase de elaboración. En el

| | | |
|---|---|--|
| ADQUIRIDA Y EN ELABORACIÓN Estable y convencional Uno, dos, Uno, dos, Uno, dos, Uno, dos, | NO ADQUIRIDA Estable y no convencional cuatro, cinco, cuatro, cinco, cuatro, cinco, tres, cuatro, | No estable y no convencional once. once, doce. siete. cinco, seis |
| SECUENCIA CONVENCIONAL | | |

Figura 2. Tres recitados de Zacarías (3 años) en un mismo día para ilustrar Fuson (1988).

caso de Zacarías, ha adquirido hasta el dos. El resto de la secuencia está en fase de adquisición, distinguiendo en ella entre una parte estable y otra no estable (Figura 2).

Sintetizando las propuestas curriculares con nuestra experiencia y reflexiones sobre el aula, nos planteamos como objetivo que los niños de 3 años aprendan hasta el “diez”. No

obstante, el trabajo en el proyecto “¡A contar!” se extiende hasta el “quince” con rimas de conteo y esperamos también que los niños se familiaricen, y eventualmente puedan aprender hasta el treinta, a través de actividades cotidianas complementarias como contar, en la asamblea, a los compañeros que han venido a clase.

RECURSOS PARA EL APRENDIZAJE DE LA SECUENCIA DE PALABRAS NÚMERO: REINVENTANDO EL GÉNERO DE LAS RIMAS DE CONTEO

Dentro del Proyecto “A contar. Matemáticas para pensar” (De Castro y Hernández, 2015), la literatura infantil juega un papel primordial como eje articulador de toda la propuesta matemática. Entre los recursos para el aprendizaje de la secuencia de palabras número, uno de gran valor literario es el constituido por las rimas de conteo para “echar a suertes”, a su vez un recurso para el acercamiento a la literatura en educación infantil, según los objetivos del currículo establecido para esta etapa educativa:

Escucha y comprensión de cuentos, relatos, leyendas, poesías, rimas o adivinanzas, tanto tradicionales como contemporáneas, como fuente de placer y de aprendizaje. Recitado de algunos textos de carácter poético, de tradición cultural o de autor, disfrutando de las sensaciones que el ritmo, la rima y la belleza de las palabras producen. (MEC, 2008, p. 1029)

Algunos ejemplos de nuestra tradición literaria aparecen recogidos en el libro de “Fórmulas que preceden a los juegos infantiles” (Rodríguez Pastor, 2006), con las que además acercamos a los pequeños a la idea de azar (son fórmulas de echar a suertes) y presentamos la recitación en una situación práctica del aula que para niñas y niños tiene sentido en sí misma: Sortear quién de ellos realiza o inicia un juego o una actividad (Figura 3).

En nuestra propuesta para 3 años, Vanesa Pérez Sauquillo, autora de los cuentos, ha contribuido a la actualización de las rimas de conteo, y hemos completado la rima convirtiéndola en álbum ilustrado (Figura 4) con el fin de potenciar aún más las posibilidades matemáticas del recurso.

| | | |
|--|---|--|
| En un café se rifa un gato; a quien le toque el número cuatro; uno, dos, tres y cuatro. | Una mosca puñetera se cagó en la carretera, pín, pan, pun, fuera; y vinieron los bomberos a tirarse cuatro pedos: uno, dos, tres y cuatro. | En la casa de Espinete solo cuentan hasta siete: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis y siete. |
| En la casa de Pinocho solo cuentan hasta ocho: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho. | En la casa de Blancanieves solo cuentan hasta nueve: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve. | En un café se rifa un pez; a quien le toque el número diez; uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez. |

Figura 3. Rimas de conteo para iniciar un juego (Rodríguez Pastor, 2006).



Figura 4. Ilustraciones de Carmen Saldaña para el álbum “El escondite de los animales”

Usos didácticos de los álbumes de rimas de conteo

Utilizamos durante el curso dos rimas: “El escondite de los animales”, al principio del curso, con palabras número hasta “diez” (Figura 4) y “En mi casa hay quince gatos”, que llega hasta “quince”. Como hemos visto, el objetivo que nos planteamos con niñas y niños de 3 años es el recitado de la parte de la secuencia de los numerales que debe aprenderse de memoria; Es la parte anterior a la aplicación de la primera regla de formación de numerales (diez y seis, dieciséis), que será un objetivo el curso siguiente (en 4-5 años). En principio, esperamos que toda la clase aprenda como mínimo a recitar hasta el “diez” durante el curso, pero el ámbito de trabajo (conjunto de las palabras número que utilizaremos en el aula) es mayor y conviene que vaya hasta el “quince”. Así, muchos pequeños de 3 años aprenderán a recitar hasta “quince”, aunque nuestro objetivo sea que todos aprendan hasta el “diez”.

Las ilustraciones de los cuentos están diseñadas con el fin de potenciar al máximo la actividad matemática (De Castro y Ramírez, 2016). Por ejemplo, algunos problemas de cuantificación y de enumeración para 3 años parten de situaciones cotidianas en las que se produce una correspondencia uno a uno. En la imagen de la izquierda de la Figura 5, se sugieren varias relaciones de correspondencia uno a uno entre colecciones de objetos: gatos y zapatos (cada gato duerme en un zapato), gatos y disfraces, gatos y gorros. La ilustración tiene la función didáctica de evocar la correspondencia y facilitar a los pequeños que imaginen la situación como base para que puedan desarrollar estrategias personales para la resolución de problemas de cuantificación y enumeración.

Por otra parte, los álbumes ilustrados con rimas de conteo están diseñados, desde un punto de vista didáctico matemático, buscando optimizar la flexibilidad en su uso. En



Figura 5. Ilustraciones de Anuska Allepez para el álbum “En mi casa hay quince gatos”.

línea con la propuesta de Paniagua y Palacios (2005, p. 222), con niños de 3 años, los cuentos podemos utilizarlos de tres formas diferentes: como actividad dirigida, como actividad libre, o compartiendo el cuento y acompañando en la lectura a los pequeños. La primera es propia del gran grupo, cuando en la asamblea el maestro o la maestra muestran el cuento a todo el grupo a medida que lo van leyendo y, posiblemente, dramatizando. En este formato lo más importante, desde un punto de vista matemático, es que los niños escuchen la secuencia de las palabras número en repetidas ocasiones para percibir que estas se dicen siempre en el mismo orden (principio del orden estable, de Gelman y Gallistel) y para descubrir los patrones que sigue (Figura 1). En momentos de actividad libre, la contemplación de las imágenes por parte de los pequeños puede conducirlos a establecer conexiones, como la relación gato-zapato, que contextualizará su actividad matemática posterior. Por último, en momentos en que los cuentos pueden ser compartidos con la maestra o el maestro, se puede hacer un trabajo de conteo. Para esto aprovecharemos que la disposición espacial de los gatos, en tres filas de cinco, facilita seguir un orden al contar. La separación de los gatos, evitando superposiciones y su tamaño, ayuda en el señalamiento y la correspondencia uno a uno. A su vez, en cada página aparece un número de gatos que, al ir pronunciando el numeral que les corresponde, permite a los niños ir desarrollando el significado cardinal del número.

LOS PROBLEMAS DE CUANTIFICACIÓN Y LA FUNCIONALIDAD EN EL CONTEO

Si en el apartado anterior describíamos nuestra propuesta para la enseñanza de la secuencia de palabras numéricas, en este abordamos la enseñanza indirecta de la

funcionalidad del conteo. Es decir, cómo plantear tareas de cuantificación para que niñas y niños lleguen a emplear el conteo espontáneamente (sin enseñanza directa) como estrategia óptima para resolver un problema; es decir, para que su aprendizaje del conteo sea funcional y se aplique efectivamente a la resolución de problemas cotidianos.

Este tipo de tareas de cuantificación están descritos en Kamii (1995), colaboradora de Piaget, que recomendaba proponer problemas de cuantificación más que enseñar a contar, enfoque conocido como “enseñanza indirecta del número”. También están recogidas en la tradición de la teoría de situaciones de Brousseau, que reconoce el origen de este tipo de situaciones en las tareas que Pierre Gréco (de nuevo, colaborador de Piaget) proponía a los niños para estudiar el desarrollo de su pensamiento matemático (Brousseau, 2007, p. 14). Dentro de esta línea, recomendamos a los lectores revisar tanto los trabajos de fundamentación (Ruiz-Higueras, 2005; Sierra y Rodríguez, 2012) como los que describen cómo implementar este tipo de situaciones en aulas de 3 a 5 años (Hernández, 2012; Rada, 2013; Aguilar, Ciudad, Láinez y Tobaruela, 2010).

Las tareas de cuantificación citadas consisten en la construcción de una colección equipotente a otra dada. Los niños de 2, 3 y 4 años pueden resolver esta situación utilizando la subitización perceptual si la cantidad de la colección dada es inferior a 4 elementos (Clements y Sarama, 2009). Otra estrategia que pueden utilizar es la correspondencia uno a uno, emparejando un elemento de la colección de elementos dada con un elemento de la nueva colección, siempre que la colección dada tenga como máximo 4 elementos (Clements, 2004). Y finalmente, como estrategia óptima, los niños de 4-5 años utilizan el conteo de los elementos de la primera colección, recordando la última palabra número enunciada en el conteo, y forman una colección de n elementos, con colecciones hasta 5 elementos (Clements, 2004). Para que los niños evolucionen de las estrategias iniciales, como la subitización perceptual y la correspondencia uno a uno, a la estrategia óptima que es el conteo, se utilizan aspectos de la tarea que provocan cambios en los procedimientos de los niños. Estos aspectos son las *variables didácticas*, que se modifican para forzar que las primeras estrategias no sirvan para resolver adecuadamente la tarea (Aguilar y otros, 2010; Rada, 2012; Ruiz-Higueras, 2005; Sierra y Rodríguez, 2012). Por ejemplo, para evitar el uso de la subitización, se aumenta la cantidad de la colección inicial de tal manera que los niños no puedan percibir de un golpe de vista el cardinal del conjunto. Para evitar que utilicen la correspondencia uno a uno, los elementos de la colección que deben formar se sitúan alejados de la colección dada, para que no puedan realizar el emparejamiento, incluso se les prohíbe hacer varios viajes para ir a recoger los elementos que faltan (o a devolver los que sobran). Estas nuevas condiciones provocan que los niños busquen nuevas estrategias más eficientes, llegando al utilizar en los casos más avanzados el procedimiento del conteo y dando sentido a su uso.

Problemas de cuantificación en el Proyecto “A Contar. Matemáticas para pensar”

En el Proyecto “A Contar” se plantean actividades de cuantificación, en las que los niños tienen que formar una colección con el mismo número de elementos que una dada, y tareas de enumeración, que consisten en pasar por todos los elementos de una colección, estableciendo un orden entre los elementos, sin repetir ninguno. En la Tabla 2 mostramos los contenidos relacionados con estas tareas y la organización por trimestres en 3 años.

Tabla 2. Organización de contenidos matemáticos relacionados con la enumeración y la cuantificación

| Contenidos matemáticos | 1 ^{er} Trimestre | 2 ^o Trimestre | 3 ^o Trimestre |
|--|---------------------------|--|--------------------------|
| <i>Enumeración</i> , con objetos móviles, sin marcado, comenzando por colecciones en línea, siguiendo por colecciones en dos líneas y finalizando con objetos desordenados. | Hasta 3 | Hasta 4 desordenados y hasta 6 en fila o configuración | Hasta 8 |
| <i>Cuantificación</i> mediante subitización, estimación (corrigiendo), correspondencia. Traer los que hacen falta (como al poner la mesa) para que haya uno para cada uno, o poner los mismos. | Hasta 3 | Hasta 4 desordenados y hasta 6 en fila o configuración | Hasta 8 |
| Contar, con correspondencia uno a uno y cardinalidad (diciendo cuántos hay) y poner n objetos. | Hasta 3 | Hasta 4 | Hasta 5 |

En este proyecto las ilustraciones de los cuentos se utilizan para potenciar la actividad matemática, para reflejar relaciones matemáticas que ayuden a los niños a imaginar la situación para poder construir esas ideas matemáticas. Hay situaciones evidentes como las representaciones de cantidades. Estas aparecen en las ilustraciones en orden creciente y dispuestas de tal forma que permitan ser contadas, ya sea en fila o con alguna configuración. Se intenta que las cantidades sean homogéneas, todas con las mismas cualidades. En la Figura 6, la imagen se acompaña por el texto “Al estanque de los patos siempre va con tres zapatos”. Esta frase, junto con los tres zapatos de la abuela en la imagen, apunta hacia la comprensión de la idea de cardinalidad (el “tres” representa tres cosas).

Otras relaciones resultan menos evidentes en una primera mirada a la imagen. En cada caseta hay un pato. Con esta ilustración deseamos sugerir la relación de correspondencia uno a uno entre la colección de los patos y las casetas. Esta relación facilitará la comprensión infantil de situaciones de enumeración (Hernández, 2013) o de cuantificación (Rada, 2013). La de enumeración consiste en introducir un único pato en cada una de las casetas, de modo que al meter el pato en su caseta este no permanezca visible, de modo que el niño debe llevar un control mental de qué casetas tienen pato y cuáles no, lo que implica una enumeración de la colección de las casetas. La tarea de cuantificación supone ofrecer a las niñas y niños una pequeña colección de casetas y solicitarles que traigan del otro extremo de la clase la cantidad exacta de patos necesarios para meter un pato en cada caseta. Los materiales que utilizamos son sencillos –pueden elaborarse con los alumnos en el aula (Rada, 2013). Lo importante en los mismos es que si queremos que los pequeños enumeren una colección de 5 o 6 casetas, introduciendo un pato en cada una, debe haber patos de sobra (10 en el material de la Figura 7) para evitar que el número de patos disponible determine cuándo ha concluido la enumeración. También en la Figura 7, vemos el material que se utiliza en tareas de cuantificación, basado en la correspondencia uno a uno entre niños y gorros. Esta correspondencia aparece contextualizada en el cuento ambientado en otoño “¡Qué cosas tiene mi abuela!” a través de sus ilustraciones, en las que en las imágenes de “exteriores” cada personaje lleva un gorro,



Figura 6. Ilustraciones de Ayesha L. Rubio para el álbum “¡Qué cosas tiene mi abuela!”.

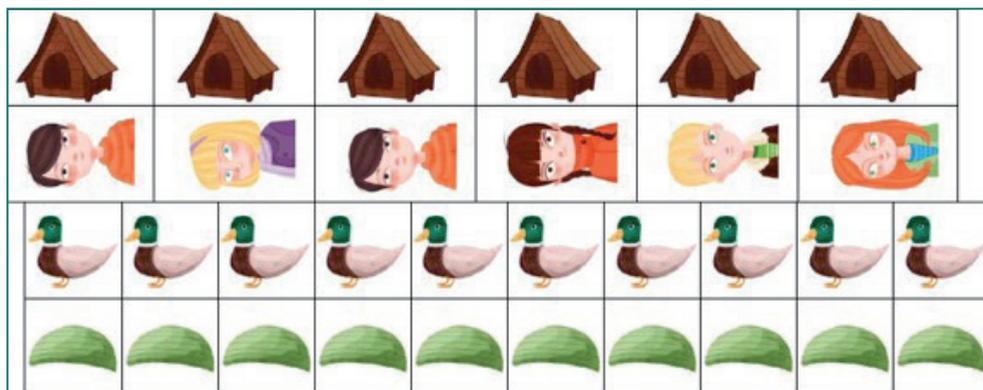


Figura 7. Material troquelado para problemas de cuantificación basados en el cuento.

aspecto con el que enfatizamos esta correspondencia (ver Figura 6), y que tampoco resulta evidente en una primera inspección.

Otras actividades relacionadas con la cuantificación se basan en el uso de configuraciones como las manos, los dados, el dominó, el *tetris* y representaciones gráficas (rayas). Un contenido importante en 3 años es aprender a poner números con los dedos con una mano (desde el 2 hasta el 4 o 5) y a reconocer cantidades de dedos. Este conocimiento es básico para la idea de cardinalidad y la resolución de problemas con los dedos (ver Tabla 3). La configuración de las cantidades que aparece en los dados, dominós y el *tetris* permite reconocer colecciones de elementos por su distribución, proceso que ayuda a la adquisición de la cardinalidad. En la Tabla 3 puede observarse los contenidos organizados por trimestres. Se plantean tareas con el objetivo de que

los niños cuantifiquen utilizando la subitización al reconocer la configuración de las manos, dados, dominó o figuras del tetrís.

Tabla 3. Organización de contenidos matemáticos relacionados con las representaciones numéricas

| Contenidos matemáticos | 1 ^{er} Trimestre | 2 ^o Trimestre | 3 ^o Trimestre |
|--|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|
| <i>Manos</i> . Poner los mismos con los dedos. Ante una cantidad de 3 objetos o dedos, ponemos 3 dedos. Asociar configuraciones de dedos distintas. | Hasta 2-3 | Hasta 3-4 | Hasta 4-5 |
| <i>Manos</i> . Reconocer una cantidad de dedos contándolos, reconocer una cantidad de dedos sin contar, poner números con los dedos contándolos, poner números con los dedos sin contar. | Hasta 2-3 Sin contar y contando | Hasta 3-4 Sin contar y contando | Hasta 4-5 Sin contar dedos |
| Dados. Reconocer una cantidad de puntos contándolos, reconocer una cantidad de puntos sin contar. Asociar dos configuraciones. | | Dado hasta 3 | Dado hasta 3 |
| Dominó. Asociar dos configuraciones. | | Dominó hasta 6 | Dominó hasta 6 |
| Utilizar representaciones tipo tetrís | | Hasta 3 | Hasta 3 |
| Representar gráficamente con rayas, redondeles, “dibujos”, puntos... | | Hasta 3-4 | Hasta 5 |

Para finalizar este apartado, aunque nos hemos centrado en dos contenidos concretos (secuencia de palabras número y los problemas de cuantificación), para dar una imagen cabal de cómo utilizamos las ilustraciones para potenciar la actividad matemática (De Castro y Ramírez, 2016) con pequeños de 3 años, mostramos una actividad de “patrones de crecimiento” (Figura 8) en las que los niños deben completar con *pattern blocks* los tres puzzles de la imagen, y eventualmente pueden llegar a adivinar el patrón de crecimiento que sigue la serie de los patos.

La ilustración con un “primer plano” de la receta de cocina (Figura 9) constituye una invitación al trabajo con recetas de cocina en el aula de infantil, para el que proponemos como ejemplo el artículo de Edó (2000). En la imagen se puede ver como se representan gráficamente cantidades necesarias para la receta y que habrá que formar con los ingredientes reales. Esta situación consiste en una cuantificación como la comentada anteriormente siendo las cantidades dadas por una representación gráfica.

Finalmente, los cuentos pueden sugerir el desarrollo de algún proyecto en el aula, metodología que también puede contribuir al aprendizaje matemático, como vemos en De Castro, González y Escorial, (2009), con el desarrollo de un proyecto entorno a la construcción de un castillo y un mercado medievales, lo que implica un gran número de contenidos matemáticos que incluyen la secuencia numérica y la cuantificación.



Figura 9. Invitación al trabajo con recetas.

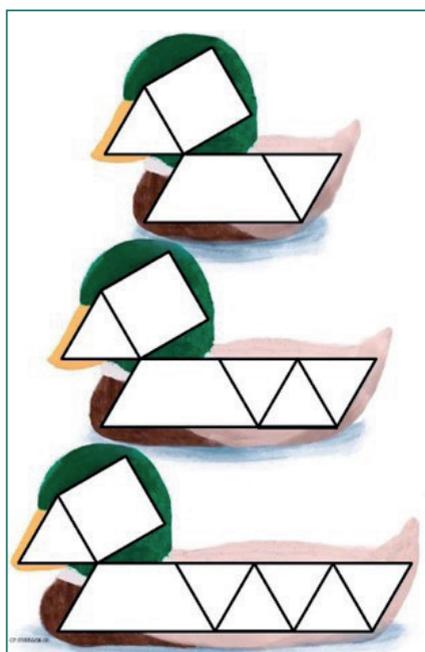


Figura 8. Actividades con patrones de crecimiento.

CONCLUSIONES

La articulación de los contenidos matemáticos importantes a lo largo de la etapa infantil ayuda a que los niños adquieran conocimientos generativos de nuevos aprendizajes. La secuencia de palabras número es un conocimiento matemático imprescindible, base de posteriores aprendizajes. Permite el desarrollo del conteo, conocimiento estratégico vertebrador de los aprendizajes numéricos en la primera infancia. El dominio del conteo incluye el recitado de la secuencia, la correspondencia uno a uno, y el principio de cardinalidad, junto con el conocimiento de cuándo aplicar el conteo en situaciones de cuantificación en las que muestra su funcionalidad. Es también necesario en las estrategias de modelización y conteo en la resolución de problemas aritméticos verbales. Dependiendo de los niveles de adquisición y elaboración de la secuencia de palabras número, las estrategias de resolución mejoran en eficiencia y el nivel de pensamiento de niñas y

niños evoluciona por los caminos de aprendizaje relativos a otros ámbitos matemáticos como el número y la aritmética. Aunque en este artículo enfatizamos el aprendizaje de la secuencia de palabras número y el conteo, la propuesta que hemos descrito es para niñas

y niños de 3 y 4 años. Todo lo que planteamos en este trabajo es compatible con reconocer que, en los primeros cursos de educación primaria, los alumnos deberán ir prescindiendo paulatinamente del conteo para desarrollar estrategias más eficientes de cálculo mental (Gray, 2003).

Para finalizar, queremos destacar dos ideas generales, que tienen aplicaciones particulares a la enseñanza de las matemáticas. La primera, que una buena educación infantil puede, y debe, preparar bien para la educación primaria, sin dejar de ser “infantil”, ni adelantar contenidos (Paniagua y Palacios, 2005). La segunda es que, en nuestra opinión, algunos aspectos “ideológicos” ligados al constructivismo, pero que verdaderamente no pertenecen a su esencia epistemológica, (al niño no se le debe enseñar, solo debe aprender de forma indirecta a través de problemas, no se puede proponer modelos para aprender mediante la imitación, los contenidos solo pueden aprenderse si hay comprensión y un conocimiento funcional desde el principio, hay contenidos menos “dignos” que no merecen propuestas de enseñanza) nos han llevado a infravalorar el aprendizaje de contenidos como la secuencia de las palabras número. Pensamos que la comprensión y la funcionalidad de los aprendizajes es el objetivo final irrenunciable de cualquier aprendizaje matemático. Además, los procesos de enseñanza deben ir orientados desde el principio a dicho fin y las oportunidades de aprendizaje que ofrecemos en las primeras edades deben tener sentido tanto para los pequeños, como para sus maestras y maestros. No obstante, la comprensión y la funcionalidad se van adquiriendo gradualmente.

Coincidimos en que los problemas de cuantificación que proponen diversos autores (Aguilar y otros, 2010; Kamii, 1995; Hernández, 2012; Sierra y Rodríguez, 2012) son indispensables para un aprendizaje funcional del conteo. Pero otras actividades, como que la maestra cuente a los alumnos en la asamblea para ver si han venido todos, o utilizar rimas de conteo infantiles para iniciar un juego, son también necesarias. En primer lugar, para que los pequeños tengan ocasión de percibir las regularidades de la secuencia de las palabras número y, en segundo lugar, de adquirir esta secuencia, cuando los maestros les ceden la responsabilidad de realizar por sí mismos estas actividades en el aula. En este sentido, una parte del trabajo didáctico que debemos hacer los formadores con las maestras y maestros de educación infantil es dignificar gestos profesionales habituales como estas sencillas actividades con la secuencia de palabras número, o pedir a un niño que nos muestre su edad con los dedos, que es importante para el aprendizaje de la cardinalidad. Articular los conocimientos matemáticos importantes con los imprescindibles requiere un trabajo análogo de articulación de tareas matemáticas más “importantes”, como las de cuantificación, con otras de apariencia más trivial, pero con gran trascendencia para los primeros aprendizajes matemáticos.

El aprendizaje del recitado de la secuencia de las palabras número no debe dejarse al azar, ni podemos adjudicar a los pequeños la responsabilidad de desarrollar espontáneamente contenidos matemáticos que son simplemente imprescindibles. La adquisición y la elaboración de la secuencia de palabras número requiere proporcionar a niñas y niños oportunidades de aprendizaje adecuadas. Dada la importancia del conteo, y sus múltiples conexiones intramatemáticas y aplicaciones a la vida cotidiana, estas propuestas de enseñanza deben ser un ingrediente obligatorio en cualquier programa para el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades.

REFERENCIAS

- Aguilar, B., Ciudad, A., Láinez, M.C. y Tobaruela, A. (2010). *Construir, jugar y compartir: Un enfoque constructivista de las matemáticas en Educación Infantil*. Jaén: Enfoques Educativos.
- Borghi, B.Q. (2005). *Los talleres en educación infantil. Espacios de crecimiento*. Barcelona: Graó.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Cid, E., Godino, J.D. y Batanero, M.C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de: <http://www.ugr.es/~jgodino/educmat-maestros/> el 27/04/2017.
- Clements, D.H. (2004). Major themes and recommendations. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D.H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Nueva York: Routledge.
- De Castro, C., González, A., y Escorial, B. (2009). El aprendizaje de las matemáticas a los tres años: Narración reflexiva sobre la construcción de un mercado medieval. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 70, 53-65.
- De Castro, C. y Hernández, E. (2015). *¡A contar! Matemáticas para pensar*. Madrid: Santillana.
- De Castro, C. y Ramírez, M. (2016). El uso de álbumes ilustrados para potenciar el aprendizaje matemático en las primeras edades. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 33(3), 61-80.
- Edo, M. (2000). Situaciones matemáticas: una merienda galáctica. *Revista Index/net*, 4, Santillana. Recuperado de: gent.uab.cat/mequeedo/sites/gent.uab.cat/mequeedo/files/merienda_galactica.pdf
- Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.
- Fuson, K.C., Clements, D.H. y Beckmann, S. (2010). *Focus in prekindergarten: Teaching with curriculum focal points*. Reston, VA & Washington, DC: NCTM & NAEYC.
- Gray, E. (2003). Compressing the counting process: developing a flexible interpretation of symbols. En I. Thompson (Ed.), *Teaching and learning early number (6ª reimp.)* (pp. 63-72). Maidenhead, PH: Open University Press.
- Hernández, E. (2012). El cohete: escritura de cardinales y ubicación en la cuadrícula con niños de 5 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(2), 23-41.
- Hernández, E. (2013). Situaciones para el aprendizaje de la enumeración en el aula de tres años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(2), 39-55.
- Kamii, C.K. (1995). *El número en la educación preescolar* (4ª ed.). Visor: Madrid.
- MEC (2008). ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. *BOE*, 5, 5 de enero de 2008, 1016-1036.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

- National Research Council. (2009). *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Committee on Early Childhood Mathematics, C.T. Cross, T.A. Woods, and H. Schweingruber (Eds.). Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: The National Academies Press.
- National Research Council (2014). Variaciones en el desarrollo, influencias socioculturales, y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 1-22.
- Paniagua, G. y Palacios, J. (2005). *Educación infantil. Respuesta educativa a la diversidad*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rada, M. (2013). Experimentación de una propuesta didáctica para la enseñanza funcional del número natural en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 57-81.
- Rodríguez Pastor, J. (2006). *Fórmulas que preceden a los juegos infantiles en Extremadura*. Badajoz: Departamento de Publicaciones de la Diputación de Badajoz.
- Ruiz-Higueras, L. (2005). Aprendizaje y matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil. En C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 1-38). Madrid: Pearson Educación.
- Sierra, T.A. y Rodríguez, E. (2012). Una propuesta para la enseñanza del número en la Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 80, 25-52.