# Los psicomorfismos, entre acciones directamente experimentables y acciones hechas en referencia a una formalización

Rubén Rodríguez Herrera*

## Resumen

Se presenta el desarrollo de un marco teórico para analizar los fenómenos de aprendizaje en general y en particular sobre el aprendizaje en matemática. Para ello, Ruben Rodriguez Herrera creó la noción de psicomorfismo; esta noción fue el centro de su trabajo de tésis de doctorado en Ciencias de la Educación en el año 1978 en la Universidad de Caen, Normandia, Francia.

A modo de ejemplo de psicomorfismo, se presenta una pequeña parte de dicha publicación, relacionada con las fracciones.

## Introducción

El niño realiza acciones que nosotros llamamos « directamente experimentables » con el objetivo de resolver problemas mórficos, (problemas que se resuelven con el mismo tipo de acción). Para poder comunicar estas acciones mórficas se hace necesario elaborar una formalisación que utiliza vocablos, frases, símbolos, esquemas, etc…

Recíprocamente, el hecho de poseer un universo cada vez más formalizado sobre esas acciones mórficas, permite

* IREM de Basse Normandie - Francia

realizar un morfismo recíproco entre el universo simbólico y las acciones directamente experimentables.

Un morfismo es, en matemática, una función f definida entre dos conjuntos que poseen cada uno una estructura definida por una relación u operación. Esta función f respeta las estructuras de cada conjunto. Por ejemplo, utilizando símbolos, si en el conjunto X hay definida una operación denotada # y en el conjunto Y tenemos la operación anotada §, entonces al operar dos elementos a, b de X, eso se ecribe a # b = c y si f(a) = a', f(b) = b', f(c) = c' se verifica que a' § b' = c'

Resumiendo, se dice también que: el resultado de operar las imágenes es la imagen del resultado de operar los antecedentes respectivos.

Con un esquema simbólico, (la operación en el conjunto X es escrita # y la del conjunto Y es escrita §)

| **a** | # | B | = | c |
|---|---|---|---|---|
| ↓f | ↓f | ↓f | ↓f | ↓f |
| a' | § | b' | = | c' |

Estas correspondencias mórficas se producen en todo fenómeno de aprendizaje. Por ejemplo, el niño pequeño simultáneamente ve un objeto que emite sonido y que emite calor, entonces cuando el niño se desplaza hacia ese objeto la imagen visual se agranda en el campo visual, el sonido se hace más intenso, el calor aumenta. Es así que gracias a que el organismo posee una función biológica de coordinación de estas informaciones, se establecen psicomorfismos que poco a poco van estructurando las informaciones visuales, junto a las auditivas, las kinestésicas, etc. Esto permite anticipaciones; por ejemplo, si el sonido varía y es cada vez más fuerte, entonces la imagen será seguramente más grande en el campo visual. Esto lo podemos simbolizar de la manera siguiente: un sonido α que corresponde a una imagen A y que es más debil que un sonido β que corresponde una imagen B, verifican que si α < β entonces se puede anticipar que A < B.

El niño puede así anticipar: si él oye un sonido más fuerte es que el objeto estará más próximo y ocupará un espacio mayor en su campo visual.

Este psicomorfismo, que se produce en todo aprendizaje, está presente en todos nuestros análisis didácticos. Es este principio el que nos guia en la construcción de actividades, problemas, situaciones, etc. Lo importante en los psicomorfismos que se producen dentro del aprendizaje en matématica es que, en la formalización de las acciones directamente experimentables, el alumno recrea la estructuración simbólica. Para illustrar este fenómeno, les presentaremos un ejemplo del aprendizaje de las fracciones.

Para la introducción de las fracciones pensamos en crear una situación que facilite un psicomorfismo entre las acciones directamente experimentables con bandas de papel cartón y las acciones acompañadas con la formalización simbólica.

## Un ejemplo de una didáctica de la noción de fracción elaborada a partir del fenómeno del aprendizaje llamado "psicomorfismo"

En la adquisición de los conocimientos, el alumno debe siempre apoyarse en las acciones “directamente experimentables” afin de construír la nueva estructura de conocimiento a aprender. Esta nueva estructura tomará todo su significado, por un lado cuando el alumno pueda anticipar un resultado dificil a obtener por los antiguos métodos, y por otro lado, cuando la utilice para resolver otros problemas isomórficos.

El trabajo matemático consiste en elaborar sistemas, más o menos simbolizados y formalizados, que permitan obtener resultados, que anticipan de modo más económico, la búsqueda del mismo resultado por intermedio de acciónes directas más difíciles y sujetas a una probabilidad más grande de cometer errores.

Un aspecto fundamental de la estructuración de las acciones directamente experimentables de “la realidad” es el hecho que el ser humano posee las "funciones de representación". Cuando el niño se enfrenta por primera vez a la resolución de un problema, estructura la información con el fin de encontrar una solución. Si tiene éxito, la proxima vez que afronte un problema percibido como isomórfico, los objetos del primer problema actuarán como significantes portadores de una analogía, que le guiará hacia operaciones necesarias y suficientes a la resolución del segundo problema.

Es así que, resolviendo problemas isomórficos, la formación de un sistema general que los represente, aparece como algo necesario y natural. Cuando el individuo integra en sus conocimientos el sistema representativo de los problemas isomórficos, él es capaz de trabajar dentro de este sistema y aún más, es capaz más adelante de ver el sistema como un nuevo objeto de estudio.

En la formación de los conocimientos hay un imperativo ineludible: el individuo tiene necesidad de establecer progresiones en los grados de significación de una noción. No se puede encontrar la verdadera significación de un sistema de representación de problemas isomórficos, si estos no han sido vividos antes y si la necesidad de construir ese sistema no ha sido percibida.

En la enseñanza de la matemática es importante tener en cuenta estos principios si se quiere que los alumnos se apropien verdaderamente de los problemas y construyan ellos mismos con ayuda del docente, sus conocimientos.

Para ello se debe vigilar de proponer actividades que partan de "acciones directamente experimentables", (se trata de acciones automatizadas que no requieren una nueva reflexión), referentes a problemas aptos a suscitar una nueva estructuración.

Más adelante, se propondrán otros problemas isomórficos que se presten menos a una modelización inmediata, pero que serán asimilados con mayor facilidad si los alumnos han asimilado correctamente la etapa precedente.

La introducción de la noción de fracción en Francia ocurre en el tercer ciclo de la escuela primaria, es decir el último, antes de pasar al secundario básico.

## La noción de fracción

### Un ejemplo de actividad basada en una correspondencia mórfica simple

Material: bandas de papel cartón recortadas a partir de hojas acartonadas, formato A4, de diferentes colores: blanco, rojo, azul, amarillo, verde,… y de ancho 2,5cm.

### Primer curso

**a) Primera fase**

Se entrega a los alumnos las distintas bandas de distintos colores y se les pide recortar y formar una docena de bandas de cada color, todas de 12cm de longitud.

Para ello, los alumnos aprovechan de sus conocimentos geométricos. Por ejemplo miden 12cm en cada borde, luego trazan un segmento y finalmente verifican con la escuadra que este segmento es perpendicular a los bordes de la banda. Es importante que los alumnos verifiquen que todas las bandas obtenidas son superponibles entre ellas.

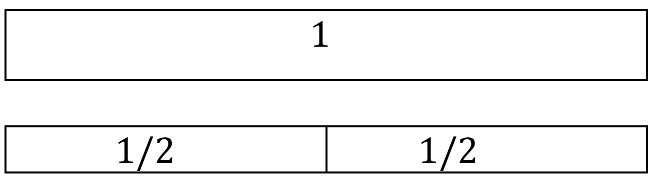
**b) Segunda fase**

Se les pide a los alumnos fabricar bandas de color azul tales que sean superponibles entre ellas y que dos bandas azules yuxtapuestas en su longitud sean de la misma longitud que una banda blanca. Es importante poner en evidencia en el grupo-clase, a partir del trabajo de los alumnos, dos estrategias posibles que en general aparecen en nuestras clases:

- Una consistente en recortar una banda azul superponible a una banda blanca y enseguida plegar la azul en dos partes de misma longitud y recortar de nuevo y obtener dos bandas azules superponibles entre ellas (que yuxtapuestas tenga la misma longitud que la de una blanca).
- Otra consistente en medir 6cm a partir de la izquierda (como en el procedimiento de la fabricación de la primera fase) y obtener bandas azules que respondan al objetivo solicitado.

Es importante pedir a los alumnos que expliquen sus construcciones con el objetivo que realicen un morfismo entre las acciones realizadas y las expresiones utilizadas para describirlas. Por ejemplo, si un alumno dice que ha recortado en dos partes, se le hace reflexionar sobre el hecho que recortó dos partes de misma longitud y superponibles. El docente hace entonces un esquema en el pizarrón que representa el resultado obtenido.

Los alumnos dicen que hay 1 banda blanca y 2 bandas azules:




Es en ese momento que se introduce un sistema simbólico que resume las acciones realizadas.

Como dos bandas azules yuxtapuestas tienen la misma longitud que una blanca, se escribe sobre las bandas azules 1/2 y sobre las blancas 1.

Se dirá también que una banda azul tiene la mitad de longitud que la de una banda blanca. Cuando un alumno diga "dos azules es lo mismo que una blanca" se le hará aclarar su idea para que explicite bien el sentido de su frase. El objetivo es que trabaje el isomorfismo entre la operación realizada directamente con la manipulación de las bandas y la operación respectiva verbalizada dentro de nuestro idioma.

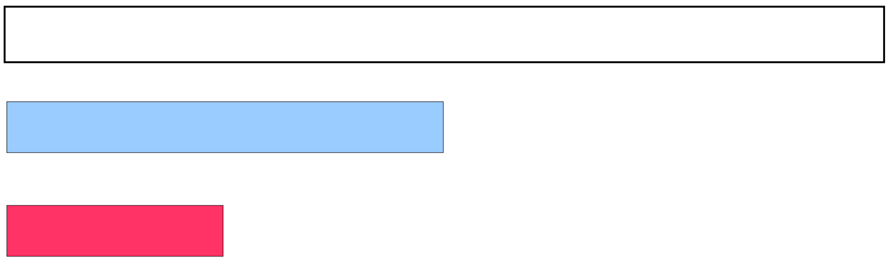
### c) Tercera fase

Se pide a una parte de los alumnos que fabriquen bandas de color rojo superponibles entre ellas y tales que cuatro de ellas yuxtapuestas sean de la misma longitud que una blanca. Al otro grupo de alumnos se les pide que fabriquen bandas de color rojo, superponibles entre ellas y tales que dos de ellas yuxtapuestas tengan la misma longitud que la de una azul.

La actividad hace retomar los procedimientos precedentes: los alumnos que trabajan con las azules y las rojas, un plegamiento o una división por 2 y los otros alumnos, dos plegamientos succesivos o dos divisiones succesivas de divisor 2, (12: 2 = 6 seguida de 6 : 2 = 3).
Se constata que los dos grupos de alumnos llegan a construír un conjunto de bandas rojas superponibles entre ellas. Se pide a los alumnos que escriban sobre las bandas rojas el símbolo que indica que cuatro bandas rojas juxtapuestas dan la misma longitud que el de una banda blanca. Es decir el símbolo 1/4.

Se dirá tambien que cada roja tiene una longitud de "un cuarto" de la longitud de la de una blanca. El hecho que los alumnos utilicen el símbolo 1/4 para mostrar la relación entre los longitudes de las bandas blancas y rojas nos muestra que el sistema simbólico comienza a ser un sistema de significantes, que muestra de manera isomórfica la estructura fraccionaria de las bandas. En este momento se aprovecha para ponerse de acuerdo que el 1 de 1/4 se escribe siempre arriba del simbolo /, (es decir, es el que nos dice cuántas bandas blancas hay), y el 4 de 1/4 se escribe abajo del simbolo /, (es el que nos dice cuántas bandas rojas hay).

Se aprovecha también para hacer verbalizar a los alumnos algunas propiedades, a fin de obtener afirmaciones verbales isomórficas a la estructura simbólica que comienza a ponerse en evidencia.



Por ejemplo:
"la roja es de longitud la mitad de la longitud de la azul";
"la roja es de longitud un cuarto de la longitud de la blanca";
"la azul es de longitud una mitad de la longitud de la blanca"
y también una afirmación que se produce al mismo nivel de abstración que el del sistema simbólico:
"la mitad de una mitad es igual que el cuarto"

## Segundo curso

**Comentario:** elegimos bandas de 12cm de longitud porque 12 es un número que tiene más divisores que 10, por ejemplo.

### a) Primera fase

Con bandas de color amarillo se les propone realizar bandas sobre las cuales se pueda escribir 1/3 con respecto de la blanca.

Estamos aquí en la actividad recíproca de aquella de la primera fase del primer curso. Es así que les pedimos a los alumnos que nos expliquen esta tarea a fin de asegurarnos que el sistema simbólico funciona como un sistema significante. Los alumnos explican que se trata de obtener bandas amarillas que tengan la misma longitud entre ellas y tales que tres "amarillas" yuxtapuestas tengan la misma longitud que una "blanca". Se analiza con los alumnos la dificultad de realizar esta tarea por medio de plegamientos y se concluye que lo más conveniente es realizar la division 12:3, ya que tenemos que dividir 12cm en tres partes iguales. Es así que los alumnos fabrican bandas de 4cm de longitud. Se escribe 1/3 sobre cada una. Hemos aquí una vez más, anticipado los resultados de las acciones directamente experimentables, (los plegamientos), con un cálculo dentro del sistema simbólico. Este sistema se vuelve cada vez más "concreto", es decir cada vez más con funcionamiento autónomo, como un objeto en sí mismo. A su vez, se amplia el significado de la nocion de fracción, ya que la hemos relacionado con la operación de división.

### b) Segunda fase

Nos dirigimos aquí hacia preguntas formuladas en el sistema simbólico y resueltas gracias al isomorfismo con el sistema de las acciones directamente experimentables.

Nos interesamos a la relación de orden entre 1/2 ; 1/4 ; 1/3.

Para responder, utilizamos el morfismo con las bandas "azules","rojas", "amarillas".

Los alumnos constatan que la banda 1/2 es la de longitud más grande, luego está la de 1/3 y por último la de 1/4.

Se hace verbalizar antes de pasar al sistema simbólico.

El objetivo es trabajar sobre explicaciones mórficas. Por ejemplo: si dos "azules" tienen la misma longitud que una "blanca" y tres "rojas" tienen la misma longitud que una "blanca", entonces una "azul" es más larga que una "roja".

Otro ejemplo es el siguiente: si se divide una "blanca" en tres partes iguales obtenemos una parte de longitud más pequeña que si se divide la "blanca" en dos partes iguales. Escribimos entonces:

$1/3 < 1/2$

$1/4 < 1/3$

$1/4 < 1/2$.

Continuamos trabajando sobre el morfismo entre el sistema simbólico y el de las acciones con las bandas, a fin de llegar a escribir igualdades donde interviene la operación de sumar dos fracciones:

$1/2 + 1/2 = 1$

$1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$

$1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 1$

también:

$1/4 + 1/4 = 1/2$.

Todas esas igualdades son validadas de manera muy "natural" con las bandas y el isomorfismo.

Se aprovecha en ese momento del aprendizaje, del enriquecimiento del sistema simbólico, (el cual aparece cada vez más autónomo), para estudiar por ejemplo la fracción 1/5, sin que sea necesario construir las bandas respectivas. Esta etapa es importante en la medida que los alumnos dan explicaciones sin necesidad de efectuar acciones directamente experimentables con las bandas.

Les preguntamos: ¿Es que 1/5 es más chica que 1/4, que 1/3, que 1/2?

También: ¿Cuántas bandas de 1/5 tendrán la misma longitud que una banda de 1?

Comentario: No les pedimos que fabriquen bandas de 1/5 para evitar la división 12:5 ya que los números decimales no enteros serán estudiados posteriormente. Se aprovecha para decirles que para estudiar los números decimales se utiliza el morfismo fundamental entre los decimales y las fracciones. Esto no lo desarrollamos aquí, ya que el espacio del cual disponemos no nos permite abordar todos estos aspectos.

Continuamos la actividad estudiando las mismas preguntas con 1/6; 1/7; 1/8 1/9; 1/10.

Ese trabajo sirve también como medio de evaluación del aprendizaje para constatar que los alumnos explican cada vez más utilizando el sistema simbólico.

Por ejemplo: les pedimos utilizar el símbolo < para escribir la relación entre 1/10 y 1/20.

También les proponemos ejercicios del tipo: Completar 1/10 < 1/( ), escribiendo un número en el denominador de manera de repectar el símbolo <. En este último ejemplo es importante poner en evidencia las distintas soluciones de los alumnos, para mostrar que se puede encontrar muchas soluciones posibles, (se las podrá ordenar de la más chica a la más grande).

## Tercer curso

Vamos a estudiar aquí 1/3 + 1/3.

Este es para nosotros un buen ejemplo de problema didáctico.

Sería muy fácil escribir directamente dentro del sistema simbólico que 1/3+1/3=2/3.
Pero si lo hacemos asi, estamos rompiendo el “contrato didáctico" con nuestros alumnos.

En efecto lo que llamamos "contrato didáctico", consiste aquí en implícitamente no escribir un símbolo que no haya tomado su significado en una “acción directamente experimentable" y experimentada por cada alumno. Aquí no ha habido todavía, ninguna acción que nos indique porqué 1/3+1/3 debe escribirse como 2/3.

Para resolver este problema de didáctica de la matemática, debemos partir del significado que poseen los alumnos del símbolo fraccionario. Se han estudiado hasta ahora las fracciones del tipo 1/m, donde m es un entero natural. El significado de **1/m** es que tenemos **1** banda blanca superponible a **m** bandas yuxtapuestas y a su vez superponibles entre ellas. Les presento aqui nuestra solucion didáctica.

a) Primera fase

   Les pedimos a los alumnos que presenten sobre el pupitre las bandas blancas 1. Les damos bandas violetas como hemos hecho con la fabricación de las otras bandas y les pedimos que fabriquen bandas sobre las cuales se pueda escribir 1/3+1/3.

   Los alumnos no tienen ninguna dificultad para obtener estas bandas violetas sobre las cuales escribimos en una de sus caras 1/3+1/3. Haciendo esto, estamos respetando nuestro contrato didáctico, ya que los alumnos relizaron la acción respectiva a esta suma.

   Les pedimos a continuación que den vuelta a las bandas violetas y que se sirvan de las blancas también para resolver la pregunta siguiente:

   ¿Cuantas bandas blancas y cuantas violetas se necesitan para obtener por justaposicion dos bandas superponibles?

Es aqui que los alumnos obtienen que 2 bandas blancas y 3 bandas violetas conducen a la solución de la pregunta. Es asi que se escribe de este otro lado de las bandas violetas el simbolo 2/3, aprovechando para recordar que por encima del símbolo / se escribe la cantidad de bandas blancas y por debajo de / la cantidad de bandas violetas. Aqui también hemos conservado el mismo "contrato didáctico", ya que 2/3 fue obtenido a partir de una manipulación con las bandas, análoga a las precedentes.

El momento crucial ha llegado: los alumnos dicen que 1/3+1/3 es la misma banda que 2/3, y entonces se justifica que podamos escribir que

1/3+1/3 = 2/3

También es muy importante este momento para reflexionar sobre el hecho que 1/3+1/3 es "dos veces 1/3" es decir que como 1/3+1/3 es 2x1/3, podemos afirmar que 2x1/3 = 2/3 En esta parte nos hemos apoyado en los conocimientos de la multiplicación en tanto que suma de términos iguales.

b) Segunda fase

Proponemos aquí, partiendo del sistema símbolico, que los alumnos fabriquen bandas de color marrón claro sobre las cuales podamos escribir 3/4.

Los alumnos utilizan implicitamente el morfismo sujacente y para construir 3/4 yuxtaponen 1/4+1/4+1/4. Una vez que han fabricado de esta manera 3/4 se les pide verificar que 3 bandas blancas son superponibles a 4 bandas marrón claro.

c) Tercera fase

Pasamos a un trabajo hecho exclusivamente dentro del sistema simbólico a fin de realizar las sumas:

1/5+1/5
1/5+1/5+1/5
1/3+1/3+1/3+1/3

y muchas más sumas de fracciones del mismo denominador.

Comentario: Aunque los alumnos trabajen dentro del sistema simbólico, ellos tienen, en cantidad suficiente, imágenes mentales con bandas o discos para validar las igualdades obtenidas. Por ejemplo 1/4+1/4+1/4+1/4=1 es facil de comprender, pero nos parece demasiado pronto escribir la fracción 1/1.

Comentario: Hemos reflexionado con los alumnos sobre las fracciones superiores a 1 dentro de la estructura de las bandas. Ya hemos dicho que con las bandas yuxtapuestas se obtiene una banda del mismo largo, pero con los discos no obtenemos un disco, cuando trabajamos con dos sectores que corresponden a dos fracciones de suma superior a 1. Es así que la yuxttaposición de bandas corresponde isomórficamente a la suma de fracciones pero con los sectores circulares no obtenemos un morfismo con las acciones directamente experimentables. El morfismo que utilizamos para introducir las fracciones de disco, es el que va del sistema simbólico de fracciones establecido con las bandas hacia un sistema de sectores de disco. La suma de sectores es entonces más difícil. Es por ello, que la hemos propuesto después de haber instalado la estructura fraccionaria con las bandas. Es así que, por ejemplo cuando nos referimos a 3/2 como un disco y una mitad de discos reunidos, nos servimos de la estructura de fracciones estudiada antes para darle sentido a la imagen de 3/2 de disco.

**A continuación proponemos algunas actividades que pueden realizarse dentro de la progresión de los aprendizajes de la noción de fracción**

I) Proponemos el problema siguiente:
¿Cuántas bandas 3/4 justapuestas y cuantas bandas 1/2 justapuestas se necesitan para obtener el mismo largo con las bandas 3/4 que con las bandas 1/2?

Los alumnos constatan que 3/4+3/4 es lo mismo que 1/2+1/2+1/2 y como ellos saben que 3/4+3/4=6/4 y que 1/2+1/2+1/2=3/2, escriben que:

6/4=3/2. También verbalizan diciendo que 2 veces 3/4 es igual que 3 veces ½. Luego buscamos otras igualdades construidas de esta manera, por ejemplo: 3 veces 2/3 es igual que 2 veces 1 y escriben que 6/3=2.

Para validar las igualdades encontradas y para reforzar el aprendizaje simbólico, se pueden proponer las siguientes actividades.

Por ejemplo:

3/4 + 3/4 es lo mismo que

(1/4+1/4+1/4) + (1/4+1/4+1/4), y como sabemos que 1/4+1/4=1/2,

podemos efectuar

(1/4+1/4) + (1/4+1/4) + (1/4+1/4);

es decir,

1/2 + 1/2 +1/2

dando como resultado 3/2

Comentario: Esta etapa no excluye que los alumnos que presentan un poco de dificultad con los paréntesis podrán servirse de las bandas para validar sus cálculos simbólicos.

II) Se tratan aquí algunos problemas más difíciles, pero siempre con la posibilidad de que los alumnos puedan servirse de las bandas para comprender los cálculos.

Por ejemplo: ¿Cuántas veces se debe considerar 2/3 y cuántas veces 3/4 para obtener una igualdad?
Con las bandas se encuentra que 9 veces 2/3 es lo mismo que 8 veces 3/4.

Dentro del sistema simbólico tenemos
2/3+2/3+2/3+2/3+2/3+2/3+2/3+2/3+2/3 =
3/4+3/4+3/4+3/4+3/4+3/4+3/4+3/4

Los alumnos saben sumar fracciones con el mismo denominador, es así que obtienen

18/3 = 24/4

A su vez, saben que 3/3 es igual a 1 y que 4/4 también es igual a 1. Esto les permite comprobar que 18/3=6 y que 24/4=6

Este pequeño extracto de nuestro trabajo es dado como ejemplo de porqué elegimos las acciones con las bandas para introducir las fracciones y no, como es habitual, con discos y sectores de disco.

La razón principal es que cuando se resuelven preguntas con bandas, siempre se obtienen bandas del mismo ancho y de la misma forma rectangular. Es asi que por ejemplo 5/4 corresponde a una banda rectangular. En cambio, con los discos, 5/4 no corresponde a una forma semejante a un sector de disco, sino a dos partes desconectadas: un disco entero y un cuarto. Esto hace que sea más difícil de establecer un psicomorfismo entre el universo formalizado simbólico de las fracciones y el universo de los sectores de disco, que el psicomorfismo con el universo de las bandas.

## Conclusión

A través de las actividades presentadas se incita a los alumnos a efectuar psicomorfismos entre acciones directamente experimentables en donde deben anticipar, fabricando en su mente formalizaciones, que van construyendo las propiedades. Es en esta dialéctica de psicomorfismos entre distintos universos de acción que se interiorizan las propiedades matemáticas.

Ninguna formalización matemática debe ser estudiada sin una construcción por parte del alumno de cada una de las reglas específicas de la estructura a aprender. Todos los elementos formalizados: símbolos, convenciones, trazados, esquemas, etc. deben ser construidos por los alumnos a partir de la resolución de problemas. Las modelizaciones propuestas por los alumnos poco a poco y de manera espiralaria se van acercando al modelo matemático a adquirir. El profesor juega un papel esencial en este proceso para motivar, moderar los intercambios entre alumnos, proponer pistas de trabajo, para avanzar en la progression del aprendizaje de las nociones y conceptos matemáticos.

## Bibliografía

Bolon J., (1995). Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école -collège, Thèse de didactique des mathématiques de l'Université Paris 5. France.

Brousseau, G., Brousseau, N., (1987). Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire. Université de Bordeaux 1, 535 p. France.

Carrega J.-C., (2001). Théorie des corps : la règle et le compas – Hermann, France.

Duval R., (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, Annales de didactique des sciences cognitives, 10, 5-53, France.

Houdement C., Kuzniak A., (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, Annales de didactiques des sciences cognitives, 11, 175-193, France.

Laborde C., Capponi B., (1994) Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, Recherche en Didactique des Mathématiques, 14, 1.2, 165-210, France.

Rodriguez Herrera R., Salles Le-Gac D., (2005). Du dessin perçu à la figure construite, Ellipses, 254 pages, France.

Rodriguez Herrera R., (1976). «La Enseñanza de la matemática: fracciones-numeros racionales», CIEP, Montevideo, Uruguay.

Rodriguez Herrera R., (1978). «La pédagogie des mathématiques est-elle moderne?», Thèse en Sciences de l'Education, Caen, France.

Rodriguez Herrera R., (1998), dans "Géométrie plane en sixième", CNDP, CRDP, Caen, France.

Rouche N., (1998). Pourquoi ont-ils inventé les fractions? Ed. Ellipses, 126 p. France.

Rouche N., (2006). Du quotidien aux mathématiques. Ed Ellipses, 350 p. France.

Vergnaud G. (1991). La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathématiques 10.2/3, 133-170. France.