DESLIZAMIENTO METADIDÁCTICO EN PROFESORES DE SECUNDARIA. EL CASO DEL LÍMITE DE FUNCIONES

Lacasta, E., Wilhelmi, M. R.

Universidad Pública de Navarra

Resumen

Una muestra de profesores de matemáticas de secundaria, compuesta por profesores españoles y franceses, ordena cuatro maneras de exponer el límite de una función en un punto, extraídas de cuatro manuales distintos. Los profesores proponen el orden a su juicio más adecuado según el interés didáctico o su facilidad de explicación o de comprensión de las presentaciones. Existe un orden predominante de manera significativa, según el cual los profesores prefieren en primer lugar una presentación ostensiva de un ejemplo particular, que no define la noción de límite, seguida de las presentaciones que, ahora sí conteniendo la definición, utilizan en orden decreciente recursos gráficos.

Abstract

A sample of High School Math teachers, made up of Spanish and French teachers, orders four ways to expose the limit of a function at a point, drawn from four different manuals. According to their view, the teachers propose an order depending on the educational interest or ease of explanation or understanding of the presentations. There is a prevailing and significant order: first, teachers prefer ostensive presentation of a particular example, that it does not define the limit concept; second, the teachers prefer the presentations, which containing the definition now, use graphic resources in decreasing order.

Palabras clave: función, límite, ostensión, deslizamiento metadidáctico y deslizamiento metacognitivo, epistemología espontánea del profesor.

Keywords: function, limit, ostensive presentation, meta-didactical shift and metacognitive, teacher's spontaneous epistemology.

Lacasta, E., Wilhelmi, M.R. (2010). Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 379-394). Lleida: SEIEM.

Restricciones cognitivas y de enseñanza

Se presentan en esta sección algunas restricciones cognitivas (relativas a las capacidades de los estudiantes) y de enseñanza (relacionadas con el currículo vigente y la presentación de los objetos matemáticos) relativas al límite funcional.

El paso del álgebra al análisis

Existen estudios empíricos acerca de los obstáculos encontrados en la didáctica del análisis en los distintos niveles de la educación secundaria. Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) realizan un estudio epistemológico sobre la noción de igualdad que justifica la necesidad de evitar fenómenos de linealidad y reduccionismo.

> Brevemente, la linealidad se puede describir afirmando que ‘la aritmética precede al álgebra y ésta al análisis’. Se entiende con esto que […] el aprendizaje de cada una establece condiciones previas necesarias para el aprendizaje de la ‘siguiente’. El esquema de enseñanza es: Aritmética → Álgebra → Análisis. El reduccionismo se puede describir en los siguientes términos: el álgebra es comprendida como una aritmética generalizada (con letras) y el análisis como un álgebra de funciones […] Estos dos reduccionismos invierten, en la práctica, el esquema anterior: Aritmética ← Álgebra ← Análisis. (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007, 111–112).

Éste y otros estudios describen las dificultades en los procesos de aprendizaje y enseñanza del límite según ciertos obstáculos epistemológicos, como el estatus de la noción de igualdad, y otros ligados a la construcción de R por sucesiones en Q o la completitud de Q hacia R.

Las restricciones cognitivas de los estudiantes de esta etapa son asimismo evidentes. Los resultados PISA (www.pisa.oecd.org) son un ejemplo de las dificultades de interpretación, comunicación y abstracción matemática de los estudiantes de 15 años (3º ESO), momento en el cual se introduce el límite asociado a progresiones aritméticas y geométricas.

Tratamiento curricular: presencia nominal y efectiva

Las restricciones cognitivas han tenido su implicación en la formulación de los currículos para la secundaria (MEC, 2007a, 2007b). Existe una tendencia a evitar el tratamiento expreso de las nociones clave del Análisis matemático y, muy en concreto, de la noción de límite. En 3º ESO se consideran ya situaciones, en un contexto algebraico, que involucran la aproximación “intuitiva” al límite, pero cuyo interés se centra más en la manipulación simbólica de expresiones formales que expresan leyes generales, que en el comportamiento “límite” de dichas leyes (MEC, 2007a, 756).

En 1º Bachiller se persiste en esta “aproximación”, no apareciendo institucionalmente el concepto hasta 2º Bachiller, donde, además, el objetivo fundamental respecto al límite es el "estudio de fenómenos naturales, tecnológicos y sociales" (MEC, 2007b, 45451 y 45476), tanto en las matemáticas científico-tecnológicas como en las aplicadas a las ciencias sociales.

Idoneidad didáctica y fenómenos didácticos

La noción de idoneidad didáctica, como criterio sistémico de adecuación al proyecto de enseñanza de un proceso de estudio de las matemáticas, es un instrumento para el análisis del papel del saber en el sistema didáctico y para la identificación y descripción de fenómenos asociados.

Idoneidad didáctica

El Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) establece criterios de valoración de la idoneidad de los procesos de estudio de las matemáticas, que pueden estructurarse en tres dimensiones (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005, 2–3), que reformulamos:

- *Idoneidad epistemológica*, que supone la adaptación entre los conocimientos enseñados y el saber pretendido.
- *Idoneidad cognitiva*, que permite la evolución de estrategias de base hacia los conocimientos pretendidos.
- *Idoneidad de enseñanza*, que capacita al profesor y a los alumnos para la identificación de conflictos semióticos y para su resolución mediante la negociación de significados, valorando la pertinencia, el coste o la eficacia de nociones, procesos y significados matemáticos.

La idoneidad didáctica es el resultado de la integración de estas idoneidades parciales y, por lo tanto, supone la toma en consideración de las interacciones entre ellas. Los aspectos fundamentales de la idoneidad didáctica pueden ser representados mediante un triángulo equilátero (contorno de máxima idoneidad) y un hexágono irregular interno (idoneidades logradas). Los lados del hexágono se delimitan, en general, reflejando las carencias observadas. Los lados del triángulo representan un ideal establecido previamente y de manera arbitraria (con el tamiz de un fundamento teórico y de un contraste experimental) en una institución (figura 1).

FIGURA 1. COMPONENTES DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

La idoneidad didáctica, en última instancia, pretende una enseñanza "de calidad". De hecho, nuestra experimentación aporta información sobre "el conocimiento matemático para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT)" del profesor, que condiciona la calidad de la docencia (Hill et al., 2008).

Epistemología espontánea del profesor

Las decisiones del profesor buscan, de manera "espontánea", adaptar su actividad a las condiciones (restricciones y posibilidades) cognitivas, epistemológicas y de enseñanza. Estas decisiones están basadas en su experiencia y en su memoria didáctica. Brousseau y Centeno (1991) demostraron que el contrato didáctico apropiado para esta movilización descansa en la memoria didáctica del profesor y del sistema. Esta memoria permite al profesor utilizar el pasado particular de la clase y gestionar la articulación de los aprendizajes particulares con respecto a la historia de la clase y de los alumnos.

Por ello, tanto la epistemología espontánea[1] como la memoria didáctica son claves para interpretar las decisiones del profesor con vistas a la determinación de procesos idóneos de estudio de las matemáticas.

Deslizamiento metacognitivo y deslizamiento metadidáctico

Cuando una tentativa de enseñanza fracasa; es decir, cuando no se logra transmitir el objeto pretendido, el profesor se ve obligado a retomar el contenido para explicarlo nuevamente y completarlo en su caso. En ocasiones, esta primera tentativa, que es en origen un recurso para enseñar, se convierte en un objeto de estudio e incluso de enseñanza. Entonces, la forma sustituye al fondo y una actividad rela-

[1] El estatus que adquiere el profesor "espontáneo" no le permite pasar de un papel de *ayudante del estudio* al de *director* y *enseñante* (Espinoza y Azcárate, 2000, 359).

cionada con la noción que no se ha logrado transmitir, se convierte en el único objetivo pretendido por el profesor.

> "Le glissement métacognitif est le remplacement d'une connaissance par un de ses modèles par une description en métalangage. Le glissement métadidactique est le processus didactique qui conduit à l'utilisation didactique effrénée du glissement métacognitif." (Brousseau, 2003, 7).

Estos deslizamientos suelen tener origen, normalmente implícito y aún inconsciente por parte de los profesores, en el privilegio de las dimensiones cognitiva y de enseñanza en la búsqueda de procesos de estudio idóneos, en detrimento de la epistemológica.

Ilusión de la transparencia y ostensión

Es consustancial al deslizamiento metadidáctico suponer que el modelo utilizado es portador del significado "global" de la noción, esto es, que permite un acceso preclaro a ella, en otros términos, la elección del modelo obedecería a un criterio de presunta idoneidad cognitiva. Esto es, se trata del fenómeno de la ilusión de la transparencia: los alumnos ven en el modelo únicamente un ejemplo, mientras que el profesor lo interpreta en tanto que "modelo". Así pues, no se atiende la dualidad particular-general (Godino, Batanero y Font, 2007).

Asimismo, la ilusión de la transparencia conlleva la presentación ostensiva, donde un ejemplo sustituye a la noción matemática. El profesor confía de manera abusiva (e ilusoria) en las virtudes del ejemplo para trasmitir la noción[2].

Experimentación

Se presenta a una muestra de profesores 4 presentaciones del límite funcional, que éstos deben ordenar según su preferencia.

Cuestionario: cuatro presentaciones del límite de funciones

En el anexo damos el cuestionario propuesto. La selección de las presentaciones del límite obedece a cuatro criterios:

1. *Grafismo*. Presentación de la noción utilizando recursos gráficos.
2. *Tabla de valores*. Representación del comportamiento de la función a través de un conjunto finito de valores "suficientemente representativos".

---

[2] La ostensión así introducida difiere de uso de lo ostensivo tanto en la Teoría Antropológica (Bosch y Chevallard, 1999) como en el Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007).

3. *Ostensión*. Presentación de la noción por medio de un ejemplo, considerado como prototipo de la clase de objetos que representa (funciones reales de variable real).
4. *Idoneidad epistémica*. En este caso en particular, hacemos una valoración dicotómica: 1 (presentación coherente con la definición de límite); 0 (no pertiente).

En la tabla 1 se describen las cuatro presentaciones según los criterios descritos, así como un descriptor del manual de referencia en el que se incluyen[3] y el nivel educativo para el que han sido elaborados (secundaria[4] y universidad).

Presentación	Descriptor	Nivel	Grafismo	Tabla	Ostensión	Idoneidad epistémica
A	Spivak	Univ. Ciencias	0	0	0	1
B	De Guzmán	2º BUP	1	0	1	1
C	Texto LOGSE	COU	0	1	1	0
D	Larson	Univ. Ingenierías	1	0	0	1

TABLA 1. DESCRIPCIÓN DE LAS PRESENTACIONES DE LÍMITE SELECCIONADAS

Según se puede observar en la tabla 1, únicamente la presentación C no satisface el criterio necesario de idoneidad epistémica; hay dos presentaciones grafistas (B y D), dos ostensivas (B y C) y la presentación se apoya en una tabla de valores sólo en una de ellas (C).

Comportamientos esperados e hipótesis

Los comportamientos observados con relación a los criterios de la sección anterior son:

- *Grafismo*: Se espera pues que los profesores manifiesten una preferencia por las presentaciones que contemplan gráficos (B y D), ya que la gráfica

[3] El descriptor puede ser la propia referencia bibliográfica.

[4] Debido al estudio longitudinal, hemos mantenido las presentaciones del estudio original.

permitiría "ver" las características globales de la función, que serían más difíciles de interpretar a partir de su fórmula o de una tabla de valores.

- *Ostensión*: El orden de preferencia de las presentaciones B y D determina, a su vez, la aceptación de que una función particular en el plano cartesiano es "suficiente" para la presentación de la noción (ostensión en B) o, por el contrario, que es más conveniente una representación "más genérica" para la noción de límite (D representa un esquema del comportamiento de la función en un entorno de un punto[5]).
- *Idoneidades epistémica, cognitiva y de enseñanza*: El criterio de idoneidad epistémica, necesariamente, será valorado en interacción con los otros criterios (cognitivo y de enseñanza). Es esperable que la presentación A sea relegada "por excesivo formalismo"; de tal manera que la C, aún cuando es ostensiva (tabla de una función concreta) y epistémicamente no idónea (no define el límite), será preferida a la A.

Por lo tanto, se establece como hipótesis que: el orden preferido es DBCA.

Muestra

La muestra es intencional, no probabilística, por lo que la información extraída del análisis estadístico de la misma tiene un carácter predominante descriptivo – interpretativo.

Se han considerado 3 sectores en la muestra, homogéneos intragrupo y heterogéneos intergrupo, que son:

- Grupo de 23 profesores de secundaria que dieron sus respuestas en 1995 en España.
- Grupo de 28 profesores de secundaria que dieron sus respuestas en 2010 en España.
- Grupo de 33 profesores en formación práctica que dieron sus respuestas en 2009 en Francia, en el *Institut Universitaire de Formation des Maîtres* (IUFM) de Aquitania.

El estudio aporta por lo tanto información longitudinal (variación de la preferencia a lo largo del tiempo en España) y transversal (variación según el sector contemplado, notablemente la diferencia en la respuesta más reciente en España y la respuesta en Francia).

[5] Toda función derivable en un entorno de un punto puede ser aproximada por una recta.

Resultados

Se otorgan pesos 4, 3, 2 y 1 a las presentaciones según el orden de elección (4 para la más preferida; 1 para la menos preferida). En la figura 2 se muestra el interés didáctico de cada presentación como suma de los rangos otorgados por los profesores en cada grupo.

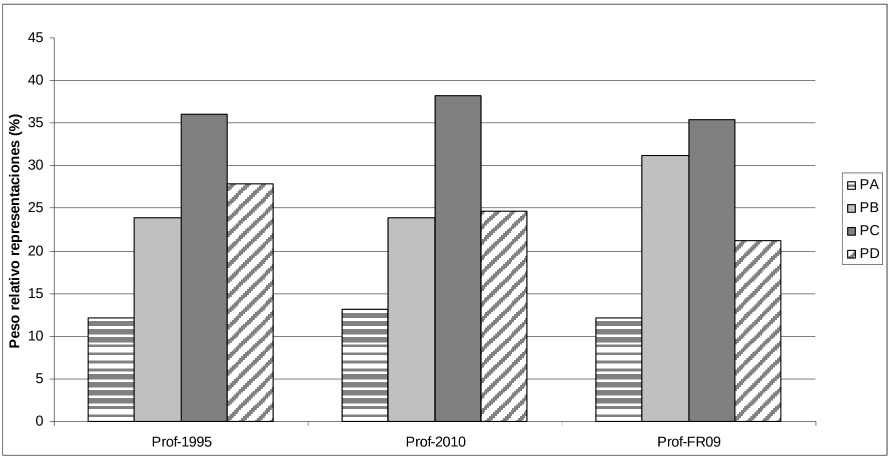


FIGURA 2. INTERÉS DIDÁCTICO PARA CADA GRUPO

Homogeneidad de las opiniones de los profesores

Los profesores encuestados emiten simples ordenaciones sin otras propiedades numéricas. No se puede suponer que los datos analizados se hayan extraído de una población distribuida normalmente ni homocedasticidad (igualdad de varianzas en las muestras). Esto impide el uso de la estadística inferencial paramétrica, pero permite usar una "prueba de rango" no paramétrica para "distribuciones libres": la prueba de significación del coeficiente de correlación W de Kendall (Siegel, 1990).

El test no paramétrico W de Kendall precisa el cálculo previo de un coeficiente S:

$$S = \sum_{i \in I} S_i \text{ donde } S_i = \left(R_i - \frac{\sum_{i \in I} R_i}{N} \right)^2 \quad (R_i;\ i \in I;\ I = \{A, B, C, D\})$$

Donde N es el número de objetos a ordenar (N = 4; número de presentaciones) y Ri los rangos otorgados por los profesores a cada una de las presentaciones. En la tabla 2, se pueden ver los coeficientes S y los estadísticos de contraste W según los grupos y globalmente.

País	**Muestra**	R_A	R_B	R_C	R_D	S_A	S_B	S_C	S_D	S	**k**	**N**	**W**	χ^2
España	Prof-1995	28	55	83	64	870	6	650	42	1569	23	4	0,59	40,71
	Prof-2010	37	67	107	69	1089	9	1369	1	2468	28	4	0,63	52,92
Francia	Prof-FR09	40	103	117	70	1806	420	1190	156	3573	33	4	0,66	65,34
	Total	102	218	295	195	10100	240	8556	56	18953	81	4	0,58	140,94

TABLA 2. PESOS GLOBALES, COEFICIENTES S, ESTADÍSTICOS DE CONTRASTE W Y VALORES DE LA $\chi 2$

El valor crítico de S para estos valores (tabla 2), con nivel de confianza 5%, es 258. De esta forma, se rechaza la hipótesis nula, luego existe una concepción homogénea intragrupo sobre el orden del interés didáctico de las 4 representaciones de la noción de límite.

En todos los grupos la presentación C es la más valorada (más del 70% en todos los grupos y próxima al 90% para los profesores españoles de 2010), mientras que la presentación A es masivamente relegada (más del 70%). Más aún, el 70% del total de profesores elige como permutación CDBA o CBDA.

Como se puede observar en la figura 3, la diferencia entre los grupos por país estriba en el ordenamiento de las presentaciones B y D. Aproximadamente 60% de los profesores españoles prefiere la presentación D a la B, mientras que este orden relativo supera apenas el 10 % entre los profesores en formación franceses.

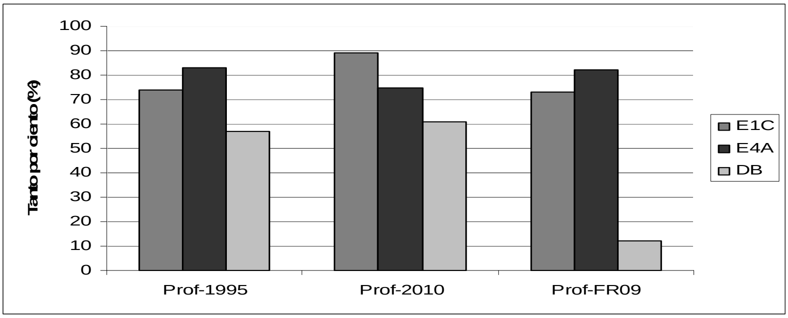


FIGURA 3. ORDEN DE ELECCIÓN DE A Y C Y ORDEN RELATIVO B-D

Intensidad de la concordancia entre los profesores y significatividad de los ordenamientos

El coeficiente W de concordancia de Kendall expresa la relación entre la distancia entre el modelo de la hipótesis nula y el observado. El coeficiente W varía entre 0 y 1 y cuanto más grande es el valor de W más se aproxima la tabla a la concordancia perfecta. W se calcula:

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12}k^2(N^3 - N)}$$

Los valores de la tabla 2 permiten concluir que los profesores tienen un uso relativamente concordante de las expresiones "interés didáctico" y "facilidad de explicación y comprensión".

Además, en las condiciones del problema, la significatividad de los resultados puede contrastarse mediante la distribución χ^2 ($\chi^2 = k \cdot (N-1) \cdot W$). Los valores que se así se obtienen (tabla 2) permiten afirmar que el orden es significativo al 99% en los tres grupos.

Algunas justificaciones explícitas

En la figura 4 se muestran las distintas razones de cuatro profesores (2 españoles y 2 franceses) para justificar su orden. En todas ellas, la opción C es elegida en primer lugar y la A en último, como ocurre con más del 70% en los tres grupos.

- "Me gusta más la opción C, que aunque es la más simple, se entiende de forma muy intuitiva el concepto. Después están las más formales que yo ordenaría de la siguiente manera: D que lo explica bastante bien; B, menos explicada; y por último, A (solo la definición)."
- "C: más concreto; B: esquema más claro que D; luego, D y, por último, A (demasiado abstracto, incluso para la universidad si no se explica)."
- "C : *sur un exemple, c'est plus facile de comprendre la notion ; B : le dessin est bien fait ; puis D ; et, finalement, A : trop court*."
- "CDBA : *du plus délayé au plus concis*" (del más diluido al más conciso).

FIGURA 4. ALGUNAS JUSTIFICACIONES EXPLÍCITAS

Breve discusión de los resultados y conclusiones

Se constata pues la preferencia de la presentación tabular C, en detrimento de los gráficos, contradiciendo el predominio de las presentaciones gráficas previsto en la hipótesis (“El orden preferido es DBCA”). Sin embargo, la postergación de la definición A, desprovista de todo soporte gráfico o numérico, se ve apoyada.

La opción C representa un medio en el que el estudiante puede interactuar, por medio de la calculadora, más fácilmente que con el gráfico, facilitando la negociación del significado por parte del profesor. Las dimensiones cognitiva y de enseñanza son pues privilegiadas en la búsqueda de la idoneidad didáctica.

La preferencia de la presentación C, sin definición de límite, que incurre en un deslizamiento metadidáctico, no debe interpretarse de manera alarmista ni, por supuesto, apoyar una crítica fácil al profesorado. Las restricciones cognitivas de los estudiantes en el manejo de la noción de límite y el tratamiento curricular de la misma son de hecho la medida de las decisiones del profesor y su renuncia implícita a la introducción del límite funcional. Asimismo, la presentación C del “$\lim_{x\to a} f(x)$”, donde “f (a)” no existe, evita que los estudiantes calculen por sustitución el límite y lo confundan con la continuidad.

La opción C describe una situación en la que se asegura una *estrategia de base* para los estudiantes (aportación a la idoneidad cognitiva) y la posibilidad de abordar los contenidos del currículo con un coste docente relativamente bajo (aportación a la idoneidad de enseñanza). Sin embargo, la aplicación de esta estrategia no asegura por sí misma el tránsito del conocimiento (aproximación numérica tabular) al saber pretendido (límite funcional), lo que implica una baja idoneidad epistémica. Más aún, existe el riesgo de trasmitir el conocimiento falso de que la existencia de “$\lim_{x\to a} f(x)$” supone la no existencia de “f (a)”.

La opción C refleja mejor que ninguna otra presentación esta forma de introducir (mostrar) el límite funcional: mediante una tabla de valores donde se “ve la tendencia” que “es” el valor límite. La sistematización de la presentación C en un proceso de estudio puede conducir a una enseñanza ostensiva del límite funcional, siendo difícil evitar un deslizamiento metadidáctico que puede, a largo plazo, minimizar la idoneidad didáctica de un tal proceso de estudio: la reducción epistemológica aborta el desarrollo sostenido de la noción.

Los profesores prefieren las condiciones (gráficas o no) que mejor permiten un *contrato didáctico de ostensión*. El uso de gráficos no es en sí mismo ni problemático ni facilitador de la adquisición de los conocimientos involucrados. No supone, por lo tanto, un hecho (o fenómeno, en su caso) didáctico que sea preciso evitar o promover, sino que tendrá que ser valorado según el contexto, uso y adecuación con el proceso de estudio pretendido o efectivamente desarrollado. Sin embargo, la ostensión debe ser evitada. Esto, evidentemente, no supone la necesidad de restringir la presentación de una noción, su introducción y desarrollo, a su desarrollo formal, sino tomar conciencia de que un ejemplo, por muy específico y bien escogido que sea, no deja de ser un ejemplar de una clase.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto: SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

Referencias

Bosch M., Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(1): 77–124.

Brousseau G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. [Disponible 15 marzo 2010 : //pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau].

Brousseau G.; Centeno J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 11(2/3), 167–210.

De Guzmán, M. y otros (1987). *Matemáticas. Bachillerato 2*. Madrid: Anaya.

Espinoza, L., Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de "límite de función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 355–368.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39, 127–135.

Godino J. D., Wilhelmi M. R., Bencomo D. (2005). Suitability criteria for a mathematical instruction. A teaching experience with the function notion. *Mediterranean journal for research in mathematics education*, 4(2), 1–26.

Hill, H. C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430–511.

Larson, R. E. (1989). *Cálculo y geometría analítica*. Madrid: McGraw-Hill.

MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO. *BOE* 5, de 5 enero, 677–773.

MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE* 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.

Santos, D. (1988). *Matemáticas COU. Opciones C y D*. Madrid: Santillana.

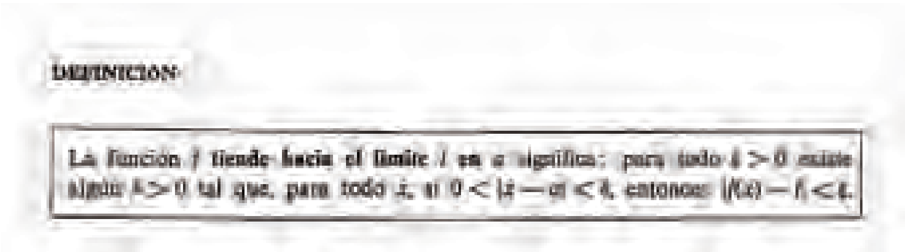
Siegel, S. (1990). *Estadística no paramétrica. Aplicada a las ciencias de la conducta*. México DF: Trillas.

Spivak, M. (1975). Calculus. *Cálculo infinitesimal*. Barcelona: Reverté.

Wilhelmi M. R., Godino J. D., Lacasta E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *RDM* 27, 1, 77–120.

Anexo: cuestionario

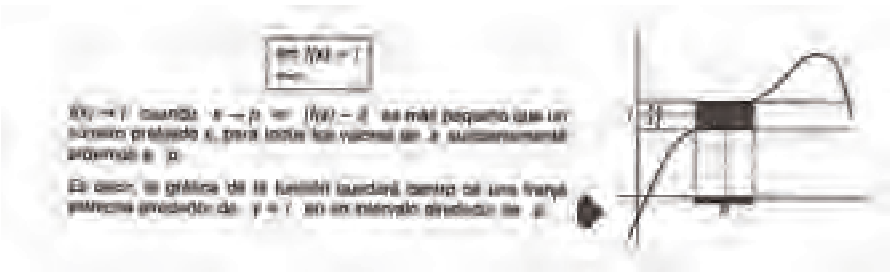
A continuación encontrarás cuatro formas de presentar el límite de una función en un punto extraídas de libros diferentes. Analízalas y contesta a la pregunta final (en el reverso de esta hoja).



DEFINICION:

La función f tiende hacia el límite l en a significa: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

PRESENTACION A (SPIVAK, 1975, 110)[6]



PRESENTACIÓN B (DE GUZMÁN Y OTROS, 1987, 143)

[6] En el cuestionario entregado a los profesores no se explicita la referencia bibliográfica.

El concepto de «límite de una función f cuando x tiende a a» se refiere a la pregunta: «¿A qué valor tienden los valores $f(x)$ cuando la variable independiente se va acercando a a?» Por ejemplo, de la tabla siguiente de valores de una función

x	$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x - 2}$
2,1	8,61
2,01	8,0601
2,001	8,006001
...	...
1,9	7,41
1,99	7,9601
1,999	7,996001
...	...

se deduce que a medida que los valores de la variable x se van acercando a 2 (tanto con valores mayores que 2 como con valores menores que 2), la variable dependiente $f(x)$ va acercándose a 8. Escribiremos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = 8$$

Obsérvese especialmente que esta función ni siquiera existe en $x = 2$. Es decir, el límite puede existir en un valor $x = a$ incluso sin que a pertenezca al dominio de la función.

Los métodos para calcular límites de una función en un punto fueron estudiados con anterioridad. En ellos, y como norma práctica, puede valer la mera observación del comportamiento de una función según los valores de una tabla, como se ha hecho anteriormente.

PRESENTACION C (SANTOS, 1988, 96)

PRESENTACIÓN D (LARSON, 1989, 73–74)

Ordena las cuatro formas de presentación del límite finito de una función en un punto, según su interés didáctico o su facilidad de explicación y de comprensión en el instituto (1ª para la más interesante, etc.):

1ª : ___ , porque: _____________________________

2ª : ___ , porque: _____________________________

3ª : ___ , porque: _____________________________

4ª : ___, porque: _____________________________