

Evaluación de las competencias matemáticas en las pruebas PISA 2003

Norma Rubio Goycochea*

Resumen

En este taller se presentan, en primer lugar, los criterios de evaluación de las competencias matemáticas en las pruebas PISA (Programme for International Student Assessment) 2003 y un análisis de éstas. En segundo lugar, se muestran algunos ejemplos de los problemas propuestos en estas pruebas y, con la participación de los asistentes y tomando en cuenta algunas soluciones de alumnos a determinados problemas de estas pruebas PISA, se realiza un análisis de competencias matemáticas. Para ello, se proponen herramientas que podrán ayudar a los profesores en la evaluación de dichas competencias.

Palabras clave: PISA, competencias matemáticas, criterios de evaluación.

1. Introducción

En la actualidad, hay una tendencia a considerar que “saber matemáticas” ya no es solo saber aplicar algoritmos o fórmulas, sino que se debe ser competente para aplicar las matemáticas a situaciones no matemáticas de la vida real. Esta tendencia tiene que ver, en gran parte, a que hay actualmente una propensión a la sustitución de las matemáticas formalistas por unas matemáticas contextualizadas y a los estudios internacionales de evaluación del sistema educativo.

* Pontificia Universidad Católica del Perú

Con respecto a esta inclinación de sustituir las matemáticas formalistas por unas matemáticas contextualizadas, ésta presupone una cierta concepción empírica de las matemáticas. Como indica Font (2008, p. 27):

“Estas matemáticas empíricas (contextualizadas, realistas, intuitivas, etc.) presuponen una cierta concepción empírica de las matemáticas. Es decir, una concepción que considera que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que supone que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales”.

Una de las tantas razones, para la introducción de las matemáticas contextualizadas, proviene de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Entre las diversas investigaciones que hay, se puede mencionar, por ejemplo, aquellas interesadas por la introducción de problemas contextualizados en el currículum (Realistic Mathematics Education del Instituto Freudenthal).

De otro lado, los estudios internacionales de evaluación del sistema educativo, están proporcionando mayor importancia a la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares aprendidas, a los contextos extra matemáticos de la vida cotidiana. Como muestra de estos estudios se tienen los informes PISA, en particular el informe PISA 2003.

Es así, que esta tendencia de considerar que saber matemáticas, es ser competente en la aplicación de ellas a contextos extra matemáticos, ya se está haciendo evidente en varios países, a través del diseño e implementación de los currículum basados en competencias, tanto en las enseñanzas básicas y superiores como en la educación permanente.

Se presentan entonces las siguientes preguntas ¿qué son competencias matemáticas?, ¿cómo las evaluamos? y ¿qué conocen los profesores en ejercicio sobre competencias matemáticas? Aunque en este taller no se pretende dar respuesta exhaustiva a estas preguntas, sí se propone que los profesores asistentes al taller reflexionen sobre ellas y se

muestran algunas herramientas que podrán ayudarlos a evaluar dichas competencias. Para ello, se presentan como modelo algunos de los problemas propuestos en las pruebas PISA 2003 y los criterios para su evaluación, mostrándose la necesidad de tomar en cuenta otras herramientas que son las propuestas por los autores del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Este taller tuvo una duración de tres días con sesiones de hora y media cada día, y con una asistencia promedio de 50 profesores de los cuales, 10% de ellos imparten clases a estudiantes de educación primaria, 60% de ellos secundaria y 30% de ellos a estudiantes de educación superior; en su mayoría con una experiencia docente de más de 10 años (80% de los participantes) y laborando en instituciones estatales un 60% de los participantes.

En el apartado 2 de este documento se presenta la metodología empleada, desde el diseño hasta la implementación del taller. En el apartado 3 se muestran el marco teórico de las pruebas PISA 2003, describiendo sus elementos, competencias y grupos de competencias o niveles de complejidad y, los niveles de análisis del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, presentando los niveles de análisis, como herramientas para una didáctica descriptiva, explicativa y valorativa. En el apartado 4 se muestran un par de ejemplos de problemas PISA 2003, trabajados por los asistentes al taller, sobre los cuales se hace un análisis de los niveles de complejidad propuestos por OCDE/PISA y se evalúan las competencias matemáticas antes y después de hacer un análisis de los objetos y procesos matemáticos utilizados por una alumno al desarrollar la solución de un problema adaptado de PISA 2003. Finalmente, en el apartado 5, concluimos con algunas reflexiones generales.

2. Metodología

- Diseño del taller, denominado “Evaluación de las competencias matemáticas en las pruebas PISA 2003”, con una duración de 4,5 horas en el aula durante los tres días de duración del Coloquio. En este taller las modalidades de trabajo fueron: el trabajo individual y en grupos, con intervenciones breves del ponente del taller

ya sea en la introducción o al final del taller. En contenido principal del taller fue:

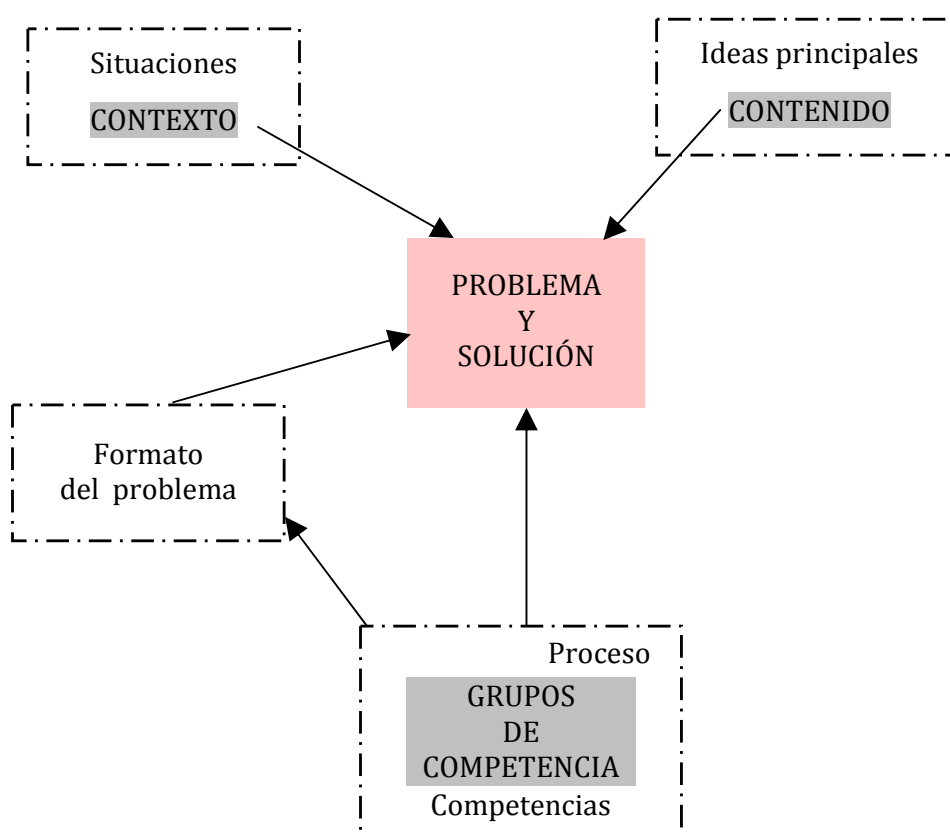
- a. La reflexión sobre los criterios propuestos por los autores de las pruebas PISA 2003 para a evaluación de competencias, usando los mismos problemas propuestos en estas pruebas.
 - b. Evaluación de las competencias PISA, de la solución elaborada por un alumno a un problema PISA adaptado, antes y después de presentar las herramientas que propone el EOS.
- Diseño de cuestionarios que fueron contestados por los profesores asistentes para recoger información sobre sus conocimientos de competencias matemáticas antes y después de la realización del taller.
 - No hubo selección de la población, los participantes escogieron asistir a este taller por iniciativa propia, aunque se indicaba en el programa de este coloquio, que estaba dirigido a profesores de educación primaria y secundaria de educación básica regular.
 - El registro de la información proporcionada por los asistentes del taller fue llevado a cabo en forma escrita, usando los cuestionarios y las soluciones a algunas de las actividades propuestas.

3. Marco teórico

3.1 Pruebas PISA 2003

El marco conceptual de matemáticas del proyecto OCDE/PISA provee la base y la descripción de una evaluación que establece en qué medida los estudiantes de 15 años están preparados para utilizar las matemáticas, aprendidas durante su escolaridad, de una manera correcta al enfrentarse a problemas del mundo real. El área de conocimiento evaluado se describe a través de tres elementos:

- Las *situaciones o contextos* en que se ubican los problemas, las cuales pueden ser personales, educativas o laborales, públicas y científicas;
- El *contenido matemático* que usan para resolver los problemas, organizado según ciertas *ideas* principales (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre);
- Las *competencias*, para resolver los problemas, que se activan para relacionar el mundo real en el que se generan los problemas con las matemáticas. Se distinguen ocho competencias: Pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelar; plantear y resolver problemas; representar; utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones y; emplear soportes y herramientas.



Tomado de Marcos teóricos de PISA 2003 (2004, pp.33) Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

Se define *competencias matemáticas* a los procesos matemáticos que los estudiantes aplican al tratar de resolver los problemas (INECSE¹, 2004, pp.34) y se distinguen tres *grupos de competencias*²:

- **Reproducción:** Se consideran en este grupo, las competencias que se utilizan más frecuentemente en las pruebas estandarizadas y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas usuales, reconocimiento de equivalentes, empleo de propiedades y objetos matemáticos familiares, puesta en práctica de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, la aplicación de expresiones con símbolos y fórmulas instituidas y realización de cálculos.
- **Conexión:** Se consideran en este grupo a las competencias se apoyan sobre las del grupo de *reproducción*, llevando a situaciones de solución de problemas que ya no son de rutina solamente, sino que incluyen escenarios familiares o cercanos a estos.
- **Reflexión:** Las competencias de este grupo toman en cuenta un elemento de reflexión por parte del alumno en los procesos necesarios o utilizados para resolver un problema. Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en contextos de problema que contienen más elementos y pueden ser más «originales» o poco comunes que los del grupo de *conexión*.

Durante el taller los profesores participantes, primero se familiarizan tanto con los grupos de competencias (o niveles de complejidad) como con las competencias matemáticas

¹ INECSE es el Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo que editó en 2005 una publicación que trataba de difundir la totalidad de las preguntas de matemáticas y de solución de problemas de la OECD/PISA.

² Estos grupos son llamados niveles de complejidad en INECSE (2005, pp. 22) cuando describen los criterios de evaluación.

propuestas por los autores de OCDE/PISA, para luego aplicarlas en algunos problemas PISA 2003.

3.2 Niveles de análisis del EOS

D'Amore, Font y Godino (2007); Font y Godino, (2006); Godino y Batanero (1994); Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006); Godino, Contreras y Font, (2006); Godino, Font y Wilhemi (2006); Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) proponen, en el marco del EOS, cinco niveles para el análisis de procesos de estudio:

Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas. La aplicación de este nivel lleva a describir la secuencia de prácticas matemáticas, durante las cuales se activan elementos distintos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.).

Nivel 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos. En este nivel se describen la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos, ya que el agente realiza prácticas orientadas a la resolución de situaciones-problema, en las que se deben tomar en cuenta, entre otros aspectos, las configuraciones de objetos y los procesos matemáticos que hacen posible dichas prácticas.

Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos. Dependiendo del proceso de estudio se describirán, en este nivel, las diversas interacciones didácticas ocurridas, así por ejemplo podrían tomarse en cuenta las interacciones presentadas en torno a los conflictos de tipo semiótico.

Nivel 4. Identificación de normas. En este nivel se consideran que tanto las prácticas matemáticas como las interacciones están condicionadas y soportadas por un conjunto de normas y metanormas que regulan las acciones y que deben ser analizadas.

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa ya que sirven para comprender y responder a la pregunta ‘¿qué ha ocurrido aquí y por qué?’.

Nivel 5. Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de estudio. Este nivel se ocupa del análisis de tipo valorativo. La didáctica de la matemática no debería limitarse solo a la descripción, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio. Son necesarios, por tanto, criterios “idoneidad” o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y “guiar” su mejora, evaluando la pertinencia del proceso de instrucción matemática y señalando pautas para la mejora del diseño y la implementación del proceso de estudio.

Durante el desarrollo de este taller, se presentan y aplican algunas de las herramientas propuestas en el EOS, correspondientes al nivel 2 de análisis: configuraciones de objetos y una tipificación de los procesos matemáticos (y didácticos), teniendo como contexto de reflexión los problemas “*Carpintero*”, adaptado del problema original PISA 2003³ y el problema “*Chatear*”.

4. Ejemplos de Pruebas PISA 2003.

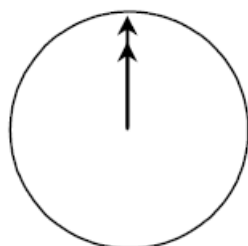
Por cuestiones de espacio, presentaremos a continuación uno de los problemas PISA 2003, trabajados por los profesores asistentes al taller:

³ La adaptación del problema del carpintero y las soluciones de los alumnos a dicho problema se han tomado de la comunicación presentada en la Second Annual PDTR Conference, celebrada en Barcelona del 14 al 18 de Julio de 2007: I. Guevara, J. Comellas y V. Font (2008) PISA PROBLEM CARPENTER - An analysis of the competencies needed for solving the carpenter problem ([http://maincycle.pdtr.eu/pages/National_reports_2007/html/Guevara_Comellas_Font_\(Sp\)_files/frame.htm](http://maincycle.pdtr.eu/pages/National_reports_2007/html/Guevara_Comellas_Font_(Sp)_files/frame.htm)).

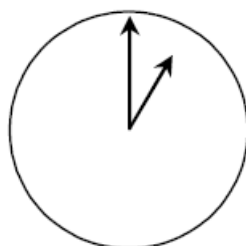
CHATEAR⁴.

Mark (de Sydney, Australia) y Hans (de Berlín, Alemania) se comunican a menudo a través de Internet mediante el **chat**. Tienen que conectarse a Internet a la vez para poder "chatear".

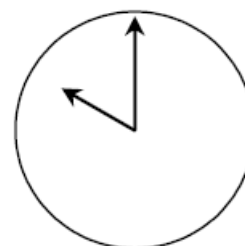
Para encontrar una hora apropiada para chatear, Mark buscó un mapa horario mundial y halló lo siguiente:



Greenwich 12 de la noche



Berlín 1:00 de la noche



Sydney 10:00 de la mañana

Pregunta 9: Cuando son las 7:00 de la tarde en Sydney, ¿qué hora es en Berlín?

Pregunta 10: Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana, de sus respectivas horas locales, porque estarán durmiendo. ¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans? Escribe las respectivas horas locales en la tabla.

Lugar	Hora
Sydney	
Berlín	

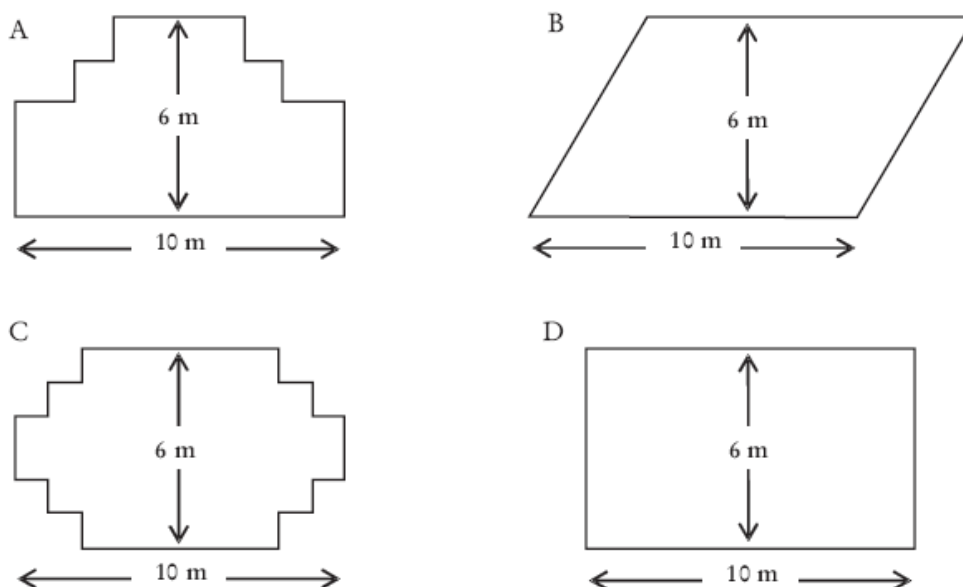
Durante la primera sesión, este problema sirvió, en primer lugar, como ejemplo para que los profesores participantes se familiarizaran con los grupos de competencias (reproducción, conexión y reflexión), también llamados niveles de complejidad (INECSE, 2005, pp36-37), bajo los cuales fue categorizado este problema. Más adelante, fue utilizado para que los participantes evaluaran las competencias propuestas por OCDE/PISA.

⁴ Tomado del Problema "Chatear" de Pisa 2003 Pruebas de Matemáticas y Solución de problemas.

Para llegar a esto último, una de las primeras tareas que debieron desarrollar los asistentes al taller fue, que después de realizar una lectura individual, en grupos de tres determinarían los niveles de complejidad de las dos preguntas propuestas en el problema PISA 2003 “*Los niveles de CO₂*” (INECSE, 2005, pp.56), coincidiendo en sus respuestas con los niveles establecidos en los criterios de evaluación PISA 2003, no presentando esta actividad mayor dificultad. Se les proporcionó a los participantes la relación de los grupos de competencias, propuestos por los autores de OCDE/PISA.

SITUACIÓN PROBLEMA

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Está considerando los siguientes diseños para el parterre.



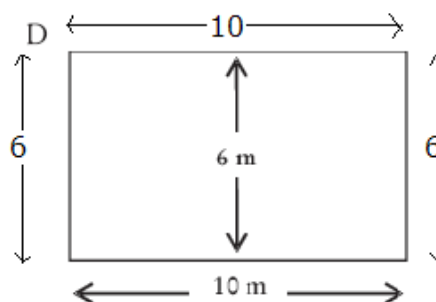
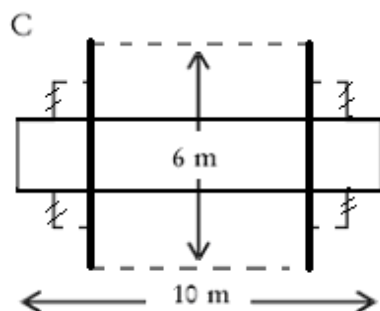
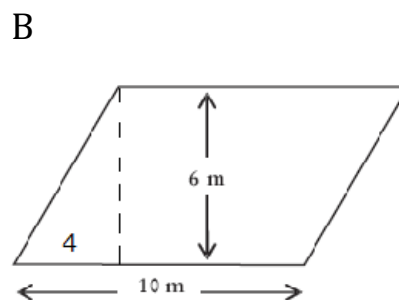
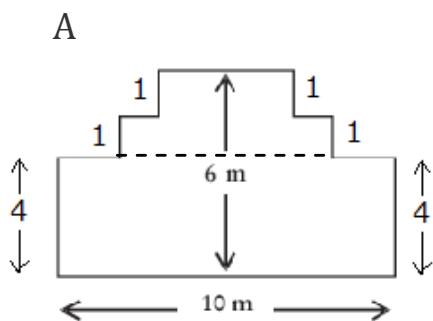
*Para cada uno de los diseños anteriores A, B, C, D explica si se puede tapiar o no el parterre con los 32 metros de madera. Debes responder con un **sí** puedes hacerlo o un **no** puedes hacerlo, y por qué.*

¿A qué nivel cree que corresponda: reproducción, conexión o reflexión? Justifique su respuesta.

Durante la segunda sesión, una de las tareas que debieron desarrollar los participantes al taller fue que, luego de presentarles el problema del “*Carpintero (adaptado)*” y la solución del alumno a este problema, en grupos de tres, indicaran las competencias matemáticas desarrolladas por él. Para ello, les fue entregado junto con el problema y la solución la lista de competencias (e indicadores) propuestos por OCDE/PISA. En esta parte se observó una mayor dificultad al dar sus respuestas.

A partir de esto, se reflexionó sobre la necesidad de un acercamiento a los objetos y procesos matemáticos activados por el alumno en su solución. Luego de esto, se realizó un análisis de las competencias y procesos matemáticos empleados por el alumno en su solución. Se les presentó un análisis de los objetos y procesos matemáticos que el alumno activó al resolver el problema planteado y luego de ello, se volvieron a evaluar las competencias matemáticas del alumno. Se presentó de esta manera las herramientas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), configuraciones y una tipificación de los procesos matemáticos (y didácticos), correspondientes al segundo nivel de análisis: identificación de objetos y procesos matemáticos.

Se muestra a continuación una reproducción de la solución de un alumno al problema adaptado de PISA 2003, que les fue proporcionada a los profesores asistentes al taller (ver material 5) y una configuración cognitiva, correspondiente a la solución del problema “*Carpintero*” (*adaptado*), elaborada por el alumno.



CARPINTERO (Solución del alumno)

Los diferentes parterres (A, B, C, D) que podrían ser tapiados con 32m. de madera:

A: Primero he calculado ~~el área~~ el perímetro del rectángulo principal (4.2+10.2), ya que aunque esta figura tiene elevaciones, las líneas horizontales acaban de completar el rectángulo interior.

Después he sumado los cuatro metros de franja verticales, responsables de la "descomposición" del rectángulo $28+4=32\text{m}$.

B: En este no sería posible ya que faltarían los cálculos de la diagonal, esto sería más metros de los que tocaba para

$$\text{tapiar } \sqrt{6^2 + 4^2} = 8,4\text{m } 7,2\text{m}.$$

Los ~~8,4~~ 7,2m sumados a los 10 de longitud que ya dicen ~~37~~ $(7,2.2+10.2)$ 34m

- C: Aquí voy a aplicar el mismo sistema que en la figura A, será en este caso mediante 2 rectángulos diferentes y del más largo tomo y hago la suma de 10m 2 veces y del que falta tomo las verticales los 6m, 32 m.
- D: Es igual a sumar las distancias de los costados (perímetro)
 $6 + 6 + 10 + 10 = 32m$.

CONFIGURACIÓN COGNITIVA

LENGUAJE

Verbal: Perímetro, rectángulo, figura, líneas horizontales, sumar, cuatro, metros, diagonal, verticales, igual, longitud, diferentes, etc.

Simbólico: A, B, C, D, $(4 \cdot 2 + 10 \cdot 2)$, $\sqrt{6^2 + 4^2}$, $=$, $6 + 6 + 10 + 10 = 32m$, etc.

Gráfico: Las mostradas en la solución del alumno.

CONCEPTOS

- Conceptos explícitos: perímetro, rectángulo, longitud de un segmento.
- Conceptos implícitos: polígono.

PROPOSICIONES

- Propiedades implícitas utilizables: la longitud es una magnitud aditiva, invarianza por traslaciones de la longitud de un segmento.

PROCEDIMIENTOS.

- Procedimientos explícitos: descomposición de un polígono en otros polígonos; identificación de longitudes equivalentes; cálculo del perímetro; estimación de longitudes.

ARGUMENTOS

- En cada figura ha descompuesto el perímetro en suma de longitudes, algunas conocidas y otras desconocidas.
- Para las longitudes desconocidas utiliza los conceptos, procedimientos y propiedades anteriores.

Tabla 1. Objetos Matemáticos

Así mismo, se distinguieron algunos de los procesos matemáticos involucrados. Se presentó primero a los participantes los 16 procesos matemáticos que se han identificado en el EOS (idealización, materialización, representación, significación, encapsulación, desencapsulación, personalización, institucionalización, particularización, generalización, algoritmización, enunciación, definición, problematización, argumentación y comunicación). Para la solución de este problema el alumno ha tenido que activar algunos de ellos. Así por ejemplo, tenemos el proceso de idealización al considerar algunas figuras geométricas como los diseños de parterre; el proceso de comunicación al formular sus respuestas; el proceso de representación (ostensiva) al descomponer algunos perímetros, etc.

Por último, se evaluaron siete de las ocho competencias, propuestas por los autores de OCDE/PISA, que el alumno desarrolló al resolver el problema planteado:

- Pensar y razonar, ya que el alumno entiende y utiliza conceptos matemáticos tales como los indicados en la tabla 1: perímetro, longitud, teorema de Pitágoras, etc.
- Argumentar, puesto que el alumno crea y expresa argumentos matemáticos como: en cada figura ha descompuesto el perímetro en suma de longitudes, algunas conocidas y otras desconocidas; para las longitudes desconocidas emplea los conceptos, procedimientos y propiedades anteriores para dar un argumento válido para cada una de las figuras.
- Comunicar, al expresarse en forma escrita sobre temas de contenidos matemáticos y al entender enunciados de otras personas en forma escrita y responder satisfactoriamente al problema.
- Plantear y resolver problemas, resolviendo el problema matemático haciendo uso de diversas vías: ha resuelto cuatro situaciones diferentes utilizando una vía específica para cada caso.

- Representar, al decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, pues ha sabido interpretar los esquemas de las figuras y sus medidas y al escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito, ya que en el proceso de resolución ha producido representaciones propias y adecuadas para los objetos auxiliares.
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, al manejar enunciados y expresiones que contienen símbolos y fórmulas, puesto que ha usado el simbolismo matemático en el cálculo del perímetro y del teorema de Pitágoras.

En la última sesión, se les entregó a los profesores participantes los problemas PISA 2003 “Chatear” y “Niveles de CO_2 ”, de los cuales por cuestiones de tiempo solo pudieron trabajar el primero de ellos. Primero, después de formar grupos de tres, debieron resolver el problema. A continuación, luego de indicar las respuestas correctas, se hizo un intercambio de soluciones entre los grupos de los profesores participantes, para finalmente evaluar las competencias matemáticas desarrolladas por los profesores. Esta vez haciendo uso de las herramientas EOS.

5. Reflexiones

Como dijimos en la introducción de este artículo, nuestra intención no fue la de dar una definición de competencias. Es evidente que no hay una definición exacta y que lo más cercano que los profesores entienden por competencias matemáticas son conocimientos y capacidades que los alumnos deben desarrollar. Pero olvidan u omiten que éstas no se podrán desarrollar si no hay un contexto.

Sobre las competencias matemáticas, que proponen los autores de OCDE/PISA, una gran mayoría de los participantes ha oído hablar sobre ellas, pero no pudo identificar ninguna de las ocho que proponen los autores de OCDE/PISA. Menos aún cómo es que se evalúan estas competencias.

Se reflexionó durante este taller sobre el hecho de que tener una lista de competencias es una herramienta útil pero no suficiente para evaluar competencias matemáticas de los alumnos. Es necesaria la aplicación de otras herramientas metodológicas y de conocimientos matemáticos sólidos para evaluarlas. El análisis de los objetos matemáticos (configuraciones de objetos) ayudó de cierta manera a evaluar las competencias matemáticas, así como el manejo de los procesos tipificados por el EOS. Aunque estos últimos, requieren de tiempo para su aprehensión y su aplicación.

Así mismo se hizo notar la importancia de tener en cuenta la buena formulación de los problemas y un contexto adecuado, ya que, como en el caso del problema del “carpintero” hubo ciertas dificultades iniciales por el lenguaje utilizado: parterres, tapiados.

6. Referencias

D'Amore, B., Font, V.; Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 28(2), 49-77.

Font, V.; Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. & Contreras, A. (2008). From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes in L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (eds.), *Semiotics in Math Education: Epistemology, Historicity, and Culture*. Sense Publishers: The Netherlands.

Font, V.; Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.

Font, V. (2008). Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. En C. Gaita (ed.), *Actas del III Coloquio*

Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (21-62). Pontificia Universidad Católica del Perú: Lima.

Godino, J. D.; Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D.; Contreras, A.; Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.

Godino, J. D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R. (2006), Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 131-155.

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.

Godino, J. D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R.; Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico, *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76.

Gil, G. (1998). *El proyecto Internacional para la Producción de Indicadores de Resultados Educativos de los Alumnos (Proyecto Pisa) de la OCDE*. Madrid: Instituto Nacional de la Calidad y Evaluación.

INSTITUTO NACIONAL DE EVALUACIÓN Y CALIDAD DEL SISTEMA EDUCATIVO (2004). *Marcos Teóricos de Pisa 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas /OCDE*. Madrid: MEC.

INSTITUTO NACIONAL DE EVALUACIÓN Y CALIDAD DEL SISTEMA EDUCATIVO (2005). *Pisa 2003, Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*, Madrid: MEC.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla, España: SAEM Thales y National Council of Teachers of Mathematics.