De la geometría plana a la geometría del espacio

Teódulo Verástegui Chuquillanqui*

Resumen

Se extienden los conceptos de posiciones relativas de dos rectas en un plano a las de una recta y un plano y de dos planos. Esto permite diferenciar los conceptos de rectas o planos secantes o paralelos. Más adelante, se trabaja con la perpendicularidad de rectas y de recta y plano, relacionando con situaciones reales y para aplicar en la proyección ortogonal de una figura sobre un plano.

También el concepto de ángulo en un plano se extiende a ángulo diedro y su medición, planos perpendiculares; y, teniendo los ángulos triedros y ángulos poliedros, como en el plano las regiones poligonales, resultan los sólidos limitados por regiones poligonales o poliedros. A través de las redes poligonales en un plano se caracteriza algunas propiedades como la fórmula de Euler y los cinco poliedros regulares.

Pertinencia del tema

El nivel de formación en geometría del espacio con que llegan los estudiantes a la universidad es muy bajo, lo que se manifiesta en las dificultades para bosquejar gráficos que ayudan a visualizar situaciones y comprender el mundo físico.

Esto se evidencia luego en la conceptualización y aplicación de propiedades de la geometría plana o saberes previos para la geometría del espacio, dentro de la estructuración del razonamiento lógico que la matemática utiliza.

* Pontificia Universidad Católica del Perú

Por ello, en esta presentación, a partir de situaciones empíricas y apoyándonos en la intuición y la heurística de la teoría de conjuntos, se desarrollarán temas de la geometría del espacio como extensión de conceptos de la geometría plana.

Marco teórico

1. **Paralelismo de Rectas y Planos**

En el espacio **E**:

A) Dos rectas L_1 y L_2, cumplen una y sólo una de:
$L_1 = L_2$ ó $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ ó $L_1 \cap L_2 = \{ P\}$.

i) Si $L_1 \cap L_2 = \{P\}$, L_1 y L_2 son ***rectas secantes*** en P y definen un único plano π.

ii) Si $L_1 = L_2$ ó $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, con L_1 y L_2 contenidas en un plano π, las rectas L_1 y L_2 son ***rectas paralelas***; y se denota: $L_1 // L_2$.

iii) Si $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, pero no hay plano alguno que contenga ambas rectas L_1 y L_2, L_1 y L_2 son ***rectas que se cruzan*** o ***rectas alabeadas***.

B) Para una recta L y un plano π, se cumple una y sólo una de las condiciones: $L \subset \pi$, ó $L \cap \pi = \varnothing$ ó $L \cap \pi = \{P\}$.

De esto se tiene: Si $L \subset \pi$ ó $L \cap \pi = \varnothing$, se dice que L y π son ***paralelos***; es decir, L está contenida en π ó L y π son disjuntos, y se denota: $L // \pi$; y, si $L \cap \pi = \{P\}$, se dice que L y π son ***secantes*** en P, es decir, L y π tienen un único punto común P ó L y π se interceptan en el único punto P.

C) Para dos rectas π_1 y π_2, se cumplen una y solamente una de: $\pi_1 = \pi_2$ ó $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ ó $\pi_1 \cap \pi_2 = L$, una recta.

De esto: Si $\pi_1 = \pi_2$ ó $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, se dice que los planos π_1 y π_2 son ***planos paralelos***, y se denota $\pi_1 // \pi_2$; en cambio, si $\pi_1 \cap \pi_2 = L$, se dice que los planos son ***planos secantes*** en L.

2. Perpendicularidad de Rectas y Planos

En el espacio **E**, se dice que una recta L y un plano π son ***perpendiculares*** u ***ortogonales*** en el punto P, si L y π son ***secantes*** en el punto P y L es ***perpendicular*** u ***ortogonal*** con cada recta L_P que pasa por P y contenida en π. Se denota $L \perp \pi$,
Luego: $L \perp \pi \Leftrightarrow L \cap \pi = \{P\}$ y $L \perp L_P$, para cada recta L_P que pasa por P y $L_P \subset \pi$.

De esto: Para que una recta L secante al plano π en el punto P sean perpendiculares, es suficiente que dos rectas $L_1 \subset \pi$ y $L_2 \subset \pi$ y que pasan por P, cumplen $L \perp L_1$ y $L \perp L_2$.
Además se tiene:

- Dado el plano π, por $P \in \pi$ pasa únicamente una recta L tal que $L \perp \pi$; y por $Q \notin \pi$ pasa únicamente una recta L' tal que $L' \perp \pi$.
- Dada la recta L, por $P \in L$ pasa únicamente un plano π tal que $\pi \perp L$; y por $Q \notin L$, pasa únicamente un plano π' tal que $\pi' \perp L$.
- Dados un punto P, un plano π y L la única recta que pasa por P y $L \perp \pi$ en Q. Se dice que el punto Q es ***pie de perpendicular*** o es la ***proyección ortogonal*** de P sobre π. Se denota $Q = \text{Proy}_\pi(P)$.
  Además, $d(P, Q) = d(P, \pi)$ es la ***distancia*** del punto P al plano π
- Dados un plano π y una figura F en el espacio **E**, la ***proyección ortogonal*** de F ***sobre*** π es la figura F', donde $F' = \{Q \mid Q \in \pi$ y $Q = \text{Proy}_\pi(P)$, para cada $P \in F\}$. Se denota $F' = \text{Proy}_\pi(F)$.

3. Ángulos Diedros y Perpendicularidad de Planos

Dados dos planos π_1 y π_2, secantes en L, o sea $\pi_1 \cap \pi_2 = L$, sean S_1 un semiplano de π_1 con borde L y S_2 un semiplano de π_2 con borde L; al conjunto $S_1 \cup S_2 \cup L$ se llama un ***ángulo diedro*** de ***arista*** L y ***caras*** S_1 y S_2, y se denota $S_1–L–S_2$.
Además:

- Si S_1–L–S_2 es un ángulo diedro de arista L y caras S_1 y S_2 y π es un plano con $L \perp \pi$ en P y que intercepta a las caras S_1 y S_2 en rayos PA y PB, respectivamente. El ángulo APB se llama ***ángulo plano*** de S_1–L–S_2 definido por π.

- Dos ángulos planos de un ángulo diedro son congruentes; es decir, dados el ángulo diedro S_1–L–S_2 y los planos π_1 y π_2 tales que $\pi_1 \perp L$ en P y $\pi_2 \perp L$ en Q, $\pi_1 \cap S_1 = PA$, $\pi_1 \cap S_2 = PB$, $\pi_2 \cap S_1 = QC$, $\pi_2 \cap S_2 = QD$; entonces los ángulos APB y CQD son congruentes, esto es, sus medidas son iguales.

  De esto:

  i) La ***medida del ángulo diedro*** S_1–L–S_2 es la medida del ***ángulo plano*** APB; es decir, $m(S_1–L–S_2) = m(APB)$.

  ii) Dos planos π_1 y π_2, son ***perpendiculares*** si al interceptarse forman un ***ángulo diedro recto***; es decir, forman un ángulo diedro de medida 90^o. Se denota: $\pi_1 \perp \pi_2$.

4. Ángulo Triedro y Ángulo Poliedro

Dados tres planos π_1, π_2 y π_3 en el espacio **E,** que se interceptan dos a dos en sendas rectas no coplanarios: $\pi_1 \cap \pi_2 = L_1$, $\pi_2 \cap \pi_3 = L_2$, $\pi_3 \cap \pi_1 = L_3$ y $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{V\}$. Sean los rayos $R_1 = VA$, $R_2 = VB$ y $R_3 = VC$, de origen V y los puntos A en L_1, B en L_2 y C en L_3, respectivamente. Se tienen los **sectores angulares** que definen los ángulos AVB, BVC y CVA. La unión de los tres sectores angulares se llama un ***ángulo triedro*** de ***vértice*** V, de ***aristas*** R_1, R_2 y R_3 y de ***caras*** los tres sectores angulares. Se denota: $V–ABC$

Generalizando: Si $R_1 = VA_1$, $R_2 = VA_2$, $R_3 = VA_3$, ……. , $R_n = VA_n$, para $n \geq 3$, son rayos no coplanarios tres a tres consecutivos de origen V y que pasan por A_i en L_i. La unión de los n sectores angulares que determinan los ángulos A_1VA_2, A_2VA_3, A_3VA_4, ….. , A_nVA_1, se llama ***ángulo poliedro*** de ***vértice*** V, ***aristas*** R_1, R_2, R_3, ……. , R_n y ***caras*** los sectores angulares. Se denota: $V– A_1A_2A_3……A_n$.

5. Poliedros

En la geometría del espacio se tienen los ***poliedros***, figuras formadas por varias caras (regiones poligonales), y se descomponen como uniones de otras en su forma más simple: el ***tetraedro***, que resulta de:

- Interceptar un ángulo triedro $V - ABC$ con un plano π;
- Trazar tres segmentos de rectas de un punto V a los vértices de un triángulo ABC; o
- Unir cuatro triángulos ABC, ABV, ACV y BCV, dos a dos no coplanarios y con lados comunes.

Referencias

Clemens, S. R., O'Daffer, P. y Cooney, T. (1989). Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas. Delaware, E. U. A. Addison–Wesley Iberoamericana, S. A.

Coxeter, H.S.M. (1971). Fundamentos de Geometría. México, D. F. Centro Regional de Ayuda Técnica, AID. Editorial Limusa–Wiley, S. A.

Greenberg, M. (1993). Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History. New York, USA. W. H. Freeman and Company

Merklen, H. (1964). Geometría. Lima, Perú. Instituto para la Promoción de la Enseñanza de la matemática.

Moise, E. E. (1968).Elementos de Geometría Superior. México, D. F. Compasñía Editorial Continental, S. A.

Repetto, C. H., Linskens, M. E. y Fesquet, H. B. (1964). Buenos Aires, Argentina. Editorial Kapeluz, S.A.