Didáctica de las Matemáticas para profesores. Las fracciones: un caso práctico

Miguel R. Wilhelmi*

Resumen

La didáctica de las matemáticas (DM) como disciplina científica tiene en la actualidad un gran auge, como lo corrobora la gran cantidad de publicaciones de investigación y la estabilidad de congresos internacionales. Muchos de los trabajos son descriptivos o prospectivos del funcionamiento de los sistemas didácticos. Se advierte entonces un desfase entre las necesidades profesionales de indicaciones o sugerencias prescriptivas y las producciones de los grupos de investigación. Urge, por lo tanto, determinar qué didáctica de las matemáticas es útil para la actividad profesional, esto es, es un instrumento útil para la valoración, y en su caso la mejora, de procesos de estudio matemático efectivos.

Palabras clave: didáctica normativa, error, obstáculo, idoneidad didáctica, indicadores, fracciones.

1. Ingeniería Didáctica e Idoneidad Didáctica

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) tiene un doble objetivo: uno, la *intervención crítica* en los sistemas didácticos (los saberes didácticos fundamentados científicamente acotan la acción); otro, la *prueba de la contingencia* (contraste de las propuestas teóricas elaboradas). De esta forma, la ingeniería didáctica

* Universidad Pública de Navarra-España.

pretende controlar *a priori* la puesta en escena de proyectos de enseñanza. En una segunda fase, llamada análisis *a posteriori*, el análisis *a priori* se compara con la realización efectiva y se busca lo que rechaza o confirma las hipótesis sobre las cuales está basado. Esta comparación se realiza distinguiendo tres dimensiones (cognitiva, epistémica e instruccional) y, por supuesto, teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

La intención última de la investigación didáctica es encontrar dispositivos "óptimos" para la enseñanza y el aprendizaje de nociones, procesos y significados de objetos matemáticos, teniendo en cuenta las restricciones institucionales de las dimensiones cognitiva, epistémica e instruccional. La ingeniería didáctica articula el papel de las producciones de los investigadores con las necesidades de acción en los procesos de enseñanza, permitiendo la evolución de una didáctica explicativa hacia una didáctica normativa o técnica (apoyada en una teoría y contrastada experimentalmente). Esta evolución es compleja y costosa, por supuesto. Pero además, la aplicación de los productos técnicos está mediatizada por la formación matemática y didáctica de los profesores, que en última instancia deben controlar su funcionamiento.

El Enfoque Ontológico y Semiótico para el conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) establece diversas dimensiones para la valoración de la idoneidad de los procesos de estudio de las matemáticas (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005, 2–3) estructuran el análisis de la idoneidad didáctica según las tres dimensiones coherentes con la ingeniería didáctica:

1. *Idoneidad epistémica*: adaptación entre los significados institucionales implementado y de referencia, que, en particular, supondría la

elaboración de una transposición didáctica *viable* (capaz de adaptar el significado implementado al pretendido) y *pertinente* (capaz de adaptar el significado pretendido al de referencia).

2. *Idoneidad cognitiva*: el "material de aprendizaje" está en la *zona de desarrollo potencial* (Vygotski, 1934) de los alumnos; con otras palabras, que el desfase entre los significados institucionales implementados y los significados personales iniciales sea el máximo abordable teniendo en cuenta las restricciones cognitivas de los alumnos y los recursos materiales y temporales disponibles.

3. *Idoneidad instruccional*: capacidad de las configuraciones y trayectorias didácticas para que el profesor o los alumnos identifiquen conflictos semióticos *potenciales* (*a priori*), *efectivos* (durante el proceso de instrucción) y *residuales* (*a posteriori*), para resolver dichos conflictos mediante la *negociación de significados* (utilizando los recursos materiales y de tiempo disponibles).

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia o adecuación al proyecto de enseñanza de un proceso de instrucción. Los indicadores empíricos de esta idoneidad didáctica son la adaptación entre:

1. Los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos o planificados y evaluados.

2. Los significados institucionales de referencia y los procesos de interacción y negociación de significados, incluyendo los recursos materiales y temporales utilizados.

3. Las intervenciones del profesor y de los estudiantes (trayectorias docente y discente) en los procesos de construcción y comunicación de conocimiento matemático, que determinan el reparto de responsabilidades entre ellos.

En la figura 1 sintetizamos los componentes de la noción *idoneidad didáctica* de un proceso de estudio matemático. La idoneidad didáctica supone la articulación coherente y armónica de las tres idoneidades parciales (epistémica, cognitiva e instruccional) y de los procesos que determinan las relaciones entre ellas (construcción-comunicación de conocimientos, interacción-negociación de significados, planificación-evaluación de saberes). Representamos mediante un triángulo equilátero la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o programado, donde *a priori* se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas y a la coherencia de los procesos desarrollados con el proyecto de enseñanza.

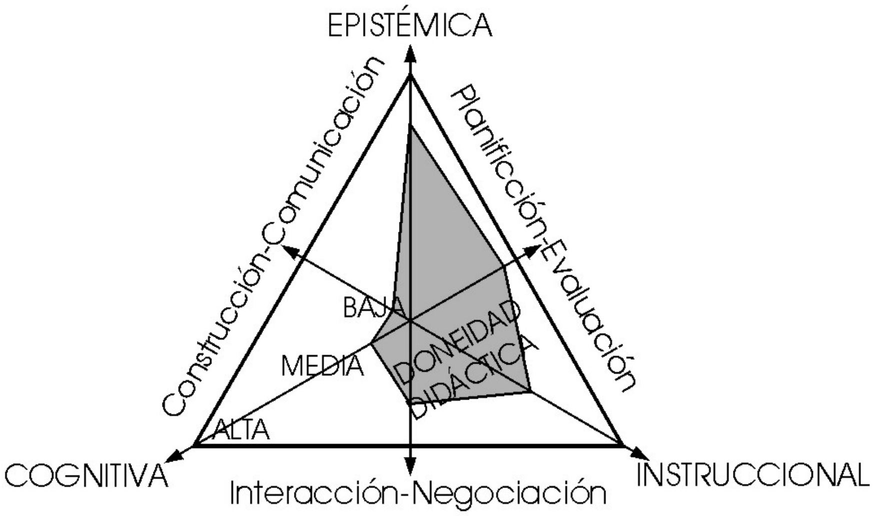


Figura 1. Componentes de la idoneidad didáctica

2. El Lugar del Error en la Actividad Matemática

El DRAE (http://www.rae.es) distingue entre “verdad, certeza, acierto y éxito”, oponiendo su significado, respectivamente, a “falsedad, duda, error y fracaso”. En el anexo I se dan las acepciones de dichos términos con relación con los términos “conocimiento, saber, sentido y significado”. Estas definiciones permiten afirmar que los términos no se pueden entender de manera aislada y que conforman una, valga la redundancia, red de significados, que excede la relación de antonimia señalada.

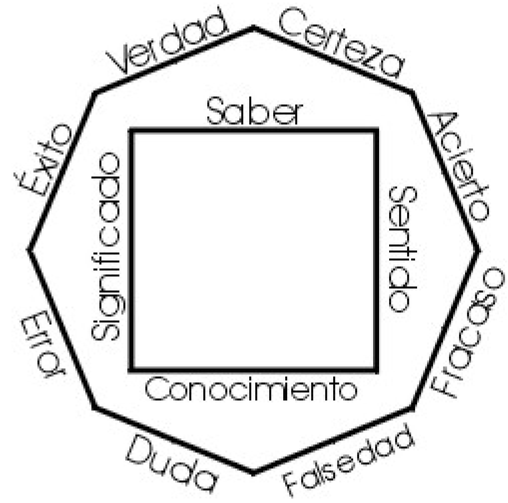


Figura 2. El lugar del error en la actividad matemática

En la figura 2 se pueden observar todos estos términos. En el octógono externo, hay una relación dual entre los términos de lados opuestos. Sobre los términos superiores (éxito, verdad, certeza y acierto) se tiene una connotación positiva, mientras que sobre los inferiores (error, duda, falsedad y fracaso) la connotación es negativa. Los términos en lados opuestos del cuadrado interno tienen también una relación dual. El conocimiento es el conjunto de reglas que permite a un sujeto decidir y adaptar sus estrategias en una situación determinada, mientras que los saberes son los conocimientos compartidos en una institución para la descripción y resolución de dicha situación y a los cuales se les atribuye un valor cultural. El sentido es un significado parcial atribuido a un objeto matemático dentro de una situación (extensivo), mientras que el significado es la interpretación genérica del sentido y, por lo tanto, supone una descontextualización expresa del mismo (intensivo).

Desde el punto de vista matemático, tan importante es determinar si una propiedad es verdadera como si es falsa: lo esencial es la certidumbre sobre el valor de verdad (verdadero o falso) de una proposición, no cuál es este valor. Por ello, más allá de la semántica de los términos en el lenguaje natural, es preciso señalar la estrecha relación entre dichos términos en los procesos de estudio de las matemáticas. Tanto a una proposición verdadera como a una proposición falsa, un individuo puede atribuirles un valor de verdad (verdadero-falso) acorde o no a su naturaleza, según si las justificaciones estén o no correctamente establecidas con base en los axiomas de la teoría y en las proposiciones previamente demostradas. Aún más, atribuido el valor de verdad, un individuo puede asignarle un valor de certidumbre (certeza-duda) acorde o no a la naturaleza de la prueba y, por lo tanto, aceptar un error como acierto o viceversa. Asimismo, puede no disponer de conocimientos para valorar su juicio y, simplemente, desconocer si sus argumentos le conducen al fracaso o al éxito.

Las situaciones de fracaso bloquean los procesos de construcción y comunicación de conocimientos matemáticos puesto que los sujetos no son capaces por sí mismos de valorar su actividad. La responsabilidad entonces recae sobre el profesor, que debe buscar los medios para *devolver* el problema al alumno. Pero aún aceptado que las intervenciones del profesor son adecuadas, los alumnos cometerán errores. Aún más, es falsa la premisa según la cual se reconoce al buen docente por su capacidad para hacer avanzar el conocimiento de sus alumnos sin errores o digresiones. Por definición, toda situación de aprendizaje supone un reto intelectual sujeto a fracasos y errores. Es labor del profesor determinar una situación que permita al alumno la interacción sostenida y los medios para valorar el resultado de sus acciones. Esto es, situaciones donde el error tenga carta de ciudadanía y el fracaso sea sólo un indicador de una decisión docente desafortunada. Por ello, desde un punto ideal, supuestas unas decisiones siempre adecuadas por el profesor, es el error el objeto prioritario de análisis. Es preciso distinguir entre:

1 *Errores anecdóticos*. Grupos equiparables de sujetos no utilizan de manera equiparable e inapropiada un objeto matemático ni le atribuyen un mismo sentido inadecuado. Se trata de realizaciones puntuales e individuales sin reflejo directo en cómo un sujeto genérico construye y comunica los conocimientos matemáticos específicos de una noción, un proceso o un significado matemáticos.

2 *Errores reproducibles*. Grupos equiparables de sujetos utilizan de manera inapropiada un objeto matemático o le atribuyen un sentido inadecuado.

3 *Errores recurrentes*. Error reproducible cuyo uso o sentido tiene una presencia longitudinal en la actividad matemática de los sujetos, siendo insuficiente la mostración explícita del conocimiento matemático verdadero para su uso estable por los sujetos.

4 *Obstáculos*: Error recurrente para el cual se dispone de una justificación de su origen, fundamento y naturaleza (cognitiva, epistemológica o instruccional).

El obstáculo es un conocimiento que tiene un campo de éxito restringido, que no es útil en una determinada situación o para resolver un problema concreto, que ocupa el sitio de un conocimiento que sí es pertinente para la situación o el problema y que no basta con enseñar este conocimiento correcto para sustituir el conocimiento anterior por este nuevo.

En la figura 3 se muestra un esquema con todos los tipos de errores.

$$\begin{cases} \text{Error}\begin{cases}\text{No anecdótico}\begin{cases}\text{Reproducible}\begin{cases}\text{Recurrente}\rightarrow\text{Obstáculo}\\ \text{No recurrente}\end{cases}\\ \text{No reproducible}\end{cases}\\ \text{Anecdótico}\end{cases}\\ \text{Fracaso}\end{cases}$$

Figura 3. Tipos de errores

3. Una Unidad Didáctica para la Enseñanza de las Fracciones

En esta sección describiremos un proceso de estudio para la enseñanza de las fracciones en una aula de 4º de primaria (9–10 años). El proceso consta de 4 sesiones de una hora, la última de las cuales está destinada a la evaluación de los aprendizajes. En la sección 3.1 hacemos una breve descripción de la unidad didáctica para la enseñanza de las fracciones del libro de texto utilizado (Anaya, 2006, 136–141). A continuación, en la sección 3.2, describimos someramente las decisiones de la maestra para la determinación de las sesiones. Terminamos analizando algunas de las respuestas de los alumnos al cuestionario de evaluación propuesto (sección 3.3).

3.1. El libro de texto

Las situaciones introductorias propuestas en el libro pueden ser comprendidas sin la noción de fracción. En la figura 4 mostramos dos problemas propuestos en las 2 primeras páginas. El primero de ellos se puede resolver diciendo: “la niña ha comido 3 pastillas de chocolate y el niño 4, por lo tanto él ha comido más”. Es totalmente innecesario decir que la niña ha comido 3/8 de tableta y el niño 4/8 y que, por lo tanto, puesto que las fracciones tienen denominador común y 3 es menor que 4, él ha comido más. En el segundo problema, es preciso conocer que la mitad de 16 es 8 o que, análogamente, 16 divido por 2 es 8, pero no es en absoluto necesario escribir la identidad 16/2 = 8; por último, para la determinación del precio de la tarta sólo hay que mirar el dibujo e identificar cuál es la tarta…

“¿Qué cantidad de chocolate ha comido cada uno? ¿Quién de los dos ha comido más cantidad?” (Anaya, 2006, 136)

“¿Cuánto ha pagado la señora Sáez por medio kilo de bombones? ¿Cuánto cuesta media tarta de chocolate? ¿Y la tarta entera de fresa?”(Anaya, 2006, 137)

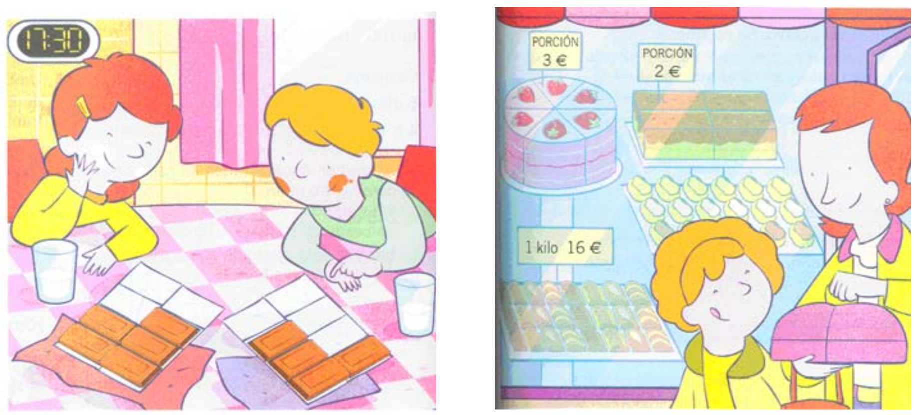


Figura 4. Problemas introductorios

En la figura 5 se puede ver la introducción ostensiva de fracción, “motivada” por las situaciones introductorias de las páginas anteriores. Se introduce la escritura y lectura y la denominación de los términos con la intención de utilizar éstos en los siguientes apartados.

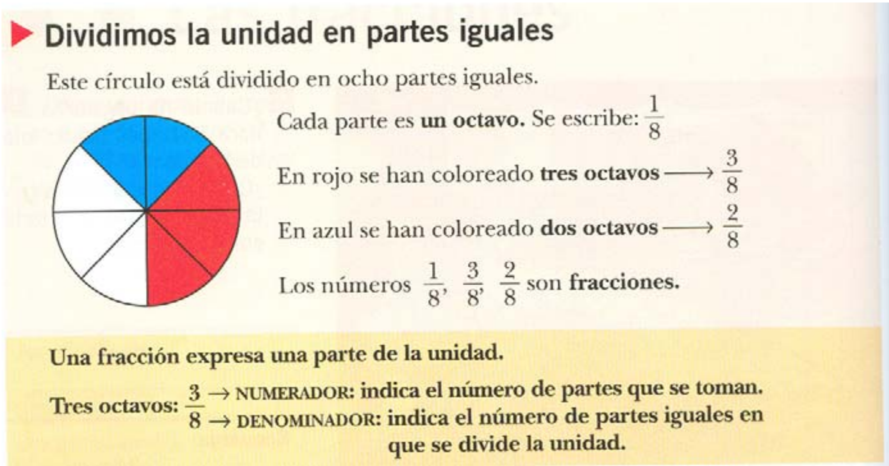


Figura 5. Introducción formal de una fracción: términos y lectura (Anaya, 2006, 138)

En la página siguiente se introduce la noción de orden en **Q**+, también de manera ostensiva. El problema que le sigue (figura 6) es similar al problema introductorio sobre las tabletas de chocolate, pero esta vez se comparan dos pizzas. Tampoco aquí es necesaria la noción de fracción. De hecho, en dicha figura, el razonamiento que se muestra a la derecha es totalmente "excesivo".

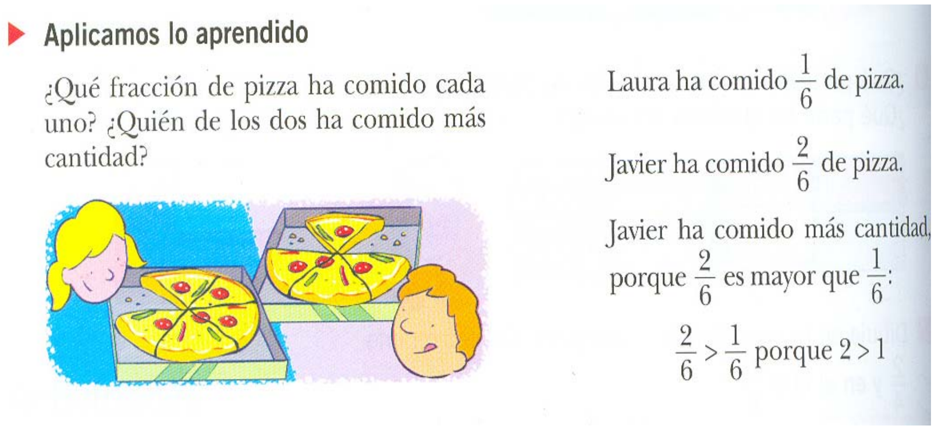


Figura 6. Aplicación del orden en **Q**+ en una situación concreta (Anaya, 2006, 139)

El capítulo se completa con otros ejercicios similares, en los que la mera observación es en muchos casos suficiente para la determinación de la solución.

3.2. Las decisiones de la maestra

Godino, Font y Wilhelmi (2006) proponen un instrumento de análisis de lecciones de libros de texto, concientes de que las restricciones institucionales obligan a los maestros a trabajar forzosa y explícitamente con el libro de texto. Este es el caso del proceso de estudio observado. De esta manera, se elaboraron fichas de trabajo para la introducción de las nociones, procesos y significados asociados a la noción de fracción y se utilizó el libro para rutinizar técnicas y procedimientos.

Las decisiones de la maestra, toda vez analizado el libro de texto, fueron encaminadas a tres aspectos clave: la noción de fracción de la unidad (partes alícuotas y su representación), la necesidad de números fraccionarios para la interpretación de una situación y la determinación de numerador y denominador como paso previo a la comparación de fracciones. En la figura 7 se muestran tres situaciones utilizadas por la maestra que tienen en cuenta estos aspectos.

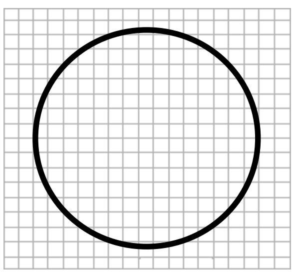
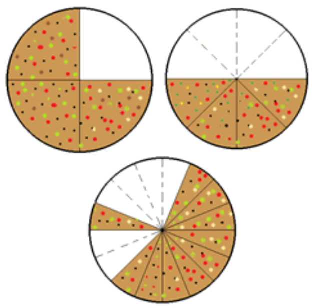
La madre de Ana ha preparado una deliciosa tarta para 8 niños. ¿Cómo tiene que partir la tarta para que cada uno coma la misma cantidad?	Tienes que repartir 36 donuts entre los 8 niños ¿cuántos le tocará a cada niño?	¿Quién ha comido más pizza?
		

Figura 7. Decisiones de la maestra

En concreto, las decisiones de la maestra buscaron proponer actividades en las que la simple observación no fuera suficiente y, en particular, que no pudiera resumirse la información con un solo número. En el problema de las pizzas, por ejemplo, no basta decir cuántos trozos de pizzas se han comido (1, 4 y 6) sino también cómo son esos trozos: 2 de la última pizza son del tamaño de 1 de la segunda y 2 de ésta como 1 de la primera. De esta forma, en la comparación es necesario decir: 1 de 4, 4 de 8, 6 de 16… ¡Y además que todas las pizzas son del mismo tamaño!

3.3. Comportamientos de los alumnos

Terminado el proceso de estudio los alumnos realizaron un cuestionario, que servía como evaluación de la unidad didáctica (anexo II). Analizaremos aquí las respuestas a las preguntas 1, 2 y 5. Las respuestas de los alumnos a las dos primeras se presume *a priori* que van a ir relacionadas, de tal manera que los alumnos que contesten bien a la primera también lo harán a la segunda, siendo minoritario en el grupo de alumnos que hagan bien una de ellas y no la otra.

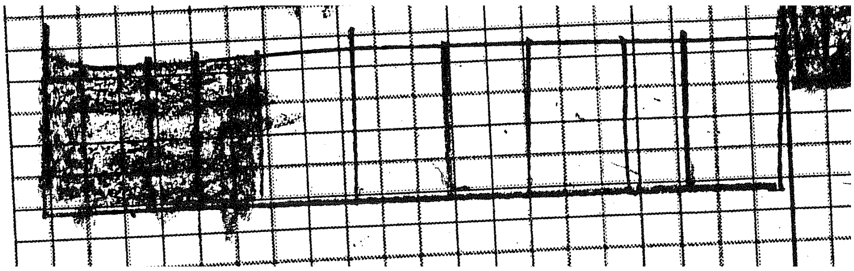


Figura 8. Representación gráfica de un alumno de la fracción 3/9

El problema es qué se entiende por "bien" o, con otras palabras, cuándo una respuesta se admitirá como correcta y cuándo como incorrecta. En la figura 8 se presenta la representación de un alumno de la fracción 3/9, donde se puede observar que selecciona 3 partes de 9 no equiparables. La valoración de esta respuesta puede seguir esencialmente dos criterios: uno, valorar como correcta la respuesta, aceptando que se ha partido en 9 trozos y se han seleccionado 3; dos, valorar la respuesta como incorrecta, puesto que los trozos no son equiparables. La práctica docente se inclina generalmente por la primera opción, aceptando implícitamente el aforismo: “la Geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas”.

Sin embargo, el análisis de las respuestas a la pregunta 5 del cuestionario revela que no es consistente sostener que los alumnos que en su representación retienen únicamente el número de partes han adquirido la noción de fracción. Son aquellos alumnos que han establecido una relación más estrecha entre la fracción y su representación gráfica (cómo son las partes y cómo se construyen) los que han tenido éxito en otras tareas más complejas como la pregunta 5.

Las respuestas a la pregunta 5 permiten observar que alrededor de un 50% de los alumnos o bien prescinde de los denominadores de las fracciones y compara únicamente los numeradores (figura 9a) o bien establece un orden parcial de las fracciones excluyendo los números naturales (figura 9b).

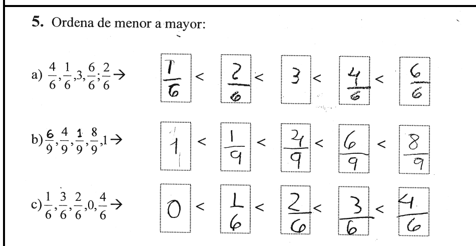
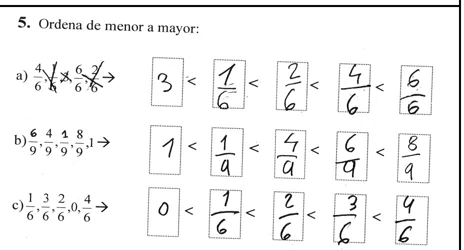
a. Comparación de numeradores	b. Orden parcial
	

Figura 9. Orden de fracciones y números naturales

El análisis hecho sobre la pregunta 5, exige reevaluar las preguntas 1 y 2, concluyendo que 11 alumnos han realizado correctamente el ejercicio 2; 2 han tenido un único error; 3, dos errores; y, por último, 6 no han realizado ninguna de las representaciones de manera adecuada (incluyendo representaciones como la mostrada en la figura 8). ¿Son estas respuestas "decepcionantes"? En la siguiente sección daremos una respuesta a esta pregunta.

Por otro lado, las respuestas a la pregunta 2 no apartan información para la discriminación de los conocimientos de los alumnos: todos, excepto 1, tachan las dos figuras que no representan ¼ y, por lo tanto, no se cumple la hipótesis de que las respuestas a las preguntas 1 y 2 están corelacionadas.

4. Dimensión Axiológica

Como hemos dicho al principio del trabajo, la didáctica de las matemáticas debe evolucionar hacia la obtención de pautas o criterios para la mejora del funcionamiento de los sistemas didácticos. Los criterios de "idoneidad" permiten valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora. Se trata una meta-acción (la valoración) que recae sobre acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción). Esto supone la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc.

El análisis hecho sobre el libro de texto nos permite afirmar que en éste la idoneidad epistémica era baja, por cuando las situaciones introducidas no precisaban de la noción que quería ser introducida. Las decisiones de la maestra han contribuido a mejorar dicha idoneidad. Las fichas para la introducción de la noción de fracción y las situaciones propuestas precisaban en su resolución de la noción de fracción: la observación directa no era ya suficiente, se precisaba una pareja de números ordenados, la representación gráfica de una fracción imponía la necesidad de determinar tanto el número de partes como el tamaño de las mismas, etc.

La negociación de significados no se ha dado en el plano de la autoridad, sino del conocimiento y de la función de las fracciones en las situaciones propuestas. De hecho, las pautas de resolución de conflictos cognitivos previstas por la maestra *a priori* le han servido para realizar una gestión de la clase coherente con el significado institucional de referencia y le han permitido un reparto de responsabilidad adecuado con los alumnos. De esta forma, la idoneidad instruccional la valoramos también como alta.

Por último, las interpretaciones, argumentos y lenguaje de los alumnos en la resolución de problemas permiten afirmar que la idoneidad cognitiva también es alta. Los alumnos tenían conocimientos para afrontar las tareas y valorar sus acciones (*feed-back* inteligible), así como para comunicarse entre ellos ideas y procedimientos. Un indicador empírico de la idoneidad cognitiva es la realización exitosa por los estudiantes de tareas más complejas que las propuestas en el libro de texto, aportando, en particular, relaciones entre los números naturales y los fraccionarios.

En conclusión, la idoneidad didáctica del proceso es alta. Sin embargo, ¿cómo explicar los numerosos errores de los alumnos? Lacasta, Sáenz de Cabezón y Wilhelmi (2007) analizan los comportamientos de alumnos de primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (12–14 años), identificando errores operatorios asociados al cálculo y al significado de la noción de fracción. Es decir, después de tres años, las dificultades persisten.

El conocimiento y uso de los números naturales es obstáculo en el aprendizaje de los números racionales positivos $\mathbf{Q}^+$, en particular, de su representación en forma de fracción. Este hecho es inevitable. Todo proceso de estudio irremediablemente tendrá que sobrepasar este obstáculo. La única forma es la proposición sistemática de situaciones a los alumnos, que faciliten la adquisición paulatina de los conocimientos.

Este hecho hace que la valoración de la evaluación no pueda hacerse en términos dicotómicos bueno-malo, éxito-fracaso, por cuanto la identificación de un obstáculo indica que, sin distingos "en el arte de enseñar" se identifiquen en grupos equiparables los mismos errores. Con otras palabras, *a priori* el profesor espera que sus alumnos comentan errores porque estos son consustanciales al proceso de estudio en el que los ha inmerso. ¿Es entonces lícita la evaluación sumativa y, en su caso, con efectos punitivos? No. En particular las respuestas del cuestionario no son decepcionantes, sino *previstas*.

Reconocimiento: Esta conferencia se realiza en el marco del proyecto SEJ2007-60110/EDUC.

Referencias

Anaya (2006). *Matemáticas 4, Proyecto Educativo Deja Huella.* Madrid: Autor.

Artigue M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 282–307.

Brousseau G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Lacasta, E., Sáenz de Cabezón A., Wilhelmi M. R. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de las operaciones con fracciones en 1º de ESO. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 223–232.

Lacasta E.; Wilhemi M. R.; Pascual J. R.; Madoz E. G. (2005). Analyse 'a priori' par rapport à une théorie: détermination des observables pour l'analyse des données empiriques. Le cas de la fonction continue en mathématiques. En A. Rouchier, Actes du *Colloque international "Didactique: quelles références épistemologiques?"*. Bordeaux: AFIRSE et IUFM d´Aquitane.

Bencomo D., Godino J. D., Wilhelmi M. R. (2004). Elaboración de redes ontosemióticas de configuraciones didácticas con ATLAS/ti. En A. Cañas, J. Novak & F. González (Eds.), *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology*, pp 71–74.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26 (1), 39–88.

Godino J. D., Font V., Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 131–155.

Godino J. D., Wilhelmi M. R., Bencomo D. (2005). Suitability criteria for a mathematical instruction. A teaching experience with the function notion. *Mediterranean journal for research in mathematics education*, 4(2), 1–26.

Godino J. D., Bencomo D., Font V., Wilhelmi M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221–252.

Vygotski, L.S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, 2ª edición. Barcelona: Crítica-Grijalbo, 1989.

Anexo I. Definición de términos según el DRAE

(http://www.rae.es)

Verdad.	**Falsedad.**
1. f. Conformidad de las cosas con el concepto que de ellas forma la mente. **2.** f. Conformidad de lo que se dice con lo que se siente o se piensa. **3.** f. Propiedad que tiene una cosa de mantenerse siempre la misma sin mutación alguna. **4.** f. Juicio o proposición que no se puede negar racionalmente.	**1.** f. Falta de verdad o autenticidad. **2.** f. Falta de conformidad entre las palabras, las ideas y las cosas. **3.** f. *Der.* Delito consistente en la alteración o simulación de la verdad, con efectos relevantes, hechas en documentos públicos o privados, en monedas, en timbres o en marcas.
Certeza.	**Duda.**
1. f. Conocimiento seguro y claro de algo. **2.** f. Firme adhesión de la mente a algo conocible, sin temor de errar.	**1.** f. Suspensión o indeterminación del ánimo entre dos juicios o dos decisiones, o bien acerca de un hecho o una noticia. **2.** f. Vacilación del ánimo respecto a las creencias religiosas. **3.** f. Cuestión que se propone para ventilarla o resolverla.

Acierto. **1.** m. Acción y efecto de acertar. **2.** m. Habilidad o destreza en lo que se ejecuta. **3.** m. Cordura, prudencia, tino. **4.** m. Coincidencia, casualidad.	**Error.** **1.** m. Concepto equivocado o juicio falso. **2.** m. Acción desacertada o equivocada. **4.** m. *Der.* Vicio del consentimiento causado por equivocación de buena fe, que anula el acto jurídico si afecta a lo esencial de él o de su objeto. **5.** m. *Fís.* y *Mat.* Diferencia entre el valor medido o calculado y el real.
Éxito. **1.** m. Resultado feliz de un negocio, actuación, etc.	**Fracaso.** **1.** m. Malogro, resultado adverso de una empresa o negocio. **2.** m. Suceso lastimoso, inopinado y funesto.
Saber². **1.** m. **sabiduría** (conocimiento profundo en ciencias, letras o artes). **2.** m. Ciencia o facultad.	**Conocimiento.** **1.** m. Acción y efecto de conocer. **2.** m. Entendimiento, inteligencia, razón natural. **9.** m. pl. Noción, ciencia, sabiduría.

Significado.	**Sentido.**
2. m. Significación o sentido de una palabra o de una frase. **4.** m. *Ling.* Contenido semántico de cualquier tipo de signo, condicionado por el sistema y por el contexto.	**4.** m. Entendimiento o razón, en cuanto discierne las cosas. **5.** m. Modo particular de entender algo, o juicio que se hace de ello. **6.** m. Inteligencia o conocimiento con que se ejecutan algunas cosas. *Leer con sentido.* **8.** m. Significación cabal de una proposición o cláusula. *Esta proposición no tiene sentido.* **9.** m. Cada una de las distintas acepciones de las palabras. *Este vocablo tiene varios sentidos.* **10.** m. Cada una de las interpretaciones que puede admitir un escrito, cláusula o proposición. *La Sagrada Escritura tiene varios sentidos.* **11.** m. *Geom.* Cada una de las dos orientaciones opuestas de una misma dirección.

Anexo II. Cuestionario propuesto a los alumnos

4. Escribe en el círculo >, < 0 = según corresponda:

$\frac{6}{12} \bigcirc \frac{9}{12}$ $\frac{8}{9} \bigcirc 1$ $\frac{4}{9} \bigcirc \frac{3}{9}$ $\frac{10}{9} \bigcirc 1$ $\frac{8}{8} \bigcirc \frac{7}{8}$

$1 \bigcirc \frac{15}{15}$ $\frac{5}{7} \bigcirc \frac{7}{7}$ $\frac{12}{10} \bigcirc 1$ $\frac{9}{16} \bigcirc \frac{15}{16}$ $\frac{4}{5} \bigcirc 1$

5. Ordena de menor a mayor:

a) $\frac{4}{6}, \frac{1}{6}, 3, \frac{6}{6}, \frac{2}{6} \rightarrow \square < \square < \square < \square < \square$

b) $\frac{6}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{8}{9}, 1 \rightarrow \square < \square < \square < \square < \square$

c) $\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, 0, \frac{4}{6} \rightarrow \square < \square < \square < \square < \square$

6. En una exposición hay 56 cuadros y se han vendido $\frac{3}{4}$ de ellos.¿Cuántos cuadros de la exposición se han vendido? ¿Cuántos quedan por vender?

7. Teresa ha comprado 120 yogures para su tienda. De los cuales $\frac{5}{8}$ son de fresa, $\frac{2}{8}$ de melocotón y los demás de plátano ¿Cuántos yogures son de fresa? ¿Cuántos de melocotón? ¿Y de plátano?

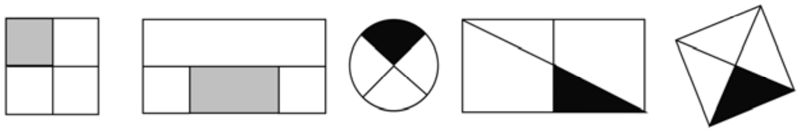
UNIDAD 11 MATEMÁTICAS	EV

Nombre y apellidos: ____

Curso __________________________ Fecha: ____________________

1. Dibuja tres figuras y colorea $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{8}{10}$ de las mismas.

2. Tacha las figuras en las que NO se ha coloreado $\frac{1}{4}$



3. Completa la tabla:

Numerador	Denominador	Fracción	Lectura
5	9		
			Seis doceavos
		$\frac{8}{12}$	
			Once quinceavos
		$\frac{9}{13}$	