Enseñanza de la Estadística mediante configuraciones didácticas diferenciadas

Hugo Alvarado Martínez [1]

Resumen

En la docencia de probabilidad y estadística se afirma con frecuencia que los alumnos no comprenden una determinada proposición y, por tanto, la aplican en situaciones donde no corresponde o no son capaces de inferir consecuencias directas. En este trabajo se plantean algunas reflexiones, siguiendo el ciclo de Smyth, sobre la enseñanza de la estadística. Se analiza el diseño de configuraciones didácticas diferenciadas, a partir del significado de referencia de unos campos específicos de problemas, incorporando la tecnología y el aprendizaje situado, y el acoplamiento progresivo entre el significado institucional del concepto estadístico y la construcción del significado personal del estudiante. Como consecuencia de la práctica reflexiva se valora la idoneidad del proceso de instrucción en el tópico de la distribución muestral.

Palabras clave: Estadística, Configuraciones didácticas, idoneidad del proceso, ciclo de Smyth.

Introducción

En la docencia de pregrado existen altos grados de deserción estudiantil y reprobación de los alumnos en asignaturas de matemática y un alto grado de desmotivación de los estudiantes, que se observan en las diferencias de ritmos de aprendizaje y en el hecho de que muchos no muestran un trabajo sistemático de estudio clase a clase. Es habitual encontrar en matemática instrumentos de evaluación con énfasis en el desarrollo algebraico, donde no se muestra una descripción detallada de los

[1] Universidad Católica de la Santísima Concepción- Chile

elementos de significados logrados de una unidad específica y que conlleven a determinar qué competencias se han adquirido y en cuáles se manifiestan dificultades. Esto se debe en parte a la tradición docente de los profesores y a no disponer de la tecnología adecuada para cursos numerosos. Por lo general, se cuestiona la actitud del estudiante frente al aprendizaje, sin embargo, son escasos los análisis acerca de la eficacia de la actuación docente. Más aún, como producto del sistema de acreditación institucional a lo que deben someterse las universidades, habría que analizar la actitud del profesor frente a la enseñanza, determinar y secuenciar los elementos prioritarios que debe poseer el profesor para una "buena" enseñanza y delimitar su campo de acción en la investigación y su conexión con la docencia. Esto nos conduce a reflexionar si en el aula se favorece la comprensión de los conceptos y si buenas presentaciones en la clase consideran más de una forma de acercarnos al significado institucional implementado (o previsto) o simplemente llegan a los alumnos como un producto dogmático y acabado. La situación es compleja para el profesor de matemática. Este debe considerar la transición del contenido matemático entre la educación media y el primer año universitario y, como académico, generar y apropiarse del conocimiento matemático. Cabe señalar, que el uso del término *competencia* ha penetrado fuertemente en el discurso universitario, especialmente en el desarrollo curricular, la práctica de la enseñanza y la evaluación. Por un lado, los informes de agencias acreditadoras internacionales, así como la Comisión Nacional de Acreditación (CNA) en Chile, ratifican la tendencia a definir los planes de estudios en términos de competencias y criterios de evaluación. De acuerdo a los métodos tradicionales hay consenso acerca de que los alumnos adquieran conocimientos pero no necesariamente acerca de potenciar sus habilidades y favorecer el análisis crítico. La noción de competencia no deja de ser compleja. Hay confusión en el modo en que se usan los constructos de conocimiento, comprensión, competencia, destrezas, etc., en el ámbito de la innovación curricular. Sin embargo, su logro implica un proceso de crecimiento progresivo que debe tener en cuenta las diversas facetas del conocimiento matemático y sus relaciones con el mundo empírico. Godino (2002) ayuda a discernir algunas características de las nociones cognitivas de competencia entendida como "saber hacer" y comprensión que implica saber qué hacer y por qué. Ambas nociones se complementan mutuamente; la competencia atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico relacional. La expresión "X es competente para realizar la tarea T", indica que el sujeto X domina la técnica t que resuelve o permite hacer bien la tarea T. En esas circunstancias decimos que el sujeto tiene una capacidad o competencia específica. En cambio, la expresión, "X comprende la técnica t que permite realizar la tarea T" se aplica si X conoce por qué dicha técnica es adecuada, su ámbito de validez y las relaciones con otras técnicas. Entendida en sentido amplio, la competencia implica los diversos elementos del significado descrito para el conocimiento matemático: problemas, definiciones, propiedades, algoritmos, lenguaje y argumentación.

En este trabajo, del ámbito de la didáctica de la estadística en el contexto de la ingeniería, se profundiza en la enseñanza práctico-reflexiva. La estadística en ciencias básicas, por su carácter metodológico e instrumental, contribuye en el diseño de experimentos y en la mejora de procesos. Se abordarán cuestiones tales como la delimitación de los elementos básicos que caracterizan el desarrollo profesional del profesor en términos de lo que debe ser una buena enseñanza (Alvarado, 2004), la relación entre la metodología de enseñanza empleada en el aula y el aprendizaje del conocimiento matemático-estadístico de conceptos importantes, y la utilización de configuraciones didácticas para describir criterios de idoneidad de un proceso de estudio (Godino, Contreras y Font, 2006).

A objeto de analizar algunas acciones en la metodología de enseñanza de la estadística para describir en los estudiantes habilidades requeridas en las especialidades, se sigue un proceso de reflexión sobre la acción realizada a través del modelo cíclico de Smyth (1991) cuyas cuatro fases son:

1. Descripción: Identificación de la práctica. ¿Qué hago?

2. Información: Soporte de las prácticas. ¿Qué significado tiene lo que hago?
3. Confrontación: Percepción de otras prácticas y teorías.
4. Reconstrucción: Nuevo plan de acción. ¿Qué haría en una nueva ocasión?

El ciclo comienza cuando el profesor detecta un problema profesional surgido en el transcurso de la práctica (Flores, 1998), y las diferentes fases suponen por parte del docente un esfuerzo de explicitación del problema, así como la reflexión de su práctica. En la Tabla 1, se presenta las fases cíclicas de reflexión a analizar en este trabajo:

Descripción	Profesor	- Tendencia a mejorar el rendimiento académico - Desarrolla un clima positivo y comunicativo en el aula - Plantea actividades contextualizadas de tipo algebraico
Información	Estudiantes	- Carencia de competencias matemáticas básicas - Perfil del estudiante universitario - Desempeño docente
Confrontación	Contenido	- Conexión entre conocimiento matemático y contenido didáctico - Idoneidad del proceso de instrucción en estadística
Reconstrucción	Profesor Reflexivo	- Utiliza configuraciones didácticas progresivas - Analiza el significado y comprensión de los objetos matemáticos

Tabla 1. Ciclo de Smyth sobre la enseñanza de la estadística

Fases de reflexión de la práctica docente

1. *Descripción*

En asignaturas de ciencias básicas las sesiones de clase se han desarrollado generalmente sólo en el aula, presentando a los estudiantes actividades de ejercicios con desarrollo algebraico y demostraciones de propiedades deducidas de teoremas y corolarios. Se observa desinterés y bajos resultados globales de las evaluaciones en las asignaturas, lo que implica que las materias son tópicos difíciles para los estudiantes. A continuación se muestra un ejercicio algebraico típico en el aula de estadística:

Ejercicio 1. Se supone que X, el número de accidentes por mes en un cruce de carreteras dado, tiene una distribución Poisson con μ = 2. Si el número de accidentes durante seis meses es mayor que 10, se deberá reconstruir el cruce debido a un programa otorgado por el estado. Calcular la probabilidad aproximada de que el cruce en cuestión sea considerado en el programa de emergencia del estado.

Para resolver el ejercicio y determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas, el alumno ha de considerar una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_6$ y definir la variable ΣX_i: número de accidentes en seis meses, y luego utilizar el teorema central del límite $\sum X_i \approx$ N(6×2 ;6×2). Para obtener el cálculo de probabilidad aproximada de una distribución de Poisson a la distribución normal, se debe aplicar las propiedades de cálculo de la media y varianza de una suma de variables aleatorias, corrección de continuidad y la estandarización. El comentario esperado es que, como la probabilidad de ocurrencia de obtener más de 10 accidentes es aceptable, el estado podría realizar la reconstrucción del cruce.

$$P\left(\sum_{i=1}^{6} X_i > 10\right) \approx P\left(Z \geq \frac{10,5-12}{\sqrt{12}}\right) = 1 - \phi(0,43301) = 0,6664$$

Desde el año 1998, se ha intentado llevar a cabo innovaciones pedagógicas en la Universidad Católica de la Santísima

Concepción (UCSC) a través de proyectos internos de docencia para mejorar el interés y motivación por las asignaturas y desarrollar habilidades de comunicación. Se han estudiado las características de los estudiantes de tipo sociodescriptivas, psicométricas y estrategias de aprendizaje, a objeto de caracterizarlos en función de su rendimiento académico (Alvarado y cols. 2000, 2003). Cabe mencionar que la evaluación del desempeño de los docentes es una tarea que se realiza de forma sistemática en las universidades con un énfasis de diagnóstico, sin involucrar necesariamente la toma de decisiones. En la UCSC los resultados indican una buena evaluación, sin embargo la dimensión de metodología es de la promedios más bajos y son mejores evaluados los docentes con menor número de alumnos.

En Chile hay pocas experiencias de análisis didáctico del contenido matemático y más aún en estadística. Si bien hay deficiencias en competencias matemáticas básicas de los estudiantes, se carece de acciones efectivas sobre la forma de cómo se comunica el conocimiento específico en el aula (idoneidad mediacional). En pocos escenarios educativos universitarios se tiene en cuenta las competencias matemáticas-estadísticas y conductas de entrada que deben poseer los estudiantes en una asignatura particular, a modo de considerar que las prácticas reúne elementos diversos cuya comprensión debe adquirir el estudiante antes de abordarlo, lo que hace complejo el proceso de instrucción. La investigación didáctica es aún escasa en el contexto universitario, en cuanto a cómo se enseña y qué dificultades tiene la enseñanza de la estadística. Para Ordóñez (1994) la formación básica de los estudiantes que no van a ser científicos, sino que requieren ese conocimiento como fundamento de un quehacer profesional vinculado con la ciencia y la tecnología, es responsabilidad de los académicos-especialistas-investigadores en las disciplinas que enseñan. La situación se percibe más complicada, al constatarse que esos académicos formados para investigar, deben asumir un rol pedagógico para lo cual, en un alto porcentaje, no están preparados. Actuar en dos niveles diferentes, la generación y la apropiación del conocimiento, conduce a sobrevalorar los aspectos cognitivos de su disciplina. Se ha generado, de esta forma, una enseñanza de las ciencias básicas con propósitos claramente selectivos más que formativos.

2. *Información*

El bajo rendimiento académico en los cursos de matemática y la deserción estudiantil es una problemática generalizada en las universidades chilenas y de otros países. Uno de los factores puede atribuirse a Fonseca (2003), respecto a que las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y el primer ciclo universitario, ponen en evidencia la atomización y rigidez del bagaje matemático de los alumnos cuando llegan a la universidad. Cada vez es más evidente que la calidad educativa pasa por la calidad de la docencia que se imparte (Rizo, 1999). Se desprende entonces, que el deseo de un sistema universitario de calidad pasa, en primer término, por un desempeño docente eficiente, objetivo que debe concebirse desde una postura analítica y crítica basada en una evaluación que permita de manera objetiva, válida y confiable determinar el nivel de logro del mismo. Parra y cols. (2001) analizan los resultados de una encuesta aplicada a estudiantes universitarios, a través de la cual se obtiene información sobre el quehacer docente desarrollado durante cinco semestres. En los antecedentes expuestos, se hace referencia a los aspectos generales del curso, motivación, relaciones interpersonales, metodologías de enseñanza y evaluación. En consideración a la importancia del tema, se destaca la necesidad de fortalecer, en los académicos, una cultura evaluativa permanente, lo que supone sustentar la capacidad de autocrítica frente a su propio desempeño profesional.

Los resultados mostrados por la Dirección de Estudios Estratégicos en las Jornadas de Reflexión de la Docencia de la UCSC, acerca del porcentaje de reprobación de estudiantes de las distintas especialidades de ingeniería en matemáticas han generado preocupación por los diversos colectivos implicados en la formación académica, ya que sitúa a la docencia impartida del

Departamento de Matemática y Física Aplicadas que no está formando adecuadamente a los estudiantes. Un tema que suscita controversia es ¿Cuál debe ser el perfil del docente de matemáticas de la UCSC? y que derivan en cuestiones como ¿Se requiere un formador de futuros profesionales orientado a la tutoría y a transferir a su práctica el fruto de sus propias investigaciones?, ¿Será que los docentes de matemáticas carecen de modelos claros de referencia que les permitan modificar sus habituales formas de planificar y desarrollar su enseñanza apoyada en un análisis y reflexión sobre el contexto, el conocimiento y su aprendizaje? o ¿Será que la causa se deba a limitaciones al plan actual de estudios? En nuestra actuación docente nos preguntamos ¿cómo enseñamos estadística en el aula universitaria? Una de las respuestas podría ser que estamos enseñando como fuimos enseñados, con un modelo instruccional clásico.

En el caso de Ciencias de la Ingeniería, los sistemas como la Acreditation Board for Ingineering and Technology (ABET, EE.UU) y Canadian Council of Profesional Engineers (CEAB, Canadá), están exigiendo a las Facultades y Escuelas de Ingeniería cambios en el desarrollo curricular, debido a que las formas tradicionales de enseñanza no ayudan a adquirir competencias transversales, y tienen en cuenta el perfil de egreso de un ingeniero, entendida como el conjunto de competencias (generales, especializadas y actitudinales) necesarias en la profesión (Alvarado, 2007). Ello ha originado un gran interés por estructurar carreras de ingeniería enfocada al desarrollo de competencias (Letelier y cols., 2005) y mejorar la enseñanza en este campo, como se muestra en los congresos que organiza desde 1987 la Sociedad Chilena de Educación en Ingeniería (SOCHEDI), con áreas temáticas principales tales como la formación de competencias para la innovación, formación por competencias e innovación en la enseñanza de las ciencias básicas en ingeniería.

Se hace necesario un cambio en los métodos de enseñanza utilizados a objeto de obtener mejores resultados académicos. En el caso de la estadística (Moore, 1997) recomienza una renovación tanto en los métodos como en el contenido. Algunas consideraciones que se ha tenido en cuenta en la enseñanza: a) El aprendizaje es un fenómeno social: es importante conocer las características del estudiante, tanto pedagógicas como el clima en el aula, b) Las prácticas didácticas deben promover el desarrollo cognoscitivo y afectivo del estudiante. Las directrices formativa de nuestro proceso de intervención en el aula de probabilidad y estadística han sido la resolución de ejercicios prácticos con pequeñas bases de datos de iniciación a la investigación social entre los compañeros y con actividades de exploración y planteamiento de problemas cercana en lo posible con la especialidad de los estudiantes. Por ejemplo, las aplicaciones de las distribuciones muestrales surge al estimar la distribución muestral de la suma de variables aleatorias, en situaciones de procesos de simulación tales como: el tiempo entre llegadas de clientes a un servicio o piezas a una máquina, donde se utiliza las distribuciones uniforme y exponencial; la resistencia de materiales en el diseño de edificios es considerada una variable aleatoria ya que en el proceso de fabricación, transporte y montaje pueden ocurrir situaciones no calculadas; el tiempo en procesar una pieza es modelada por distribuciones continuas de la familia gamma; tiempo de espera en los procesos de fileteado y congelado de peces en los desembarque; número de unidades falladas en una muestra de control de calidad utilizando la distribución binomial o beta.

3. *Confrontación*

La enseñanza empleada en cursos de estadística se ha centrado en el rendimiento académico y valoración por la asignatura. Cabe preguntarse si en nuestra práctica hubo comprensión de proposiciones estadísticas fundamentales entregado en clase. Al relacionar el conocimiento matemático-estadístico y contenido didáctico, surgen inquietudes como las siguientes ¿cómo caracterizar la eficacia de un proceso de instrucción?, ¿Qué dispositivos didácticos (manipulativo, computacional, libros de textos, etc.) son los adecuado para la enseñanza de la estadística en el nivel universitario?, o ¿qué efecto tiene la informática como recurso de apoyo a la docencia? Hay dos aspectos a considerar, la tecnología por sí sola no es suficiente para la comprensión de propiedades de la distribución muestral, sino que las actividades y la enseñanza de tipo constructivista tienen un rol importante (delMas, Garfield y Chance, 1999) y, lo otro, que las tecnologías son medios y recursos didácticos, movilizados por el profesor, que algunas veces aumentan los problemas educativos en vez de resolverlos. Hoy en día, se tiene acceso a suficiente literatura disponible en internet sobre la utilización de tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza de la probabilidad y estadística. Sin embargo, se carece de metodologías para evaluar instrumentos de aprendizaje. Una clasificación de los recursos que ofrece la web son los Software libre (programa estadístico R y el programa @risk de licencia limitada); los miniprogramas Java Applet y Geogebra para ilustrar, simular y explorar conceptos estocásticos en un ambiente dinámico y gráfico; materiales educativos en línea (libros en línea como The World of Visual Statistics; HyperStat; Electronic Statistics Textbook); y revistas electrónicas y boletines de información (Journal of Statistics Education, Statistics Education Research Journal, Statistics Teacher Network boletín de la Nacional Council Teachers of Mathematics).

La perspectiva didáctica que se empleará como nuevo plan de acción se sustenta en el enfoque onto-semiótico de la cognición e instrucción matemática, desarrollada en la Universidad de Granada, que toma los siguientes supuestos como base:

1. *Significado institucional y personal*. Los objetos matemáticos surgen de situaciones problemáticas internas o externas a la propia matemática y evolucionan progresivamente. Una práctica es significativa para una persona o para una institución, si cumple una función para resolver el problema, comunicar, validar o entender su solución, y están orientadas a un objetivo que implican una situación-problema, un contexto institucional, una persona y las herramientas semióticas que mediatizan la acción (Godino y Batanero, 1998). Para estudiar la problemática del diseño de situaciones didácticas y la evaluación de los

conocimientos del sujeto, los autores distinguen el *significado institucional* de un objeto matemático, como aquel compartido dentro de una institución y el *significado personal* es el que el alumno tiene inicialmente o es adquirido a lo largo del proceso de estudio. El objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge del sistema de prácticas significativas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Este proceso es progresivo a lo largo del tiempo, hasta que en determinado momento el objeto matemático es reconocido como tal por la institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Luego, sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado.

2. *Elementos de significado*. Para Godino (2002), la comprensión personal de un objeto es, en este modelo, la "apropiación" del significado institucional de dicho objeto. Se propone una tipología de objetos matemáticos primarios, que denominan "elementos del significado" (entendiendo aquí el significado en el sentido sistémico-pragmático) y son los siguientes: *Situaciones-problemas* que originan actividades matemáticas (situaciones-problemas, aplicaciones) de donde surge el objeto; *Lenguaje* o representaciones materiales utilizadas en la actividad matemática; *Procedimientos* o modos de actuar ante situaciones o tareas (algoritmos, operaciones, reglas de cálculo); *Conceptos* introducidos mediante definiciones o descripciones; *Proposiciones* que tratan específicamente las propiedades asociadas al tema; y *Argumentos* o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas.

3. *Configuraciones didácticas*. Los seis tipos de entidades primarias descritos anteriormente están relacionados entre sí formando *configuraciones*, que Godino, Contreras y Font (2006) definen como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Conciben la evaluación como el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales. La evaluación de la comprensión de un sujeto tiene que ser relativizada a los contextos institucionales. Una

institución dirá que un sujeto “comprende” el significado de un objeto si dicho sujeto es capaz de realizar las distintas prácticas que configuran el significado de dicho objeto institucional, además de fundamentarlas y reflexionar sobre el proceso seguido.

4. *Criterios de idoneidad*. También, definen los siguientes criterios de idoneidad, con el propósito de describir, analizar y explicar fenómenos específicos ligados a los procesos de instrucción matemática:

- Idoneidad *epistémica*: Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia.

- Idoneidad *cognitiva*: Expresa el grado de proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, o de manera equivalente, la medida en que el "material de aprendizaje" esté en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.

- Idoneidad *semiótica*: Tiene en cuenta las posibilidades que ofrece una configuración didáctica para identificar conflictos semióticos potenciales y de resolverlos mediante la negociación de significados.

- Idoneidad *mediacional*: Es el grado de disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de la actividad.

- Idoneidad *emocional*: Describe el grado de implicación de los alumnos en el proceso de estudio.

Este trabajo se interesa por describir el punto hasta el cuál el proceso de instrucción ha sido eficaz, principalmente en los criterios de la idoneidad cognitiva y mediacional con que los profesores de estadística desarrollan su práctica docente. La propuesta considera acciones para mejorar la comprensión teórica y práctica de las distribuciones muestrales en un curso de estadística universitario mediante la apropiación progresiva de tres configuraciones epistémicas diferenciadas. En la Tabla 2 se presentan las conexiones de elementos de significado de dos configuraciones epistémicas.

- En la *configuración manipulativa* el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos (dados, fichas,...), papel-lápiz o calculadora, sin utilizar notación o cálculo algebraico. Aparecen objetos matemáticos específicos como experimento aleatorio y estadístico, variable estadística, su distribución y momentos, y el tipo de demostración preferente es el estudio de ejemplos y contraejemplos. Los procedimientos son empíricos y gráficos y el lenguaje se reduce a expresiones verbales y gráficas en papel y lápiz.

- La *configuración algebraica* se caracteriza por el lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso a elementos de álgebra y análisis. Los procedimientos serían analíticos y algebraicos, además de incorporar el uso de las tablas de distribuciones para calcular probabilidades. Aparecen la idea de convergencia, momentos, tipificación, etc.

- La *configuración computacional* amplía notablemente el lenguaje, sobre todo el número y variedad de representaciones gráficas dinámicas. Además del lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y permite trabajar con las variables estadísticas y aleatorias simultáneamente. No posibilita el lenguaje algebraico ni la demostración deductiva. El argumento preferible es inductivo, estudio de ejemplos, contraejemplos y la generalización. Aparecen algunos conceptos como el de aproximación y distribución muestral asintótica.

Elementos de significado	Configuración algebraica	Configuración computacional
Problemas	- Obtener modelos matemáticos para la distribución de estadísticos	- Obtención experimental de distribuciones muestrales asintóticas - Investigar el comportamiento de las distribuciones muestrales cuando cambian los parámetros
Lenguaje	- Representación simbólica - Expresiones matemáticas específicas	- Representaciones dinámicas - Términos e íconos del programa
Procedimiento	- Cálculo de probabilidades - Transformaciones algebraicas	- Simulación, variación de parámetros, experimentación
Conceptos	- Variables y convergencia - Modelo y parámetros	- Aproximación, distribución muestral asintótica - Función densidad
Propiedades	- Tamaño muestral y efecto en la convergencia - Buen estimador y corrección de continuidad	- Aproximación normal de distribuciones clásicas - Efecto de los parámetros sobre la aproximación
Argumentos	Demostración deductiva	- Visuales, generalización y comprobación de ejemplos

Tabla 2. Configuraciones epistémica algebraica y computacional de la distribución muestral

4. *Reconstrucción*

El nuevo plan de acción, con enfoque descriptivo y exploratorio, está centrada en el diseño, experimentación y evaluación de la distribución muestral y la formación de ingenieros, y se fundamenta en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (ver http://www.ugr.es/~jgodino/). A continuación se describen las etapas, cada una de las cuales poseen un fin en sí misma.

Etapas del nuevo plan de acción

Una primera fase es el análisis epistémico a objeto de fijar el significado institucional de referencia, que es la base del diseño de la secuencia didáctica de las distribuciones muestrales. Para ello, se ha tenido presente las investigaciones de proposiciones y conceptos relacionados con la distribución muestral (Alvarado, 2007), y se ha desarrollado el análisis conceptual-epistemológico del significado del teorema central del límite presente en los libros de estadística para ingenieros (Alvarado y Batanero, 2005, 2008). Se destaca la importancia y los problemas didácticos asociados a la enseñanza de los conceptos. La falta de rigor matemático del teorema detectado en el análisis de textos universitarios, se considera que dificulta su comprensión y a apreciar su alcance de aplicación. Además, de la carencia de problemas con dispositivos de simulación manipulable y la débil rigurosidad en los ejercicios resueltos. Sobre la base del diseño de la enseñanza del tema, a continuación se analizan dos etapas acerca de la implementación y evaluación de las configuraciones epistémicas empleadas.

- *Enseñanza basada en configuraciones didácticas diferenciadas*

La distribución muestral relaciona las distribuciones de probabilidades con la inferencia estadística y es importante en el trabajo del ingeniero, al proporcionarle herramientas metodológicas para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima experimentos, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Se considera una simulación como un experimento estadístico de muestreo.

La trayectoria didáctica del proceso de estudio de la distribución muestral ha tenido en cuenta:

1. Delimitar los contenidos y secuencia de enseñanza de la distribución muestral: diseño de la muestra, distribución de estimadores obtenidos de poblaciones normales, distribución de estimadores obtenidos de variables aleatorias discretas, distribución de estimadores obtenidos de variables aleatorias continuas.

2. Considerar un acercamiento global a propiedades importantes, como el teorema central del límite, siguiendo el desarrollo histórico; la aplicación en resolución de problemas específicos de ingeniería; la comprensión de propiedades importantes como la corrección de continuidad, supuestos de aplicación y rapidez de convergencia; basado en la tecnología: Uso de @risk, Excel, applets y la plataforma virtual ev@; el diseño de evaluaciones parciales y finales.

3. Implementar en el diseño los elementos más importantes del significado de referencia de la distribución muestral, adaptado al tiempo disponible y conocimientos previos.

4. Utilizar en la enseñanza los diversos recursos didácticos a través de las configuraciones epistémicas en los campos de problemas aplicados a la ingeniería.

5. Establecer los objetivos de la evaluación, que fue evaluar el significado personal de los estudiantes al finalizar el proceso de estudio y compararlo con el significado institucional implementado. Dos objetivos específicos se plantearon: Estimar la proporción de alumnos en el grupo que muestran una comprensión y capacidad de aplicación de ciertos elementos de significado incluidos en la enseñanza, e identificar cuáles de estos elementos resultaron difíciles. Por tanto, la evaluación va más allá de medir resultados, es un proceso de delimitar, obtener y proporcionar información útil para la toma de futuras decisiones docentes.

A partir del 2006 se han implementado de forma sistemática experimentos de enseñanza con distintos grupos de estudiantes de cinco especialidades de ingeniería (Informática, Industrial, Civil, Acuicultura y Pesca y Marítimo Portuario). Se ha llevado a cabo la observación de la enseñanza, la recogida de respuestas abiertas de los estudiantes en tareas seleccionadas con un análisis cualitativo y mediante tablas se resumen los elementos de significado observados durantes las cuatro lecciones. A continuación, se muestran actividades empleadas en las configuraciones epistémicas.

Actividad 1. *Configuración manipulativa*. Una caja contiene 4 fichas de las cuales 2 fichas son verdes. Simular la extracción de m muestras de tamaño n; formando las matrices $n×m$ (tamaño muestral×número de réplicas), (n,m) = (4,5), (10,1), (10,10) y (30,10). Para cada caso: a) Construya una tabla de frecuencias del número de fichas verdes por muestra obtenida, b) Represente los datos en un gráfico de barras y comente sus características, c) Compare la media y varianza del experimento con la media y varianza teórica.

Es una actividad experimental de simulación con fichas, orientada a llegar a un enunciado intuitivo de aproximación de la suma de variables aleatorias a la distribución normal a partir de dispositivos didácticos, y se realizó colectivamente en el aula. Se seleccionaron al azar 10 alumnos, sacando cada uno una ficha de la bolsa que contiene 2 de color verde de un total de 4. Cada alumno repitió el experimento 10 veces; se anota en el pizarrón la matriz de orden 10×10, de valores 0 y 1 en las celdas. A continuación los estudiantes sumaron por columna el total de "1", pensada como una distribución binomial de parámetros n=10 *y* p= ½. Se construyó así una distribución de frecuencias en clases individuales del número de fichas verdes obtenidas en las 10 extracciones. Luego, los estudiantes dibujaron un gráfico de barras, con eje X los valores del recorrido 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, y el eje Y las frecuencias absolutas de "1" en cada muestra. Se comparó la media teórica con su valor experimental correspondiente. La actividad resultó sencilla, y sirvió de introducción a otras actividades para realizar individualmente fuera de la clase (Actividad 2 y 3), ejercitando el cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias, cálculo de probabilidades a partir de materiales manuales; la media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias; la varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas.

Actividad 2. *Configuración manipulativa*. Suponga que gana si obtiene un "6" al lanzar un dado legal. Simular las posibilidades de ganar en los siguientes casos de varios lanzamientos del dado (n,m) = (5,5), (10,10) y (30,10). Compare sus resultados con la actividad 1.

Actividad 3. *Configuración manipulativa*. Una máquina produce artículos con cierto tipo de defecto, identificados como 0, 1 y 2. Suponiendo que en una partida hay 20 artículos sin defecto, 30 con un defecto y 50 con dos defectos, se saca un artículo al azar y se anota su valor, X_1. La distribución de X_1 será:

$$P(X_1 = x) = \begin{cases} 0{,}2 & x = 0 \\ 0{,}3 & x = 1 \\ 0{,}5 & x = 2 \end{cases}$$

a) Suponga que el artículo escogido primero se devuelve a la partida y luego se escoge un segundo artículo y se anota su valor, X_2. Obtenga la distribución de probabilidades del promedio de tres y cuatro artículos extraídos.

b) Dibuje con lápiz y papel y/o Excel las distribuciones de las medias muestrales de tamaño 2, 3 y 4. ¿En un mismo gráfico trace en línea discontinua cómo sería la distribución muestral de la media de tamaño 5?

c) Comente si la distribución de la suma S_n y el promedio $\overline{X}_n$ son similares.

d) Enuncie al menos una pregunta de contexto y resuelva aplicando el teorema central del límite.

A modo de ilustración se presentan dos actividades, apoyada con applet, en que se describe su contenido y los posibles errores que, a priori, es previsible que encontremos en las respuestas de los alumnos participantes.

Actividad 4. *Configuración computacional*. La aproximación de la distribución binomial *bin*(*n*,*p*) a la distribución normal es suficientemente buena cuando:

a) n es menor que 30 y np aproximadamente igual a 5

b) n es mayor que 30 y p menor que 0,05

c) n es mayor que 30 y p aproximadamente igual a 0,5

d) n es mayor que 30 y cualquier p

e) n es mayor que 30 y p igual a 0,9

Esta actividad, presentado mediante expresiones verbales y simbólicas, pretende evaluar si el alumno reconoce las condiciones que han de cumplir n y p para que la aproximación de la distribución binomial a la normal sea suficientemente precisa. Considera las propiedades de que la aproximación mejora con el número de sumandos y aproximar una distribución discreta por una continua. El alumno debe razonar acerca de la convergencia como caso especial de un resultado general. La respuesta correcta sería la alternativa (c), ya que la forma de la distribución es simétrica y cumple las condiciones de muestras de tamaño mayor a 30 y ser tanto np como nq mayores a 5. Los distractores incluidos evalúan los siguientes errores: (a) pensar que la aproximación es buena para tamaños pequeños de muestra; (b) aunque n es mayor que 30, el valor esperado np =1,5 es menor que 5; (d) reconocer la precisión de aproximación a la binomial sólo mediante el tamaño muestral y no el parámetro p; (e) pensar en una buena convergencia para valores del parámetro cercanos a 1; si bien cumple la regla, por ejemplo para $np=30\times 0{,}9=27$ no se cumple para el complemento $nq=30\times 0{,}1=3$.

Actividad 5. *Configuración computacional.* Se supone que X, el número de accidentes por mes en un cruce de carreteras dado, tiene una distribución Poisson con $\mu = 2$. Si el número de accidentes durante seis meses es mayor a 10, se deberá reconstruir el cruce debido a un programa otorgado por el estado.

a) La diferencia entre la probabilidad aproximada y probabilidad exacta es de:

I. 0,01363 II. 0,0 III. 0,03919 IV. 0,00715
V. Ninguna de las anteriores.

b) ¿Será considerada la reconstrucción del cruce en el programa de emergencia del estado? Comente.

En esta actividad, cuya solución algebraica es dada en el Ejercicio 1, el alumno usará símbolos y expresiones verbales, también utilizará el gráfico y el cálculo de la media, desviación estándar y probabilidad exacta ofrecida por el applet de la distribución Poisson, como se muestra en la Figura 1. Los distractores incluyen los siguientes errores: b) no considerar la corrección de continuidad, c) calcular la probabilidad a partir del valor 10 de la variable aleatoria y sin considerar la corrección de continuidad, d) calcular la probabilidad mayor o igual a 10 o realizar otro cálculo con error en el recorrido de la variable aleatoria.

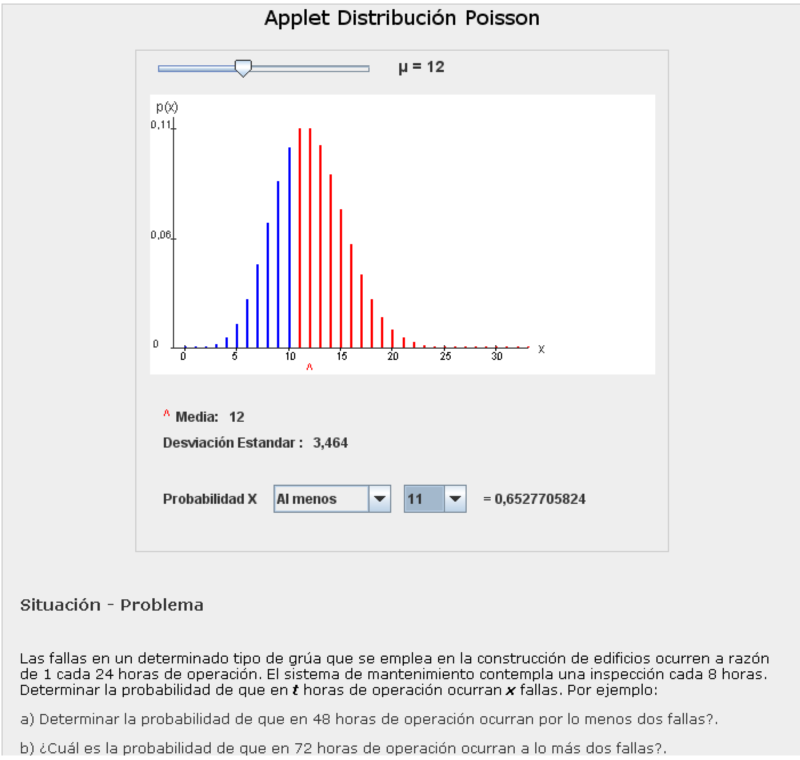

Figura 1. Applet de la distribución de Poisson

La Actividad 6 de tipo algebraica es una aplicación del teorema central del límite a variables continuas con distribución exponencial. Previo a los 20 minutos que dará el profesor para que intenten individualmente resolverlo, se les recuerda que en el proceso de Poisson los eventos ocurren al azar independientemente y a una tasa uniforme por unidad de tiempo, definiendo la v.a. *Y* como número de eventos en el intervalo (*0,t*]. Si estamos interesados en *X* que es el tiempo que transcurre hasta que el primer evento ocurre, entonces *X* es la llamada v. a. exponencial con parámetro λ y se le menciona la fórmula de su función de densidad, así como sus propiedades. Una vez cumplido el tiempo de desarrollo de la actividad, el profesor utiliza la pizarra para desarrollarla de forma algebraica en conjunto con el grupo de alumnos, atendiendo algunas preguntas planteadas. Posteriormente se analiza la frecuencia de respuestas de algunos elementos de significados del teorema en un grupo de alumnos.

Actividad 6. *Configuración algebraica*. Los tiempos que tarda un cajero en procesar el pedido de cada persona son variables aleatorias independientes con distribución exponencial con una media de 1,5 minutos. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que se puedan procesar los pedidos de 100 personas en menos de 2 horas?

Según los datos del problema el algoritmo de resolución esperado del alumno es el siguiente: Tenemos $E(X)=1{,}5=1/\lambda$, donde $\lambda=2/3$. Entonces la v.a. $X \sim \exp(\lambda=2/3)$, y además la varianza es $V(X)=1/\lambda^2=9/4$. Considerando una muestra de 100 personas $X_1, X_2,\ldots X_{100}$ anotamos $P\left(\sum X_i<120\right)=P\left(\bar{X}<1{,}2\right)$. Utilizando el teorema central del límite para *n*=100, $\bar{X} \stackrel{\sim}{\cdot} N\left(\mu=1{,}5,\frac{\sigma^2}{n}=\frac{9/4}{100}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}-1{,}5}{3/20} \stackrel{\sim}{\cdot} N(0,1)$ Así, la probabilidad pedida es $P\left(Z<\frac{1{,}2-1{,}5}{3/20}\right)=P(Z<-2)=0{,}02275$.

La implementación de la secuencia didáctica de la distribución muestral se ha realizado con base en investigaciones relacionadas, en un estudio histórico del teorema central del límite y el análisis de libros de texto de estadística para ingenieros. Los experimentos de enseñanza han detectado dificultades que posiblemente surgirían en las evaluaciones finales, y de algunas diferencias con respecto al significado pretendido.

- *Idoneidad del proceso de estudio*

Se entiende la evaluación como la correspondencia entre el significado institucional presentado en la enseñanza y el significado personal efectivamente construido por los alumnos (Godino y Batanero, 1998), identificando sus dificultades y errores. Durantes los últimos semestres académicos se han caracterizado los elementos de significado puestos en juego por los alumnos, a través del análisis de sus soluciones escritas a cuestionarios para evaluar la comprensión de los alumnos sobre las distribuciones muestrales. A objeto de describir los elementos de significado usados correcta e incorrectamente por los estudiantes en la resolución y las conexiones que establecen entre los mismos, se han llevado a cabo la aplicación de distintos instrumentos de evaluación:

- Cuestionarios con ítems de tipo conceptual y algebraico (Alvarado y Batanero, 2007) en la cual se analiza las dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial;
- Problemas abiertos de tipo algebraico (Alvarado, 2007) que permite un análisis más detallado del uso de argumentos y procedimientos de los alumnos;
- Proyecto de aplicación a la ingeniería con apoyo informático (Retamal, Alvarado y Rebolledo, 2007), en que los alumnos con Excel y el programa @risk han simulado datos para distintos valores de los parámetros la convergencia de distribuciones de probabilidades;
- Implementación de un cuestionario en línea con la plataforma moodle. El diseño contempla preguntas de opción múltiple de respuesta única, un enlace web de las distribuciones de probabilidades binomial y de Poisson para resolver como una herramienta de cálculo y de simulación.

La Figura 2 muestra parte del cuestionario presentado a una muestra de estudiantes.

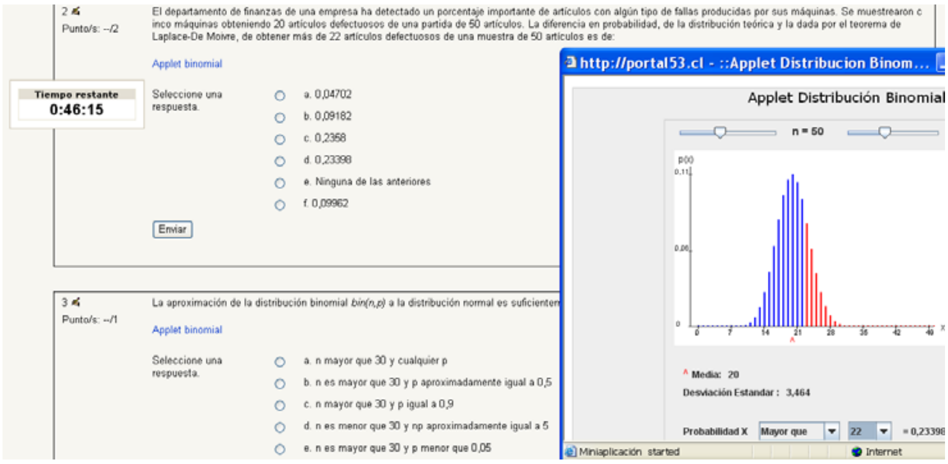

Figura 2. Ítems de la evaluación en línea de la distribución muestral

La actividad 3 estudia la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas y es interesante de analizar, debido a que requiere estudiar algebraicamente y gráficamente el comportamiento de la distribución de la suma o media muestral a medida que se van agregando variables. Se le pidió a una sección de alumnos desarrollarla en parejas, comenzando por la distribución de la media de tamaño 3 y otra sección debían comenzar por el estadístico de la suma de variables aleatorias. No hubo dificultades en formar las 27 muestras posibles y la distribución de la suma de v.a de tamaño 3, como se ilustra a continuación:

s_3	$P(S_3 = s_3)$
0	(0,0,0) = $(0{,}2)^3$ = 0,008
1	(0,0,1)(0,1,0)(1,0,0) = 3(0,012) = 0,036
2	(0,0,2)(0,1,1)(0,2,0)(1,0,1)(1,1,0)(2,0,0) = 3(0,02) + 3(0 [illegible]
3	(0,1,2)(0,2,1)(1,0,2)(1,1,1)(1,2,0)(2,0,1)(2,1,0) = 0,207
4	(0,2,2)(1,1,2)(1,2,1)(2,0,2)(2,1,1)(2,2,0) = 0,285
5	(1,2,2)(2,1,2)(2,2,1) = 0,225
6	(2,2,2) = 0,125

De forma análoga los estudiantes desarrollaron la distribución de la suma o media muestral de tamaño 4 (apartado a)), obteniendo ahora $3^4 = 81$ muestras posibles. De los 66 estudiantes la mayoría dibujó con lápiz y papel milimetrado o en Excel el comportamiento de la distribución de la suma de variables aleatorias según aumenta el tamaño de la muestra de 1 a 4, y observando que a medida que va aumentando el tamaño extraído de la muestra, la curva que se obtiene va tomando la forma de la distribución normal. Se ilustra una gráfica donde se va mostrando por separado su comportamiento simétrico.

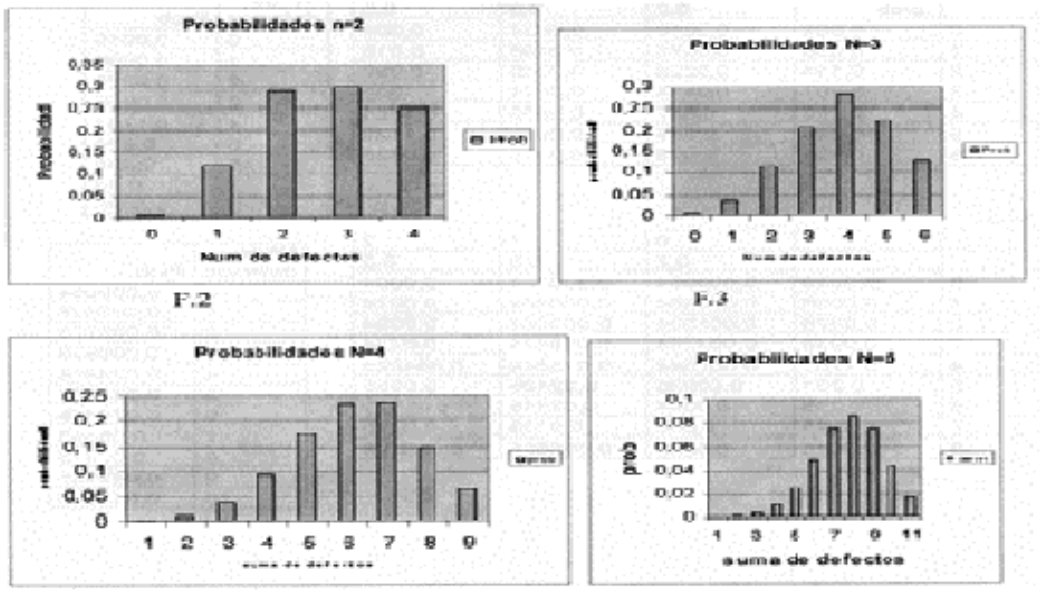

Figura 3. Distribución de la suma de 2, 3 y 4 variables aleatorias

Los comentarios realizados fueron en relación a la simetría y similaridad con la distribución normal. Otra gráfica presentada para la suma de variables aleatorias con la predicción intuitiva del teorema central del límite es la siguiente:

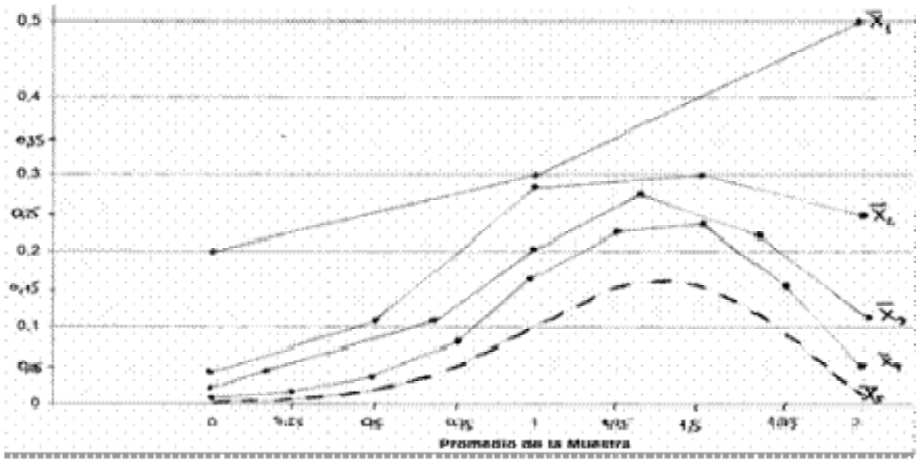

Figura 4. Predicción intuitiva del teorema central del límite

Un resumen de frecuencias de respuestas a los procedimientos de la actividad 3 se muestra en la siguiente tabla:

	Aciertos(%)	Errores(%)
Determinar la distribución muestral de $\overline{X}_3$ o S_3	60 (90,9)	6 (9,1)
a) Obtener la distribución muestral $\overline{X}_4$ o S_4	56 (84,8)	6 (7,1)
b) Dibujar la distribución de las sumas de v.a.	34 (51,5)	2 (3,0)
b) Dibujar la distribución de los promedios de v.a.	22 (33,3)	2 (3,0)
c) Comparar las distribuciones de la suma y el promedio	50 (75,8)	4 (6,1)
d) Cálculo y transformación algebraica de v.a.	38 (57,6)	6 (9,1)
d) Determinar la media de la suma o promedio	36 (54,5)	
d) Determinar la varianza de la suma o media muestral	32 (48,5)	2 (3,0)

Tabla 3. Frecuencias (porcentajes) de respuestas de la Actividad 3 (*n* =66)

Resultados preliminares, en diferentes actividades presentadas a los estudiantes, sobre concordancias y diferencias entre el significado personal y el significado institucional de la distribución muestral se mencionan a continuación:

- Los estudiantes de ingeniería han mostrado una mejor comprensión: en el análisis de la distribución aproximada de la media muestral que provienen de poblaciones binomiales, el uso del lenguaje simbólico con algunas excepciones, el procedimiento algebraico y la tipificación, la simulación en la resolución del proyecto, las propiedades de la media y la varianza de la suma de variables aleatorias.
- Los elementos que dan origen a conflictos semióticos son: no reconocer campos de problemas en situaciones específicas de aplicación a la ingeniería, expresión verbal incorrecta de conceptos relacionados con el teorema central del límite, errores de estandarización al confundir la suma por el promedio, no aplicar la corrección de continuidad, no ser capaz de dar una decisión en base al análisis de propiedades.

Conclusiones

En este trabajo se ha descrito el rol del docente de estadística centrada en su enseñanza a objeto de establecer en el mediano plazo un modelo de actuación docente pertinente y que contribuya a la valoración sobre los criterios de idoneidad epistémica, mediacional y cognitiva del aprendizaje en los estudiantes. La práctica docente debe ser reflexiva, entendida en el sentido que el profesor analice las distintas variables involucradas en el proceso de instrucción matemática y, consecuentemente, sus formas de intervenir en ellos.

Se han abordado una secuencia didáctica de diseño, implementación y evaluación de las distribuciones muestrales. Se busca información sobre las dificultades de contenido observadas en grupos de estudiantes universitarios, que nos ayudará a mejorar la enseñanza y favorecer la habilidad para realizar experimentos de simulación en el diseño de procesos, uso de técnicas y programas estadísticos para modelar, analizar y resolver problemas que describan fenómenos aleatorios en la práctica. Se considera un avance en presentar formas alternativas de instrumento de evaluación, en la cual se han identificado muchos conflictos semióticos en las tres configuraciones que nos proporcionará los medios para aumentar la idoneidad en futuras experiencias. En cuanto a la idoneidad del proceso de instrucción en estadística, con base en el análisis epistémico, podemos mencionar avances preliminares que consideraremos en futuras experiencias con los estudiantes:

- Idoneidad cognitiva: Se evidencia en el aprendizaje mostrado en las distintas pruebas de evaluación, aunque han sido desigual. Logran familiarizarse con lo recursos informáticos presentados siendo capaces de simular experimentos y utilizan más elementos de significado correctamente en las actividades. Sin embargo existe diferencias de intensidad de implementación, por ejemplo en la argumentación, y hay que dedicar más tiempo al tema.
- Idoneidad mediacional: Se considera positiva pues permite a los estudiantes el trabajo de las propiedades de la distribución muestral desde tres configuraciones didácticas diferenciadas para facilitar la comprensión progresiva y su generalización. Se amplían las representaciones conectando los modelos de probabilidad con la experimentación. El uso de medios como la plataforma virtual aumenta las posibilidades de trabajo, aunque hay que tener presente el esfuerzo cognitivo de los estudiantes.
- Idoneidad emocional: Para valorarla hay que tener en cuenta las características de los estudiantes de ingreso a la universidad cuyas competencias matemáticas son débiles y la metodología de enseñanza tradicional del docente, que en alguna medida inciden en las tasas de reprobación y desmotivación de los estudiantes. No obstante, se observa implicación alta en las distintas actividades implementadas.

Agradecimientos
Este trabajo es parte del Proyecto Fondecyt 11080071.

Referencia

Alvarado, H. (2004). Significado y comprensión de un teorema estadístico: elementos básicos en el desarrollo profesional del profesor para una buena enseñanza. *Boletín de Investigación Educacional*, 19, Nº1, 227-244.

Alvarado, H. (2007). *Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2005). El significado del teorema central del límite: evolución histórica a partir de sus campos de problemas. En A. Contreras (Ed.): *Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, pp. 257-277. Jaén: Universidad de Jaén.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números*, 67.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estud. Pedagóg*. Vol. 34, Nº 2, 7-28.

Alvarado, H., Sánchez, I., Retamal, L. y Ramos, J. (2003). Una propuesta metodológica hacia el aprendizaje activo en las matemáticas. *Boletín de Investigación Educacional*, 18, 111-126.

Alvarado, H., Sánchez, I. y Uribe, M. (2000). Correspondencia entre estrategias de aprendizaje y rendimiento académico en estudiantes universitarios. *Boletín de Investigación Educacional*, 15, 70-88.

delMas, R. C., Garfield, J. B., y Chance, B. L. (1999). A model of classroom research in action: developing simulation activities to improve students´ statistical reasoning. Journal of Statistic education. Vol. 7, 3.

Flores, P. (1998). Formación inicial de profesores de matemáticas como profesores reflexivos. UNO, 17, pp. 37-48.

Fonseca, C. (2003). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Godino, J. D. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿Qué son y cómo se consiguen? *UNO*, 29, 9-19.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26* (1), 39-88.

Letelier, M., López, L., Carrasco, R. y Pérez, P. (2005). Sistema de competencias sustentables para el desempeño profesional en ingeniería. *Rev. Fac. Ing.* Vol. 13(2), 91-96.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review*, *65* (2), 123-155.

Ordóñez, L. (1994). La enseñanza de las ciencias básicas en Chile: Una visión desde la didáctica. Editor Silva, M. CPU.

Parra, E., Alvarado, H., Morales, J., Constenla, J. y Díaz, C. (2001). Percepción del estudiante y del docente de la UCSC respecto del desempeño académico en el aula. *Boletín de Investigación Educacional*, 16, 246-264.

Retamal, L., Alvarado, H. y Rebolledo, R. (2007). Comprensión de las distribuciones muestrales en un curso de estadística para ingenieros. *Ingeniare*, 15, 6-17.

Rizo, H. (1999). *Evaluación del docente universitario*. Revista electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado.

Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. Revista de educación, 294, pp. 275-300.