Grafos y su potencial educativo

Teresa Braicovich [1]

Resumen

Luego de realizar investigaciones en distintos niveles educativos y en diferentes contextos sociales, se llegó a la conclusión que el trabajar con algunos conceptos de grafos ayuda a los alumnos en varios aspectos dentro del proceso de enseñanza. En particular, hace que los alumnos realicen razonamientos matemáticos típicos de la matemática discreta, a partir de la intuición, exploración, descubrimiento y planteo de distintas hipótesis. También pueden utilizar a los grafos como "organizadores", con el fin de facilitar la comprensión y el aprendizaje, realizando representaciones y modelizaciones de situaciones cotidianas.

Muchos docentes desconocen el tema, otros sólo tienen un mínimo conocimiento del mismo e incluso algunos, aún cuando manejan más conceptos de esta temática no saben cómo presentarlo a sus alumnos.

El objetivo del dictado de este curso es transferir el tema, es importante destacar que se hará referencia a la didáctica y a la metodología a utilizar de acuerdo a las edades de los niños con quiénes se desee trabajar. Por último, cabe agregar que con estos encuentros se busca generar en los asistentes la inquietud de profundizar en el estudio de esta teoría en el futuro y movilizarlos a enseñar el mismo a sus alumnos.

Introducción

Puede observarse en los distintos niveles educativos, incluida la enseñanza universitaria, las serias dificultades de los estudiantes para lograr un aprendizaje significativo: les resulta difícil proponer razonamientos propios, en muchas ocasiones no logran resolver sencillos problemas que pueden presentarse en

[1] Universidad Nacional del Comahue -Argentina

la vida cotidiana y que tienen relación con la matemática. Es probable que esta situación esté relacionada con un modelo cultural que busca reproducir el conocimiento más que producirlo; podemos tomar las palabras de Moisés Coriat: "*No es tan importante saber muchas cosas como saber cómo aprender cosas nuevas*". Por otro lado, no se puede dejar de mencionar lo difícil que resulta a los docentes despertar el interés de los alumnos.

Una posible respuesta a la problemática anteriormente planteada, estaría dada por la idea de plantear situaciones donde el alumno tenga la posibilidad de explorar, descubrir, crear, ensayar, probar, generar hipótesis y conjeturas, discutirlas y analizarlas. En este sentido, a partir de investigaciones realizadas he concluido que los grafos constituyen una buena herramienta para conceptualizar situaciones, para extraer pautas y entender esquemas y lograr transferirlos a situaciones nuevas. La Teoría de Grafos es un tema avanzado a nivel universitario que, en general, no se encuentra en las currículas escolares y que permite realizar análisis y razonamientos muy interesantes. Es decir, no hay necesidad de ser un experto en el tema para usarlos con cierta soltura, por lo que considero que el introducir algunos conceptos de grafos resulta útil para despertar el interés por la matemática, para ayudar al desarrollo lógico y a la visión espacial, también actúa como formador de la intuición y sostén del razonamiento abstracto. Podemos citar nuevamente a Coriat: "*Por medio de los grafos se facilita el acceso de los alumnos a sus propias estrategias de aprendizaje, no porque estas se describan necesariamente mediante grafos, sino porque el ir y venir entre situaciones y estructuras puede facilitar la toma de conciencia de los propios procesos metacognitivos*".

La finalidad del dictado de este curso es transferir algunos contenidos de grafos a los asistentes, ya sean docentes en formación o en ejercicio. Se presentarán distintos conceptos de la temática en cuestión, haciendo hincapié en las actividades y metodología a utilizar en su enseñanza. Además, como un currículo debe estar bien articulado se propondrá, en forma sucinta, una posible graduación de ciertos temas de esta teoría para los distintos niveles educativos.

Pertinencia de la propuesta

A partir de investigaciones de tipo cualitativas realizadas pude concluir que el introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en distintos niveles educativos hace que los alumnos: realicen razonamientos matemáticos típicos de la matemática discreta, a partir de la intuición, exploración, descubrimiento y planteo de distintas hipótesis. También pueden utilizar a los grafos como "*organizadores*", con el fin de facilitar la comprensión y el aprendizaje, realizando representaciones y modelizaciones de situaciones cotidianas. Por último, es un tema que resulta motivador para los alumnos, dando la posibilidad de cambiar de actitud frente a la asignatura matemática.

La planificación y el desarrollo de este trabajo tienen como marco teórico las teorías constructivistas, las cuales consideran al alumno con una desarrollada capacidad de gestionar su propio aprendizaje; de usar su conocimiento, habilidades previas y seleccionar estrategias de aprendizaje adecuadas en la tarea que se encuentra trabajando. Los procesos de aprendizaje que se inducen en las clases tienen como objetivo facilitar al alumno nuevas posibilidades de pensar, sentir y valorar, procesos que deberían hacer que el alumno sea capaz de actuar y juzgar de manera satisfactorias en situaciones nuevas que le puedan ser planteadas. Para que esto realmente sea así, es necesario que sean construidos los nuevos contenidos del quehacer y del pensamiento, éste es el aspecto dinámico del proceso de construcción: hacer que el alumno busque e investigue, para que así pueda crear una nueva forma de actuar o de pensar por propio impulso.

Como muchos docentes aún no conocen el tema grafos, la finalidad de este curso es transferir algunos conceptos del mismo a los asistentes, haciendo referencia a la didáctica y a la metodología a utilizar en los distintos niveles educativos. Es decir, dar el puntapié para generar en ellos la inquietud de profundizar en el estudio del tema en el futuro, de manera que se sientan movilizados a introducirlo en el dictado de sus clases.

Grafos, no se encuentra, en general, en los currículos de ninguno de los niveles educativos; es relativamente nuevo, en él queda aún mucho por descubrir.

> *"En definitiva, uno nunca llega al punto de poder usar su creatividad. No parece haber nada por hacer, como si todo estuviera contestado, todo dicho…y no solo no es así, sino todo lo que hay por descubrir o inventar es de un volumen increíble. Miles de matemáticos en todo el mundo piensan problemas cuya solución se ignora, y no sólo hoy, porque hay preguntas que se plantearon hace cuatrocientos años y aún no se sabe qué decir al respecto. Es hora, entonces, de buscar diferentes maneras de seducir…"* (Paenza, 2008)

A modo de síntesis, puede establecerse que existen distintos argumentos para introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en los currículos de los distintos niveles educativos. Citaremos para tal fin el texto de Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997), donde se detallan los siguientes puntos:

- Referido a la aplicabilidad: en los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando diversos modelos en distintas áreas.
- Referido a la accesibilidad: para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.
- Referido a la atracción: existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.
- Referido a la adecuación: a aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina es apropiada pues puede dar la posibilidad de un nuevo comienzo.

Contenidos a desarrollar

Es muy amplia la variedad de contenidos que se desprenden de la teoría de grafos y más aún, la cantidad de ejemplos posibles; para acotarlos, en función del tiempo permitido por este curso son seleccionados aquellos que dan el puntapié inicial para empezar a comprender esta teoría. Nos centraremos tanto en el desarrollo teórico, como en narrar las experiencias que resultan muy significativas para transmitir y motivar la búsqueda de nuevos conocimientos en cada participante desde el ámbito personal, como también en la transmisión a sus alumnos. Cada docente generará sus propias herramientas para llevar al aula, pero ofrecemos la experiencia para poder graduar los contenidos.

Los temas que se presentarían en el curso se dan a continuación, junto a ciertos conceptos que se considera pertinente aclarar:

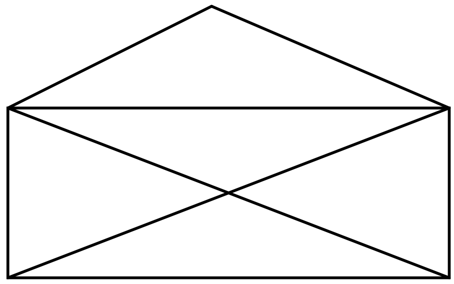
Recorridos Eulerianos

El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) escribió el primer artículo científico relativo a grafos, el que apareció en San Petersburgo, donde a partir de un problema concreto se hace la pregunta *¿en cuáles grafos se puede encontrar un camino cerrado que recorra todas las aristas una sola vez*? Esta pregunta termina dando origen a los dos siguientes teoremas:

1. *Un grafo conexo con todos sus vértices de grado par contiene un camino cerrado que pasa una y sólo una vez por cada una de las aristas y es llamado camino euleriano cerrado.*

2. *Un grafo conexo contiene un camino S_{ab} que pasa una sola vez por cada arista si y sólo si a y b son los únicos vértices de grado impar y es llamado camino euleriano abierto*.

El problema euleriano está relacionado directamente con el de las figuras unicursales, que son las que pueden ser recorridas de un solo trazo sin repetir segmentos. Un entretenimiento muy conocido y relacionado con este concepto es el comúnmente denominado: "*figura del sobre*", que se presenta a continuación:



Grafo que representa al juego del sobre

Como en este grafo hay sólo dos vértices de grado impar, existe camino euleriano abierto, para dibujar la figura sin levantar el lápiz ni repetir aristas. Debe comenzarse el trazado en uno de los dos vértices inferiores y finalizar en el otro.

Lema del apretón de manos

Es un importante resultado dentro de la teoría de grafos, que se debe también al matemático suizo Leonhard Euler, que dice: "*en cualquier grafo la suma de los grados de los vértices es par, es decir que en cualquier grafo existe un número par de vértices de grado impar*".

Grafos planares

Son aquellos grafos que pueden dibujarse en el plano de manera que sus aristas sólo se corten en vértices del grafo. En los grafos planares conexos la diferencia entre la suma del número de vértices y de regiones y el número de aristas es igual a 2 (vértices + regiones − aristas = 2). Este concepto es el correspondiente a un conocido pasatiempo; en él se pregunta si es posible proveer de luz, agua y electricidad, a tres casas, de forma tal que las respectivas redes de distribución, supuestas en un mismo plano, no se intersequen. Contestar a esta pregunta equivale a determinar si el grafo determinado es planar. Como no lo es, se puede afirmar que no es posible que las redes de distribución no se superpongan.

Coloreo de grafos

Un grafo es coloreado de manera tal que a vértices adyacentes correspondan colores diferentes, el número mínimo de colores con el que puede ser coloreado es denominado el número cromático del grafo. Es importante destacar que para colorear cualquier grafo planar es suficiente con cuatro colores. El problema que parece haber dado origen a este tema es el mencionado por Moebius en 1840 y es consecuencia de una hipótesis de los fabricantes de mapas, que dice: "*Supuesto que cada país está constituido por una única región conexa y que toda frontera entre países está formada por arcos de curva (no las hay constituidas por un solo punto) todo mapa sobre un plano, o equivalentemente sobre la superficie de una esfera, puede colorearse utilizando a lo sumo cuatro colores y de forma que países limítrofes tengan colores distintos*". Este problema tuvo en vilo por más de un siglo a los más famosos matemáticos del mundo, recién fue demostrado en 1976 por Appel y Haken.

Grafos bipartitos

Son aquellos grafos en los cuales el conjunto de vértices puede descomponerse en dos subconjuntos disjuntos A y B, tales que sólo hay aristas entre A y B. Todo grafo bipartito puede colorearse con 2 colores.

El grafo que representa al problema de los recursos es bipartito, cada uno de los tres vértices que representan a las casas está unido con cada uno de los tres vértices que representan a los servicios.

Grafo completo

Un grafo es completo cuando cada vértice está relacionado mediante una arista con todos los demás. El número cromático de un grafo completo de n vértices es igual a n.

Grafo valuado

Cuando a cada arista del grafo se le asocia un peso o valor.

Árbol

Son grafos conexos que no tienen ciclos. En los árboles de n vértices hay siempre un número igual a (n-1) aristas. El concepto de árbol surgió en estudios sobre redes eléctricas y también en otros referidos a química, esto fue aproximadamente

100 años después de la aparición del primer escrito de Euler, que fue mencionado anteriormente. En la actualidad tiene muchas aplicaciones en algoritmos para computación.

Un árbol minimal cubriente de un grafo G es el árbol de menor valor o peso que contiene a todos los vértices del grafo G y un árbol maximal cubriente de un grafo G es el árbol de mayor valor o peso que contiene a todos los vértices del grafo G y

Recorrido hamiltoniano

Es un recorrido que pasa una y solo una vez por cada uno de los vértices del grafo. Tiene aplicaciones en muchos problemas, el más conocido, sea probablemente el denominado “El viajante de Comercio”.

Este último tema es aún hoy un problema abierto, pero es importante que los docentes, sobre todo de la enseñanza media, cuenten con herramientas de este tipo. Cabe aclarar que los alumnos no necesitan una base matemática importante para poder comprenderlo y de esta manera tienen una visión distinta de la matemática, pues tienen la posibilidad de comprender que no está “*todo resuelto*” en esta disciplina, creencia que, en general, es muy fuerte en ellos.

A partir de las experiencias llevadas a cabo y atendiendo a que un currículo debe estar bien articulado a través de los diferentes niveles, se da, a continuación, una posible graduación de los contenidos:

- *Nivel Inicial*

En este nivel, uno de los ejes de la matemática es la construcción del espacio, por eso es factible trabajar los conceptos de cierre, vecindad, separación y orden. Los chicos pueden jugar realizando distintos recorridos en un grafo (los vértices son lugares indicados con dibujos, por ejemplo), sobre todo en el sentido hamiltoniano, ya que es más fácil para ellos, pasar por determinados lugares y no por determinados caminos.

- *Primera parte de la enseñanza primaria*

En este ciclo se pueden usar los grafos para representar situaciones concretas. El pensamiento del niño de esta edad hace que perciba cada problema individualmente, sin aún captar las regularidades, pero sugerimos enfrentarlos a una gran variedad de situaciones diferentes y entretenidas, que irán desarrollando la intuición, base "fértil" para futuras generalizaciones y comprensión de propiedades.

También se puede hacer que los niños coloreen grafos o regiones, tratando que lo hagan con la menor cantidad de colores posibles, a esta edad no lo harán de manera algorítmica, lo harán, en general, por ensayo y error.

- *Segunda parte de la enseñanza primaria*

Se continuará trabajando con grafos que representen situaciones cotidianas, un poco más complejas que en el nivel anterior, poniendo la mirada en clasificaciones sencillas y en la definición de los elementos del grafo, para estimular la búsqueda de regularidades, discutir sus propias conjeturas y obtener conclusiones.

Se dan aquí los primeros pasos hacia la argumentación y formulación de hipótesis, aunque luego la manera de verificarlas o refutarlas siga siendo la realización reiterada de la experiencia. Ya en este nivel son capaces de hallar generalizaciones, por ejemplo, las condiciones de existencia de recorridos eulerianos abiertos y cerrados.

Se puede trabajar en este nivel con problemas que tengan solución utilizando el coloreo de grafos y también con el lema del apretón de manos, es importante destacar que este problema tiene cierto acercamiento al concepto de infinito.

- *Primera parte de la enseñanza secundaria*

En esta etapa se producen cambios cognitivos en los alumnos, ellos pueden acceder a un mejor nivel de abstracción y representación que en los años anteriores. Por lo tanto, en este ciclo, podrán plantearse los problemas de grafos como tales, sin necesidad de estar ligados a un problema concreto, realizando razonamientos propios de la matemática discreta y generalizando. Se puede también trabajar de manera inversa, darles grafos y pedir que ellos busquen situaciones que puedan ser representados por estos.

Pueden trabajar con grafos planares, encontrar la relación de Euler a partir de ejemplos concretos. En este nivel los alumnos están en condiciones de realizar justificaciones de la misma, por supuesto acordes a sus edades.

Como en esta etapa se dan los primeros pasos hacia un pensamiento lógico-formal, se debe seguir estimulando la capacidad de conjeturar, hacer uso de las propiedades ya conocidas, realizar justificaciones. También se debe hacer que encuentren algunos algoritmos, por ejemplo, los necesarios para encontrar árboles minimales y maximales cubrientes. Citando a Landa, "*Enseñar a los alumnos a descubrir procesos es más valioso que dárselos ya formulados*".

- *Segunda parte de la enseñanza secundaria*

Los estudiantes se encuentran plenamente en la etapa de desarrollo del pensamiento formal, ya son capaces de razonar con hipótesis verbales y al razonar sobre hipótesis la realidad se vuelve secundaria en relación con la posibilidad, lo real se subordina a lo posible, justamente la deducción lógica es uno de sus instrumentos. Por lo tanto, en este nivel se puede presentar a los alumnos situaciones para que ellos realicen demostraciones y también problemas en los cuales deban plantear distintas conjeturas y evaluar el valor de verdad de las mismas, con justificaciones ya más formales. Cabe aclarar, que es necesario y fundamental que los estudiantes reconozcan el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de la matemática.

En este nivel es interesante que los alumnos hallen la relación entre grafos y poliedros, o equivalentemente entre la relación de Euler trabajada en el nivel anterior y la relación poliedral, ya que es muy importante que los estudiantes trabajen con distintas representaciones.

Con respecto a los temas, se profundizarían los vistos en el nivel anterior y se incluirían algunos nuevos. Un tipo de actividad interesante es que los alumnos encuentren algoritmos y que los escriban formalmente, ya sea para hallar árboles minimales y maximales cubrientes, para coloreo óptimo o para casos relacionados con los recorridos eulerianos.

Bibliografía

Appel, K. y Haken, W. (1989). *La solución del problema de los cuatro colores*. Investigación y Ciencia. Número 15. Pags. 78-91. Buenos Aires. Argentina.

Ausubel, D. (1978). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas, México.

Braicovich, T. (2005). *Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica*. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina.

Braicovich, T., Caro, P., Cerda, V., Oropeza, M., Osio, E., Reyes, C. (2009) *Introducción a la Teoría de Grafos*. Editorial Universitaria Educo. Argentina.

Brousseau, G. (1986). *Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques*, en Recherches en Didactique des Mathematiques, Vol. 7 Nº 2.

Coriat, M. (2004). *Algunos usos escolares de los grafos*. Revista de Didáctica de la Matemática. Universidad Complutense de Madrid.

Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. Dover, Nueva York.

Chiappa, R. (1989). *Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos*. Revista de Educación Matemática. Vol 1. N° 4. Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de Córdoba.

Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.

Kenney, M. and Hirsh, C. (1991). "*Discrete Mathematics across the curriculum K12 Yearbook*". National Council of Teachers of Mathematics. Reston,Virginia.

Menéndez Velazquez, A. (1998). *Una breve introducción a la Teoría de Grafos*. (1998) SUMA: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Volumen 28.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. (2003). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. España.

Paenza, A. (2005). *Matemática…¿estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades*. Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.

Paenza, A. (2007). *Matemática…¿estás ahí? episodio* 3. Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.

Paenza, A. (2008). *Matemática…¿estás ahí? episodio* 100. Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.

Rosentein, J., Franzblau, D., Roberts, F. Editores (1997). *Discrete Mathematics in the Schools*. Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.

Santaló, L: (1993). *Matemática* 1. *Iniciación a la creatividad*. Ed. Kapelusz. Buenos Aires.

Scaglia, S., Renzulli, F., Gotte, M. (2008). *Propuesta para mejorar la demostración en el nivel terciario*. VII CAREM. Santa Fe. Argentina.

Wilson, R. (1979). *Introduction of Graph Theory*. Longman. New York.