La Geometría de los grafos o los grafos de los poliedros

Teresa Braicovich [1]

Resumen

En esta conferencia se presentarán las conclusiones de una investigación de tipo cualitativa llevada a cabo en diferentes establecimientos educacionales, de distinto contexto social, con el fin de analizar si sería positivo introducir el tema grafos en las currículas escolares. A partir del análisis de las experiencias llevadas a cabo, se concluyó que el trabajar con algunos conceptos de grafos hace que los alumnos: realicen razonamientos matemáticos típicos de la matemática discreta, intuyendo, explorando, descubriendo y planteando diversas conjeturas, las que luego validarán o refutarán, con justificaciones adecuadas a sus edades. También pueden utilizar a los grafos como "organizadores" y facilitar la comprensión y el aprendizaje, realizando representaciones y modelizaciones de situaciones cotidianas. Por último, el tema resulta motivador para los alumnos, dando la posibilidad de un cambio de actitud frente a la asignatura matemática.

En esta conferencia, además de exponer estas conclusiones, se hará referencia a la didáctica y metodología a utilizar en los distintos niveles educativos.

Por último, se presentarán, a modo de ejemplo, actividades que relacionan la geometría y los grafos, en particular los poliedros eulerianos y los grafos planares.

Introducción

El tema grafos, que es el que nos ocupa, no se encuentra, en general, en las currículas escolares, es una temática relativamente nueva en la que aún queda mucho por descubrir.

---

[1] Universidad Nacional del Comahue -Argentina

> “*Los chicos que se gradúan hoy del colegio secundario, aún aquellos que tienen una sólida formación en álgebra, geometría y trigonometría, están casi 400 (cuatrocientos) años atrasados con respecto a los que es la matemática de punta hoy. Es decir: aprenden lo que se sabía hace ya cuatrocientos años. Por eso, la mayoría de las cosas resultan aburridas e inexplicables. Peor aún: de difícil aplicación”….¿Quién dijo que se sabía “todo”? El solo hecho de que “aceptemos” esto como posible demuestra qué lejos estamos del contacto con la “matemática real”, la que investiga porque no sabe, la que es curiosa y atractiva, la que es seductora y útil. La que hay que mostrar, la que hay que sugerir*.” (Paenza, 2007).

Con el fin de realizar un análisis sobre la factibilidad de introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en las currículas escolares se llevó a cabo una investigación de tipo cualitativa. Se realizaron experiencias en varios establecimientos educacionales públicos, de distintos niveles educativos y de diferentes contextos sociales (establecimientos públicos de radio céntrico, de radio periférico, rurales y de gestión privada). Además, se dictaron talleres a docentes de nivel primario, medio y universitario con el fin de analizar si consideraban accesible el tema para ser dado a los alumnos y también conocer su opinión respecto de la inclusión del mismo en las distintas currículas.

A partir de este estudio, se concluyó que la inclusión de ciertos conceptos de la teoría de grafos es positiva, pues hace que:

- Los alumnos realicen razonamientos matemáticos típicos de la matemática discreta, mediante la intuición, la exploración, el descubrimiento, el planteo de distintas hipótesis y la corroboración, o no de las mismas. Siempre atendiendo a que el alumno debe apropiarse del conocimiento matemático, “*el razonamiento y la demostración matemáticos proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos. Las personas que razonan y* *piensan analíticamente tienden a percibir patrones, estructuras o regularidades…y conjeturan y demuestran*". (NCTM, 2003).

- Los estudiantes sean capaces de utilizar a los grafos como "*organizadores*" para así facilitar la comprensión y por lo tanto el aprendizaje, realizando representaciones y modelizaciones utilizando esta estructura matemática. "*los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para: crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas, para seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas…*". (NCTM, 2003).
- Se trabaje en un entorno motivador, donde los alumnos pueden desarrollar su creatividad, su ingenio, sus conocimientos, pero en cierta forma despojados de concepciones previas sobre su propio accionar en matemática. Esto, sin duda, es importante, ya que contribuye a que aumenten su autoestima y por ende cambien de actitud frente a esta asignatura.

Grafos y la enseñanza

> *"Escribí este libro con varios objetivos: enseñar al lector algunos de los temas vigorosos y excitantes del campo de la teoría de grafos, mostrar que los grafos son aplicables en una gran variedad de campos, dentro y fuera de la matemática, incrementar los conocimientos de los estudiantes y facilitar las demostraciones o pruebas matemáticas y por último, no por ser lo menos importante, para que disfruten con la matemática".*

Prólogo del libro "*Introductory Graph Theory*".
G. Chartrand (1985).

En una primera parte se hará un sucinto comentario sobre la Teoría de Grafos, desde el punto de vista de la matemática y también de la educación.

Desde el primer artículo publicado por Leonard Euler (1707–1783), en las Actas de la Academia de San Petesburgo en 1736, con el problema denominado “*Los puentes de la ciudad de Königsberg”*, que sentó una de las piedras angulares de la topología, el tema grafos no ha dejado de preocupar a todas las generaciones de matemáticos. A partir del año 1936, cuando König publicó el libro *“Theorie der endlichen und unendlichen Graphen”*, relacionando grafos con diagramas moleculares y redes eléctricas, esta teoría se convirtió en una disciplina autónoma que atrajo a matemáticos de todas las épocas y es hoy un campo abierto de investigación, que seguramente seguirá siéndolo durante mucho tiempo, tanto desde la teoría matemática como desde los contenidos educativos. Es importante mencionar que esta teoría en sus comienzos se ocupaba principalmente de pasatiempos y rompecabezas, sin embargo, avances posteriores en la matemática y especialmente en sus aplicaciones la han impulsado en gran medida, siendo actualmente una rama de la matemática que se encuentra en pleno auge.

En el siglo XIX se usaban los grafos en áreas tales como circuitos eléctricos o diagramas moleculares, en la actualidad estos son una herramienta natural y tienen muchas aplicaciones a cuestiones de carácter práctico: emparejamientos, problemas de transporte, flujo en redes, programación, entre otros y además está presente en campos tan dispares como la economía, la sicología y la biología.

Los temas trabajados con los alumnos en la investigación llevada a cabo fueron, entre otros, recorridos eulerianos, recorridos hamiltonianos, planaridad, coloreo y árboles. Los instrumentos de evaluación en esta investigación, de tipo cualitativa, fueron: las observaciones de las clases, las producciones de los alumnos, las opiniones de los docentes asistentes al taller y también de los que se encontraban a cargo de los cursos en los cuales se desarrollaron las distintas experiencias. Además se tuvieron en cuenta, para realizar el análisis, las entrevistas cognitivas realizadas a un grupo de alumnos al año de concluidos los encuentros mantenidos con ellos.

Es importante hacer hincapié en la importancia de dar actividades a nuestros alumnos que no sean una mera ejercitación rutinaria, sino aquellas que hagan movilizar los conocimientos previos y engendrar nuevos para lograr resoluciones correctas, haciendo que los propios estudiantes sean quiénes construyan el conocimiento, proponer actividades que requieran de la elaboración de conjeturas, de su justificación y de su posterior demostración. "*El tratamiento de la demostración formal sin realizar previamente un acercamiento a través del planteo de conjeturas, formulación de hipótesis, desarrollo de argumentos, conduce a un aprendizaje memorístico y a confundir el propósito de la demostración*". (Scaglia y otras, 2008).

A modo de síntesis, puede establecerse que existen distintos argumentos para introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en las currículas de los distintos niveles educativos. Citaremos para tal fin el texto de Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997), donde se detallan los siguientes puntos:

- <u>Referido a la aplicabilidad</u>: en los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando diversos modelos en distintas áreas.
- <u>Referido a la accesibilidad</u>: para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.
- <u>Referido a la atracción</u>: existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.
- <u>Referido a la adecuación</u>: a aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina es apropiada pues puede dar la posibilidad de un nuevo comienzo.

Grafos y poliedros

A modo de ejemplo, en esta conferencia se presenta la relación entre los grafos planares y los poliedros. En NCTM (2003), dentro de los objetivos para los últimos tres años de la enseñanza media, se plantea utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la representación geométrica en la enseñanza y dentro de este objetivo se propone utilizar a los grafos para modelizar y resolver problemas. Para esto comenzaremos mencionando el concepto de planaridad de un grafo.

Una *representación en el plano* de un grafo $G=(V,U)$ es una función *f* tal que a cada vértice $v \in V$ le hace corresponder un punto del plano y a cada arista $a \in U$ le hace corresponder una curva simple con extremos en los puntos del plano correspondientes a los puntos extremos de la arista *a*, de manera que tal curva no contiene otros puntos correspondientes a vértices del grafo. Un grafo *G* admite distintas representaciones, sin embargo, es importante destacar que una representación determina un único grafo.

Un grafo *G* se dice *grafo planar* si admite una representación en el plano tal que curvas correspondientes a aristas distintas no se cortan salvo, tal vez, en sus puntos extremos. Una tal representación se dice una *representación plana* de *G* o una *inmersión* de *G* en el plano. Un *grafo plano* es un grafo planar con una dada representación plana.

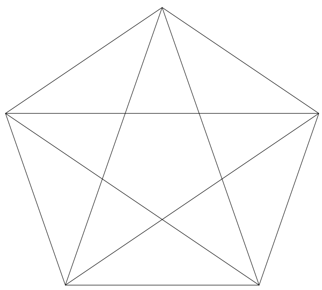
Para la introducción del tema se utilizará un antiquísimo problema, el llamado comúnmente "*Problema de los recursos*". En el mismo, es esencial decidir si se puede o no dibujar un grafo en el plano sin intersecciones entre puntos interiores de las aristas. El enunciado se presenta a continuación:

> "*En un terreno se han construido tres casas y se han excavado tres pozos de agua para uso de sus ocupantes. El clima y la naturaleza del terreno son tales que es frecuente que uno u otro de los pozos se seque; por ello, es importante que los habitantes de*

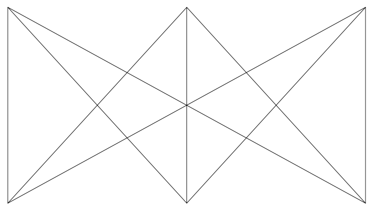
cada una de las casas tengan acceso a cada uno de los tres pozos. Al cabo de un tiempo, los residentes a, b y c desarrollan una fuerte antipatía mutua, por lo que quieren construir caminos al mismo nivel hasta los tres pozos x, y, z, de manera que puedan evitar el encontrarse en el camino de ida y de vuelta a los pozos, la pregunta es si será posible hacer esto".

Cabe aclarar que este mismo problema suele ser presentado de otras maneras, por ejemplo, tener desde las tres casas conexiones a los servicios de gas, agua y luz mediante cañerías que no se crucen pero que se encuentren en el mismo plano.

Con esta situación como disparadora se presentará la *Conjetura de Kuratowski*. En el año 1930, el matemático polaco Kazimierz Kuratowski da a conocer un teorema en el que demuestra que un grafo es planar si y sólo si, ignorando sus vértices de grado dos, no contiene subgrafos isomorfos al bipartito completo $K_{3,3}$ o al completo K_5, ambos grafos se esquematizan a continuación:



Grafo K_5



Grafo $K_{3,3}$

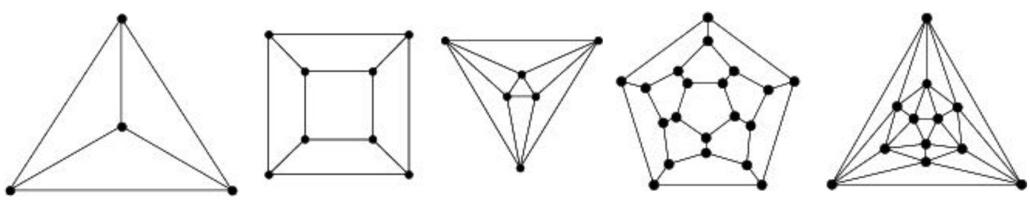
La Fórmula de Euler para grafos dice: "Sea G un grafo planar conexo con v vértices, a aristas y r regiones. Entonces se tiene que: $v - a + r = 2$" Cabe mencionar que esta es equivalente a la *Fórmula Poliedral de Euler*, tomando cantidad de caras del poliedro en lugar de cantidad de regiones del grafo.

Dado un grafo planar G, se puede construir un nuevo grafo G', llamado <u>*grafo dual*</u> de G, el mismo se construye asociando un vértice a cada región del grafo G y si una arista limita dos regiones en G, se añade en el grafo dual G' una arista uniendo los vértices correspondientes a esas regiones. Como dos regiones pueden estar limitadas por más de una arista en común, pueden existir aristas paralelas. Asimismo, en el grafo dual pueden existir bucles, los mismos representan aristas que no limitan distintas regiones en el grafo G .

En un <u>*poliedro regular*</u> todas las caras son polígonos regulares congruentes entre sí y a cada uno de sus vértices concurre el mismo número de aristas. Es importante recordar que existen exactamente cinco poliedros regulares, los mismos son llamados *sólidos platónicos*, en honor a Platón, por ser quién los mencionó por primera vez en su libro Timeo. Se presentan estos a continuación:

Tetraedro **Cubo** **Octaedro** **Dodecaedro** **Icosaedro**

Atendiendo a la importancia que tiene el trabajar con distintas representaciones, se representan los grafos planares asociados a los poliedros regulares. Tomaremos cada vértice del poliedro como un vértice del grafo y uniendo los mismos con aristas si son adyacentes, obteniéndose así los grafos que se presentan a continuación, dados en el mismo orden que los poliedros:



Un grafo regular plano G es <u>*completamente regular*</u> si su grafo dual G' es también regular y existe una correspondencia entre los sólidos platónicos y los grafos completamente regulares.

Además de la representación realizada anteriormente, se pueden representar los poliedros mediante grafos en los cuáles cada vértice del grafo represente una cara del poliedro y los mismos estén unidos mediante aristas si las caras que representan son contiguas. Comparando las dos representaciones realizadas de cada poliedro se tiene que:

- Son iguales para el tetraedro, pues el mismo coincide con su grafo dual y además el poliedro conjugado de un tetraedro es un tetraedro.
- El grafo que representa al cubo realizado en primer lugar coincide con el realizado en segundo lugar para el octaedro y viceversa, esto nos permite observar que estos dos poliedros son conjugados.
- Entre el dodecaedro y el icosaedro sucede lo mismo que entre el cubo y el octaedro, es decir son poliedros conjugados.

Se presenta este ejemplo, en el que se hace hincapié en grafos duales, poliedros regulares, grafos completamente regulares y poliedros conjugados, con el fin de proporcionar a los docentes una puerta para introducir el tema grafos en alumnos de los últimos años de la enseñanza secundaria.

Se puede seguir trabajando en este tema, a modo de ejemplo, con el coloreo de grafos, si se quieren construir los poliedros de manera que caras contiguas tengan distinto color, se puede hallar el número cromático del grafo que lo representa, siendo este valor la cantidad de colores necesarios para construir el poliedro con las especificaciones pedidas. Cabe aclarar que en este caso se debe trabajar con la representación en la que los vértices del grafo son las caras del poliedro.

Referencias

Appel, K. y Haken, W. (1989). "*La solución del problema de los cuatro colores*". Investigación y Ciencia. Número 15. Pags. 78-91. Buenos Aires. Argentina.

Ausubel, D. (1978). "*Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*". Trillas, México.

Braicovich, T. (2005) "*Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica*". Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.

Brousseau, G. (1986). "*Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques*", en Recherches en Didactique des Mathematiques, Vol. 7 Nº 2.

Coriat, M. (2004) *Algunos usos escolares de los grafos*. Revista de Didáctica de la Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.

Chartrand, G. (1985). "*Introductory Graph Theory*". Dover, Nueva York.

Chiappa, R. (1989). "*Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos*". Revista de Educación Matemática. Vol 1. N° 4. Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de Córdoba.

Guzmán, M. (1984). "*Juegos matemáticos en la enseñanza*" Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.

Kenney, M. and Hirsh, C. (1991). "*Discrete Mathematics across the curriculum K12 Yearbook*". National Council of Teachers of Mathematics. Reston,Virginia.

Menendez Velazquez, A. (1998) *Una breve introducción a la Teoría de Grafos*. SUMA: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Volumen 28.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. España.

Paenza, A. (2005). "*Matemática…¿estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades*". Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.

Paenza, A. (2007). "*Matemática…¿estás ahí? episodio* 3". Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.

Paenza, A. (2008). "*Matemática… ¿estás ahí? episodio* 100". Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.

Rosentein, J., FRANZBLAU, D., ROBERTS, F. Editores. (1997)."*Discrete Mathematics in the Schools*". Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.

Santaló, L: (1993). "*Matemática* 1. *Iniciación a la creatividad*". Ed. Kapelusz. Buenos Aires.

Scaglia, S., Renzulli, F., Gotte, M. (2008). Propuesta para mejorar la demostración en el nivel terciario. VII CAREM. Santa Fe. Argentina.

Wilson, R. (1979). "*Introduction of Graph Theory*". Longman. New York.