Registros de representación semiótica del concepto de función real en estudiantes de humanidades

José Chiroque Baldera [1]

Resumen

En esta investigación se considera como marco teórico la teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Raymond Duval. Desde este enfoque no puede haber aprehensión conceptual de un objeto sin algún representante de éste, además de que tal objeto no debe ser confundido con su representación en varios registros.

Se buscará identificar, a partir de situaciones problemáticas, las distintas representaciones que hacen los estudiantes sobre el objeto función real y cómo realizan el paso de una representación a otra. Se describirán las representaciones más frecuentes que hacen los estudiantes cuando se les plantea situaciones sobre funciones reales. Y finalmente se analizará si los estudiantes logran una comprensión integral de la función real; es decir, si se produce la coordinación de al menos dos registros de representación.

El problema de investigación

Los estudiantes de las carreras de humanidades siempre reciben, como parte de su formación, cursos de Matemáticas. En la mayoría de los casos, la finalidad de estos es integrar las matemáticas a las diversas actividades de la vida cotidiana, enriquecer su cultura general y contribuir con su formación profesional. Todo esto, además de ofrecerles los conocimientos elementales que le servirán como herramientas para enfrentar con facilidad las asignaturas propias de su especialidad y de ser pieza principal para su formación científica.

---

[1] Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo- Perú

Sin embargo, la forma como los programas de estudio y los libros de texto abordan estos conocimientos es, en general, a través del "método tradicional". En este método en primer lugar se exponen las definiciones y propiedades generales para luego ir a la resolución de problemas como aplicaciones de los distintos conceptos mediante un procedimiento algorítmico. Posteriormente, se realizan más problemas en contextos intramatemáticos incrementando su complejidad, ocurriendo que en la mayoría de las veces se omitan situaciones donde se aprecie la utilidad de las matemáticas.

Hitt (1998) refiere que la enseñanza de las matemáticas con el "método tradicional" no contribuye a la preparación de mejores estudiantes. Además, las tareas individualizadas de resolución de problemas aplicando algoritmos no despiertan el interés del estudiante y no permiten apreciar la utilidad de las mismas.

Por otro lado, el fracaso de algunos estudiantes se debe a la carencia de articulación entre diversas representaciones; tal como lo expresa Hitt (1998) haciendo referencia a que el estudiante desarrolla algoritmos en el sistema algebraico sin una idea clara del objetivo que persigue. Esto es notorio en el quehacer diario de los estudiantes en los cursos de matemáticas, pues estos hacen diferentes representaciones de objetos matemáticos, usan representaciones numéricas, algebraicas, gráficas y algunas veces verbales, pero sin articularlas.

Nuestro interés entonces se centra en averiguar las distintas representaciones que hacen los estudiantes sobre el objeto función real, cómo realizan el paso de una representación a otra y cómo coordinan al menos dos registros de representación.

Es así, que realizamos un estudio exploratorio que considera como referencia el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de nociones matemáticas, en particular el concepto de función real, que ha sido estudiado bajo la modalidad del aprendizaje colaborativo.

El trabajo es relevante no sólo porque analiza las distintas representaciones que hacen los estudiantes sobre el objeto función real, sino por el papel que juegan estos en la comprensión de dicho concepto.

Objetivos de la investigación

Al final de la investigación se quiere lograr los siguientes objetivos:

- Determinar a partir de situaciones problemáticas las distintas representaciones que hacen los estudiantes sobre el objeto función real y cómo realizan el paso de una representación a otra.
- Describir las representaciones más frecuentes que hacen los estudiantes cuando se les plantea situaciones sobre funciones reales.
- Analizar si los estudiantes logran una comprensión integral de la función real. Es decir, analizar si se produce la coordinación de al menos dos registros de representación.

Marco teórico:

En esta investigación se considera como marco teórico la teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Raymond Duval (1998). Desde este enfoque no puede haber aprehensión conceptual de un objeto sin algún representante de éste, además de que tal objeto no debe ser confundido con su representación en varios registros.

Duval enfatiza que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracteriza por sus signos propios y la forma en que éstos se organizan. Es decir, un registro está constituido por signos en el sentido más amplio de la palabra: trazos, símbolos, íconos y estos signos están asociados de manera interna y externa. De manera interna, según los lazos del contexto y de pertenencia a una misma red semántica. De manera externa, según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones; estas reglas son propias de la red semántica involucrada.

Por otro lado, el concepto de función admite una gran variedad de diferentes Registros de Representación; por lo que este trabajo se interesa en analizar los distintos registros que se abordan en la aprehensión del concepto de función, el cual se puede representar al menos de cuatro maneras: mediante tablas, gráficas, expresiones algebraicas y expresiones verbales, mediadas por el lenguaje cotidiano.

Metodología

La metodología que opera en la investigación es el estudio de casos ya que constituye una óptima herramienta metodológica empleada para describir exhaustivamente la ocurrencia de un problema o un fenómeno dentro de un contexto definido por el investigador. Además esta metodología permite analizar la riqueza, profundidad y calidad de la información, más no la cantidad ni la estandarización de un determinado grupo.
Para la investigación se utiliza específicamente la metodología Ingeniería Didáctica que se ubica en los registros de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, M. 1995). Esta metodología se caracteriza por presentar un esquema experimental basado en cuatro fases:

Fase 1: *Los análisis preliminares:-* Se refiere propiamente al objeto en estudio, al análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, al análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, al análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, al análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva, por supuesto teniendo en cuenta los objetivos de la investigación.

Fase 2: *La concepción y el análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería:-* Es la fase donde el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Se toman en cuenta variables macrodidácticas y microdidácticas.

Las variables macrodidácticas son ligadas a la dimensión cognitiva, al contenido y al proceso de aprendizaje. Las variables microdidácticas consisten en la organización local de la ingeniería.

Fase 3: *La experimentación:-* En esta fase se lleva a cabo la investigación (o secuencia didáctica).

Fase 4: *El análisis a posteriori y la validación.-* El análisis a posteriori se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. En el proceso de validación interna se describe los comportamientos matemáticos y cognitivos que promovió la secuencia didáctica, las estrategias que utilizan los estudiantes, las dificultades que pueden tener, los errores que pueden cometer y el papel del docente que hizo efectiva la secuencia didáctica

Ejemplo

En este ejemplo hacemos un análisis de una de las situaciones que fueron planteadas, para analizar la comprensión del concepto de función real y funciones elementales.

Situación 1

Use la gráfica de la función f dada en la *Figura 1*, para responder a lo siguiente:

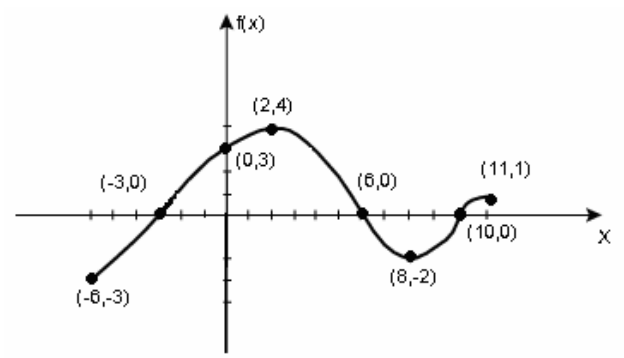


Figura 1

(a) Encuentre $f(0)$, $f(-6)$, $f(6)$ y $f(11)$.

(b) ¿Es $f(2)$ positiva o negativa? ¿Es $f(8)$ positiva o negativa?
(c) ¿Para qué números x es $f(x)=0$?
(d) ¿Cuál es el dominio de f ? ¿Cuál es el rango de f ?
(e) ¿Cuáles son los interceptos con el eje X ?
(f) ¿Cuántas veces intercepta la línea $y=3$ a la gráfica de f ?
(g) ¿Para qué números x es $f(x)>0$?
(h) ¿Cuáles son los interceptos con el eje Y ?
(i) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de f
(j) Encuentre el valor máximo y el valor mínimo a partir de la gráfica de f

Análisis a priori

En la *Situación 1 se* espera que los estudiantes identifiquen valores numéricos; identifiquen cuándo una función es positiva o negativa, determinen intersecciones con los ejes, intersección de gráficas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como identifiquen los máximos y mínimos.
En el inciso (a) se espera que los estudiantes identifiquen los valores numéricos $f(0)$, $f(-6)$, $f(6)$ y $f(11)$ con las parejas $(0,3)$, $(-6,-3)$, $(6,0)$ y $(11,1)$, sin ninguna dificultad. Esto quiere decir que las parejas en la gráfica de la forma (x_0, y_0) la deben identificar con la pareja $(x_0, f(x_0))$ que implicará el valor numérico deseado $f(x_0)=y_0$. Se presenta aquí un fenómeno de congruencia trivial (se da en el mismo registro numérico) entre la pareja (x_0, y_0) y la pareja $(x_0, f(x_0))$, esta congruencia le permitirá al estudiante determinar los valores pedidos.

En el inciso (b) se espera que los estudiantes se preparen para identificar las propiedades de cuando una función es positiva o negativa, es decir que a partir de las parejas (x_0, y_0) que se localizan en el primer y segundo cuadrante indiquen que los valores de $f(x_0)$ son positivos.

Análogamente, un comportamiento esperado es que, a partir de las parejas (x_0, y_0) que se localizan en el tercer o cuarto cuadrante indiquen que los valores de $f(x_0)$ son negativos. Para este caso específico se espera que los estudiantes no tengan dificultad y procedan como lo hicieron en el inciso (a).

En general se espera que el estudiante responda que una función es negativa si $f(x) < 0$ para todo x, excepto en los puntos de corte de la gráfica con el Eje X y que una función es positiva si $f(x) > 0$, para todo x. En este caso general se espera que se presente alguna dificultad debido a que no es lo mismo *identificar algunos puntos* x_0 *para el cual la función es positiva o negativa,* que a *identificar los intervalos para* x *en el cual la función es positiva o negativa*. Esto se verá reflejado cuando los estudiantes respondan el inciso (g).

En el inciso (c) se espera que los estudiantes identifiquen el valor numérico $f(x) = 0$ con las parejas de la forma $(x_0, 0)$ y que a su vez deban identificar con los valores $x_0 = -3, 6\ y\ 10$ (esto equivale hallar los interceptos con el Eje X o interceptar la línea $y = 0$ con la gráfica de f). Se presenta aquí un fenómeno de congruencia trivial entre la pareja $(x_0, 0)$ y el valor x_0. Pueden presentarse algunas dificultades.

En el inciso (d) se espera que los estudiantes identifiquen el recorrido de la variable x y de la variable $y = f(x)$ sin ninguna dificultad, es decir, identifiquen los intervalos $\left[-6, 11\right]$ y $\left[-3, 4\right]$ que representan el dominio y rango de la gráfica de la función. Esta identificación está asociada al cambio del registro gráfico al analítico.

En el inciso (e) se espera que los estudiantes observen los puntos que están sobre el Eje X, luego identifiquen los valores numéricos $f(x)=0$ con las parejas de la forma $(x_0,0)$ sin ninguna dificultad, y según su repuesta al inciso (c) estos deben ser $(-3,0)$, $(6,0)$ y $(10,0)$, que vienen hacer la intersección de la función f con el eje X. Se presenta un fenómeno de congruencia entre este inciso (e) y el inciso (c).

En el inciso (f) se espera que los estudiantes interceptan la gráfica de la recta $y=3$ con la gráfica de la función f de manera análoga como lo hicieron en el inciso (c). Se presenta aquí un fenómeno de congruencia entre la gráfica de la recta $y=3$ y su expresión analítica. En este caso se espera que se presenten dificultades debido a que no se pide específicamente los puntos de intersección con la gráfica de f, si no mas bien cuántas veces intercepta la recta $y=3$ al gráfico de f. Esto se verá reflejado cuando los estudiantes respondan a este inciso.

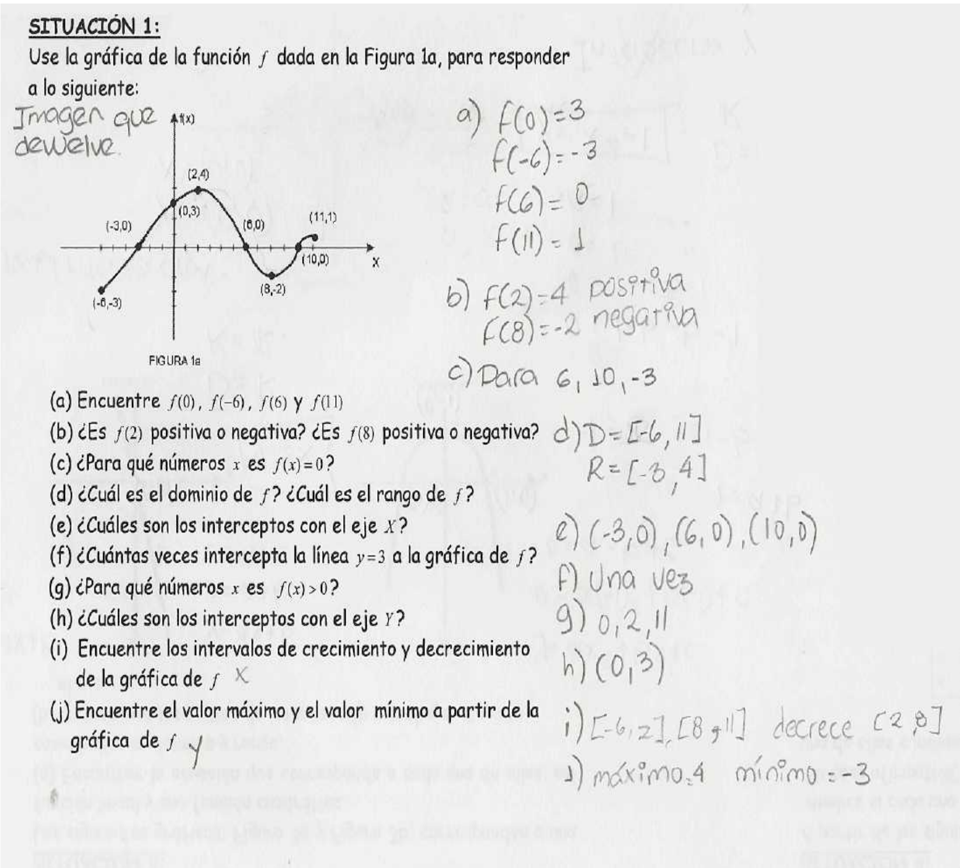
En el inciso (h) se espera que los estudiantes identifiquen el valor numérico $f(0)=y_0$ con las parejas de la forma $(0,y_0)$ y según su repuesta este debe ser $(0,3)$ (esto equivale hallar los interceptos con el Eje Y o interceptar la línea $x=0$ con la gráfica de f).

En el inciso (i) se espera que los estudiantes identifiquen los intervalos de crecimiento $[-6,2]$ y $[8,11]$, y el intervalo de decrecimiento $[2,8]$. Se presenta aquí un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la percepción de la noción de crecimiento y decrecimiento asociada con el hecho de que la gráfica sube o baja.

En el inciso (j) se espera que los estudiantes identifiquen el mayor valor y el menor valor en la gráfica de f, es decir, deben identificar el punto mas alto de la gráfica $(2,4)$ con el valor numérico $f(2)=4$ y el punto mas bajo de la gráfica $(-6,-3)$ con el valor numérico $f(-6)=-3$. Estos valores numéricos $f(2)=4$ y $f(-6)=-3$ representan el máximo y mínimo valor de la gráfica de la función.

Análisis a posteriori

En este caso se observa que el estudiante responde correctamente a la mayoría de los Ítems propuestos en la *Situación 1*. El estudiante presenta algunas dificultades en los incisos (g) y (h), tal como se había previsto en el análisis a priori.



SITUACIÓN 1:

Use la gráfica de la función f dada en la Figura 1a, para responder a lo siguiente:

Imagen que devuelve

FIGURA 1a

(a) Encuentre $f(0)$, $f(-6)$, $f(6)$ y $f(11)$

(b) ¿Es $f(2)$ positiva o negativa? ¿Es $f(8)$ positiva o negativa?

(c) ¿Para qué números x es $f(x)=0$?

(d) ¿Cuál es el dominio de f? ¿Cuál es el rango de f?

(e) ¿Cuáles son los interceptos con el eje X?

(f) ¿Cuántas veces intercepta la línea $y=3$ a la gráfica de f?

(g) ¿Para qué números x es $f(x)>0$?

(h) ¿Cuáles son los interceptos con el eje Y?

(i) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de f X

(j) Encuentre el valor máximo y el valor mínimo a partir de la gráfica de f Y

a) $f(0)=3$, $f(-6)=-3$, $f(6)=0$, $f(11)=1$

b) $f(2)=4$ positiva, $f(8)=-2$ negativa

c) Para 6, 10, -3

d) $D=[-6,11]$, $R=[-3,4]$

e) $(-3,0)$, $(6,0)$, $(10,0)$

f) Una vez

g) 0, 2, 11

h) $(0,3)$

i) $[-6,2]$, $[8,11]$ decrece $[2,8]$

j) máximo 4 mínimo -3

Validación de los resultados

En general la mayoría de estudiantes realizó el cambio de registro previsto, los que presentaron dificultades al responder el inciso (g) fue porque no tuvieron en cuenta el dato “la línea $y = 3$” que se trataba justamente de la función constante $y = 3$ y que es equivalente a la expresión $f(x) = 3$ que significa lo mismo y es la que más utiliza cuando se trata de la función constante.

Referencias bibliograficas

Artigue, M. & Douady, R. & Moreno, L. & Gómez, P. (1995) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericana. S.A. de CV, Bogotá.

Duval, R (1988). Gráficas y ecuaciones : la articulación entre dos registros, Antología de educación matemática, Sección Matemática Educativa del CINVESTAV - IPN

Duval, R (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V. México.

Hitt, F (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the concept f Function. Journal of Mathematical Behavior.

Hitt, E (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed). Investigaciones en Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ibarra, S & Fernández, L (2007). La enseñanza de la función cuadrática en el bachillerato. Resultados de un proyecto de desarrollo docente. Universidad de Sonora. México.