El Problema de Pólya: ¿por qué los estudiantes no construyen estrategias de resolución de problemas (de geometría)?

Josep Gascón [1]

Resumen

En la presentación del taller se explicará brevemente el Problema de Pólya y se mostrará con un ejemplo muy sencillo que la problemática sintética puede constituirse como la razón de ser de la Geometría Analítica escolar (incluyendo la que se estudia en los primeros cursos universitarios).

La actividad matemática del Taller se iniciará con un tipo de problemas de Geometría Analítica escolar en los que el sistema de referencia (arbitrario) está dado de antemano y es transparente. Continuará reformulando estos problemas en el ámbito de la Geometría Sintética (utilizando la técnica de construcción de figuras con regla y compás) y culminará con la elección de un sistema de referencia "ligado" a la configuración geométrica inicial, lo que permitirá llevar a cabo un "estudio de casos" sistemático fruto de la interpretación de las soluciones de un sistema de ecuaciones paramétricas.

Primera Sesión: El Patrón sintético de dos lugares geométricos

Para cada uno de los siguientes problemas enunciados en una versión *analítica particular* (tal como aparecen en los libros de texto de Bachillerato) vamos a poner entre paréntesis el *sistema de referencia arbitrario* en el que está formulado y empezar a estudiar las propiedades intrínsecas (geométricas) del problema.

[1] Universidad Autónoma de Barcelona-España

(1) Empieza proponiendo la versión *euclidiana general* y resuélvelo (con el ***Patrón de los dos lugares geométricos***) como un problema de construcción con regla y compás.

(2) Resuelve a continuación la versión *analítica particular* inicial con la técnica cartesiana, utilizando como guía la resolución con regla y compás.

Segunda Sesión: Proceso de algebrización de la Geometría Sintética

(3) Enuncia la versión *analítica general* y después de elegir un sistema de referencia "adecuado", resuélvelo utilizando *parámetros*.

(4) En función de les relaciones entre los datos, ¿en qué casos el problema tendrá (o no tendrá) solución? ¿En qué casos la solución será única? Interpreta *geométricamente* cada uno de los casos obtenidos (*estudio de casos*).

1. Busca los triángulos ABC con B (2, 1), C (–1, 4) y sabiendo que las longitudes de la mediana y de la altura relativas al lado $BC = a$ son, respectivamente, $m_a = 6$ y $h_a = 8$.

2. Busca las circunferencias tangentes a las rectas $x + y - 10 = 0$ y $x + y - 2 = 0$ que pasen por el punto P (3, 1). ¿Cómo cambia el problema si las rectas no tienen que ser necesariamente paralelas?

3. Busca las circunferencias que tienen el centro sobre la recta de ecuación $x + 2y + 1= 0$ y son tangentes a las rectas $3x + 4y = 0$ y $4x + 3y +1 = 0$.

4. Busca los triángulos ABC con A (3,0), B (–3,0) y sabiendo que la altura relativa al lado c mide $h_c = 6$ y la mediana relativa al lado $BC = a$ mide $m_a = 5$.

5. Busca las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y son tangentes a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$ en el punto (2, 4).

6. Busca los triángulos ABC con A (3, –5), B(0, 2) y sabiendo que las medianas relativas a los lados a y c miden, respectivamente, $m_a = 7{,}5$ y $m_c = 6$.

7. Busca las circunferencias de radio 3 que tienen el centre sobre la recta $2x + 5y = 0$ y son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$.

8. Busca los triángulos ABC, conociendo las longitudes de dos lados $AC = b = 7$ y $AB = c = 8$ y la longitud de la altura $h_a = 5$ relativa al tercer lado $BC = a$.

9. Busca las circunferencias de radio 7 que pasan por el punto P (2, –5) y son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$.

10. Busca los triángulos cuyas medianas miden respectivamente $m_a = 8$, $m_b = 10$ y $m_c = 6$.

Componentes de la Estrategia de Resolución de Problemas de Geometría

1. Técnicas de construcción de *lugares geométricos*.
2. Patrón *sintético* de dos lugares geométricos planos.
3. Patrón *analítico* como desarrollo del sintético.
4. Técnica de asociar un *sistema de coordenadas* a una situación geométrica dada.
5. Modelización algebraica con parámetros y estudio analítico-sintético de casos.

Técnica de los dos lugares Geométricos para Construir Figuras con Regla y Compás

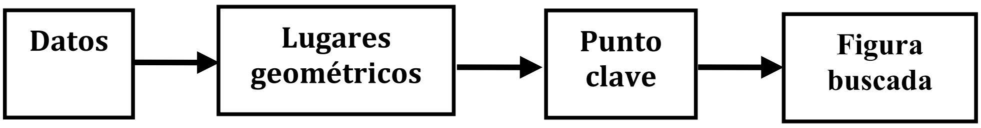
1. Supón el problema resuelto (esto es, que la figura buscada está construida).
2. Reduce el problema a dibujar un punto (“*punto clave*”).
3. ¿Qué condiciones geométricas debe cumplir el punto clave?

4. ¿Se pueden construir con regla y compás los lugares geométricos correspondientes (de los puntos que cumplen cada una de dichas condiciones) a partir de los datos?

3'. Construye con regla y compás los lugares geométricos a partir de los datos.

2'. Dibuja el punto (o los puntos) clave como intersección de los lugares geométricos.

1'. Dibuja la figura buscada a partir del punto clave.



Ejemplo: Construir con regla y compás un triángulo ***ABC*** dados la longitud de un lado: ***AB*** **=** ***c***, y las longitudes de la altura h_c y la mediana m_c relativas a dicho lado ***AB***.