Resolución de problemas de Olimpiadas Matemáticas

Uldarico Malaspina[1], Sergio Vera [1], Jorge Tipe[2], John Cuya [2]

Resumen

Considerando la resolución de problemas, como una forma de hacer matemáticas, presentamos una descripción del desarrollo del taller, incluyendo las situaciones problemáticas que propusimos en él y las respectivas soluciones de las actividades individuales y grupales.

Introducción

El objetivo fundamental es contribuir a la formación matemática de los participantes del taller, a partir de reflexiones individuales y en grupo sobre soluciones de problemas no rutinarios de matemáticas, propios de olimpiadas matemáticas internacionales. Consideramos que la resolución de problemas es fundamental en la formación básica y continua de los profesores, tanto porque en general la resolución de problemas es una forma de hacer matemáticas, como porque el profesor, en ese marco, debe estimular las capacidades de descubrimiento y creatividad de sus alumnos en el proceso de aprendizaje, y es muy importante que él mismo viva la experiencia de afrontar retos similares a los que viven los estudiantes. Para ello, resultan muy pertinentes los problemas de olimpiadas matemáticas.

Este taller resulta importante no sólo por el valor formativo de la resolución de problemas en general, sino también por la institucionalización y relevancia que van teniendo en el Perú las olimpiadas matemáticas. El taller está orientado principalmente a profesores de educación secundaria, pero puede ser útil también a profesores de nivel superior.

---

1 Pontificia Universidad Católica del Perú-Perú
2 Universidad Nacional Mayor de San Marcos-Perú

Metodología

La metodología prevista para el desarrollo de este taller se basa en el aprendizaje colaborativo, partiendo de situaciones problemáticas y estimulando a los participantes a que resuelvan problemas de dificultad graduada en torno a tal situación, en fichas especialmente elaboradas para trabajos individuales y otras para trabajos grupales. El propósito es que la solución de los problemas que se les vaya presentando contribuya a que los participantes examinen distintos aspectos del pensamiento matemático y reúnan elementos para resolver un problema de olimpiadas. Los responsables del taller atienden consultas, valoran las iniciativas, estimulan el análisis de los problemas y ponen en común reflexiones importantes en torno a las soluciones de los problemas. Lo ideal es que haya exposiciones de los grupos, pero esto no siempre se puede hacer por limitaciones de tiempo. Es importante también que alguno de los responsables del taller haga una exposición aclarando e integrando ideas en torno a la situación y los problemas trabajados y que se concluya con la exposición de un aspecto teórico relacionado con la solución de alguno(s) de los problemas.

Situaciones problemáticas

Situación 1: Tablero incaico

En cada casilla de un tablero n x m (n y m números enteros mayores que 1) se escribe un entero no nulo. Dicho tablero se llama *tablero incaico* si en cada una de sus casillas, el número escrito en ella es igual a la diferencia de los números escritos en dos de sus casillas vecinas.
Nota: Se llaman casillas vecinas a aquellas que tienen en común uno de sus lados.

Actividades individuales
I1. Construir tableros incaicos 3x3
I2. Construir tableros incaicos 3x4
I3. Construir tableros incaicos 4x4
I4. Construir tableros incaicos 5x5

Solución

Mostramos tres tableros incaicos en cada caso

I1. Construir tableros incaicos 3x3

2	-1	2
1	1	1
-1	2	-1

2	2	-6
4	4	-4
6	-2	-2

1	-3	-2
-2	-1	-1
5	3	-4

I2. Construir tableros incaicos 3x4

2	-1	2	-1
1	1	1	1
-1	2	-1	2

2	2	-6	2
4	4	-4	-4
6	-2	-2	-2

-2	-1	-4	5
-3	-1	3	1
1	-2	5	4

I3. Construir tableros incaicos 4x4

2	-1	2	-1
1	1	1	1
-1	2	-1	2
1	-2	-1	3

2	2	-6	2
4	4	-4	-4
6	-2	-2	-2
2	4	6	8

-2	-1	-4	5
-3	-1	3	1
1	-2	5	4
-1	2	1	3

I4. Construir tableros incaicos 5x5

2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	1
1	-2	-1	3	2
-1	2	-3	6	4

2	2	-6	2	2
4	4	-4	-4	4
6	-2	-2	-2	6
2	4	6	8	2
4	-2	2	4	-2

-2	-1	-4	5	3
-3	-1	3	1	2
1	-2	5	4	2
-1	2	1	3	1
2	1	1	2	1

Actividades grupales

G1. Examinar si es posible construir tableros incaicos 6x6. En caso afirmativo mostrar y en caso negativo justificar.

G2. Examinar si es posible construir tableros incaicos 11x11. En caso afirmativo mostrar y en caso negativo justificar.

G3. Examinar si es posible construir tableros incaicos *n x n*, para todo *n* > 2. Justificar completamente sus afirmaciones.

Solución

Veremos que es posible construir tableros incaicos *nxn* para todo *n* > 2, con base en los ejemplos de las actividades individuales.

G1. Examinar si es posible construir tableros incaicos 6x6. En caso afirmativo mostrar y en caso negativo justificar.

2	-1	2	-1	2	1
1	1	1	1	1	3
-1	2	-1	2	1	-2
1	-2	-1	3	2	1
-1	2	-3	6	4	3
7	6	8	5	1	2

2	2	-6	2	2	2
4	4	-4	-4	4	4
6	-2	-2	-2	6	-2
2	4	6	8	2	4
4	-2	2	4	-2	6
2	6	4	-2	2	-4

2	-1	2	2	-1	2
1	1	1	1	1	1
-1	2	-1	-1	2	-1
2	-1	2	2	-1	2
1	1	1	1	1	1
-1	2	-1	-1	2	-1

G2. Examinar si es posible construir tableros incaicos 11x11. En caso afirmativo mostrar y en caso negativo justificar.

2	-1	2	-1	2	1	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	1	-2	-1	2	-1	2	1
1	-2	-1	3	2	1	1	-2	-1	3	2
-1	2	-3	6	4	3	-1	2	-3	6	4
7	6	8	5	1	2	7	6	8	5	1
2	-1	2	-1	2	1	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	1	-2	-1	2	-1	2	1
1	-2	-1	3	2	1	1	-2	-1	3	2
-1	2	-3	6	4	3	-1	2	-3	6	4

2	-1	2	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	2	-1	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2
2	1	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1
-1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-1	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2
-1	1	2	1	-2	-1	3	1	-2	-1	3
2	1	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1
-1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-1	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2
-1	1	2	1	-2	-1	3	1	-2	-1	3

2	2	-6	2	2	-6	2	2	2	-6	2
4	4	-4	4	4	-4	-4	4	4	-4	-4
6	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2
2	4	6	2	2	-6	2	2	2	-6	2
2	4	-2	4	4	-4	-4	4	4	-4	-4
-6	-4	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2
2	-4	-2	2	4	6	8	2	4	6	8
2	4	6	2	2	-6	2	2	2	-6	2
2	4	-2	4	4	-4	-4	4	4	-4	-4
-6	-4	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2
2	-4	-2	2	4	6	8	2	4	6	8

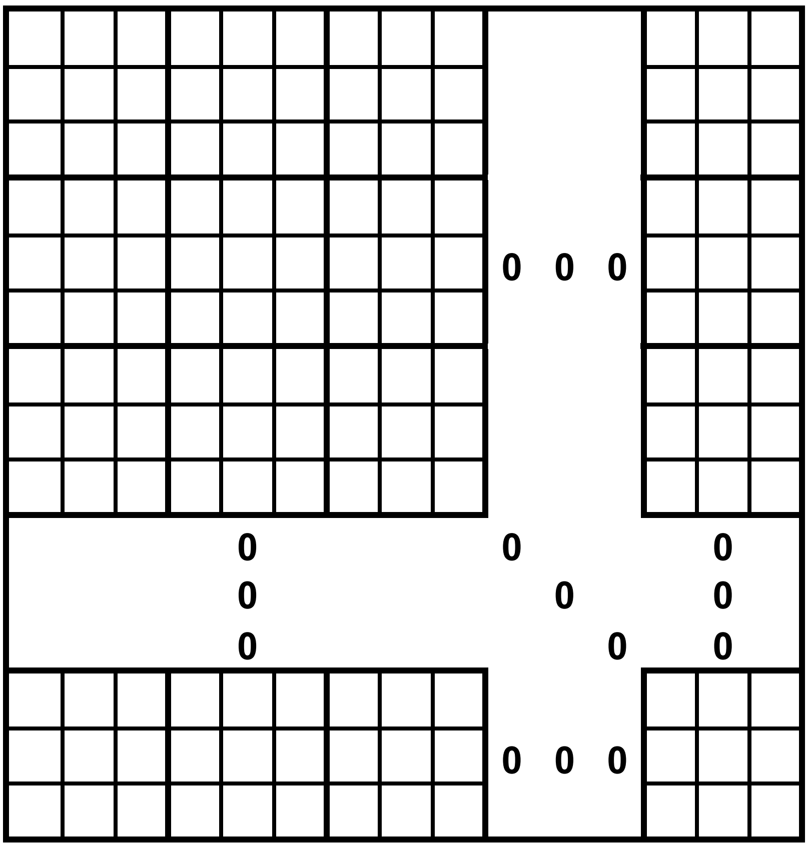
G3. Examinar si es posible construir tableros incaicos n x n, para todo $n > 2$. Justificar completamente sus afirmaciones.

Como se puede observar en los ejemplos anteriores, los tableros de mayor tamaño pueden ser cubiertos con tableros menores. En particular, afirmamos que todos los tableros n x n, con $n > 5$, pueden ser llenados con subtableros de 3 x 3, 3 x 4 y 4 x 4. A continuación veremos la demostración de esta afirmación.

Primero, es conocido que todos los números naturales $n > 5$, pueden ser múltiplos de 3; ó dejar resto 1, al ser divididos entre 3; ó dejar resto 2, al ser divididos entre 3. Veamos la demostración de la afirmación para cada uno de estos casos:

i) <u>n = 3k:</u>

En este caso, basta dividir el tablero n x n en k^2 subtableros de 3 x 3, de la siguiente manera:



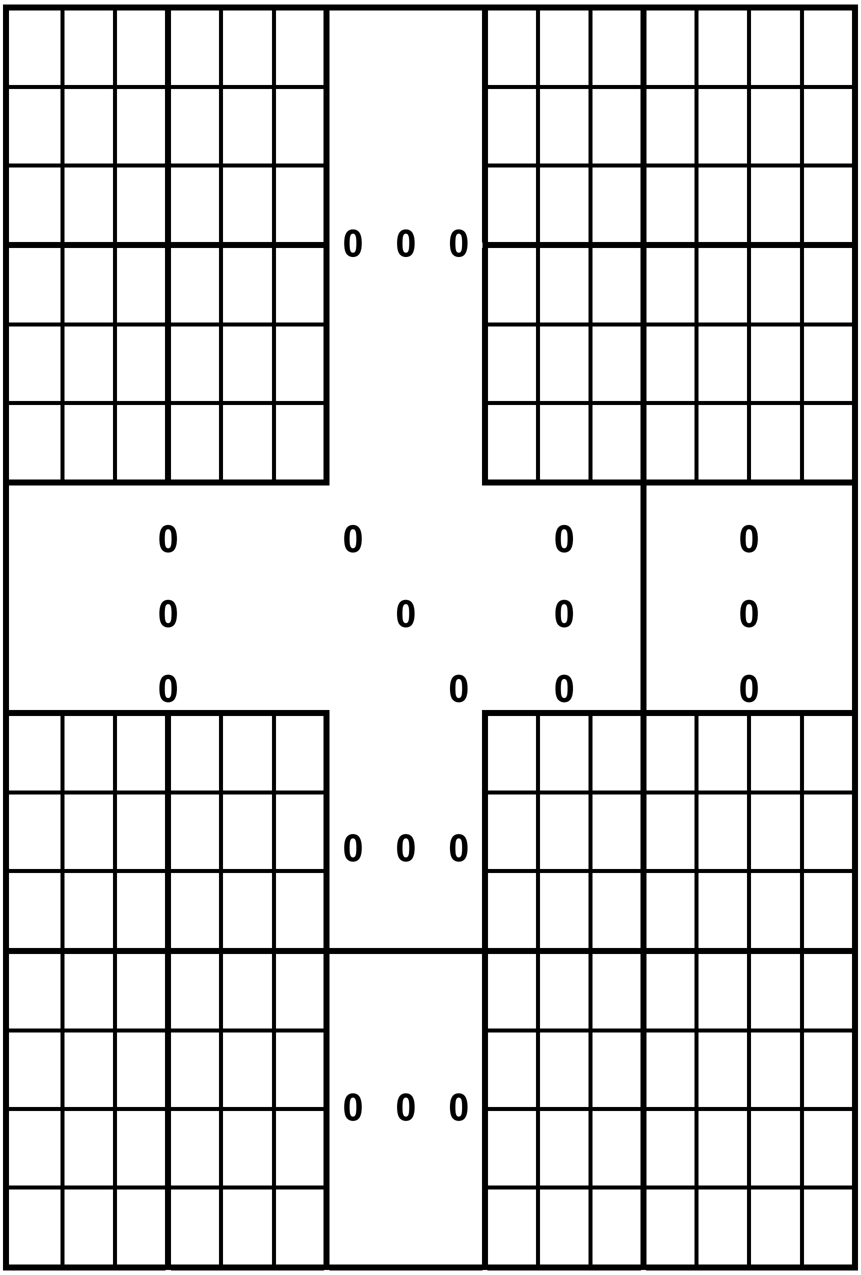
Ahora, basta llenar cada subtablero 3 x 3, con alguno de los ejemplos dados en las actividades individuales, y como en cada subtablero se cumple la condición de tablero incaico, entonces en el tablero de *n x n* también se cumplirá la condición de tablero incaico, pues el número escrito en cada casilla es igual a la diferencia de los números escritos en dos casillas vecinas.

Veamos un ejemplo de llenado del tablero:

2	-1	2	2	-1	2	2	-1	2				2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1				1	1	1
-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1				-1	2	-1
2	-1	2	2	-1	2	2	-1	2				2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	**0**	**0**	**0**	1	1	1
-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1				-1	2	-1
2	-1	2	2	-1	2	2	-1	2				2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1				1	1	1
-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1				-1	2	-1
				0					**0**				**0**	
				0						**0**			**0**	
				0							**0**		**0**	
2	-1	2	2	-1	2	2	-1	2				2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	**0**	**0**	**0**	1	1	1
-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1				-1	2	-1

ii) ***<u>n = 3k+1</u>***

En este caso, como $n > 5$, tenemos que $k > 1$ y podemos decir que $n = 3(k-1) + 4$, por lo cual podemos dividir el tablero de n x n en $(k-1)^2$ subtableros de 3 x 3, $(k-1)$ tableros de 3 x 4, $(k-1)$ tableros de 4 x 3 y 1 tablero de 4 x 4. Veamos:



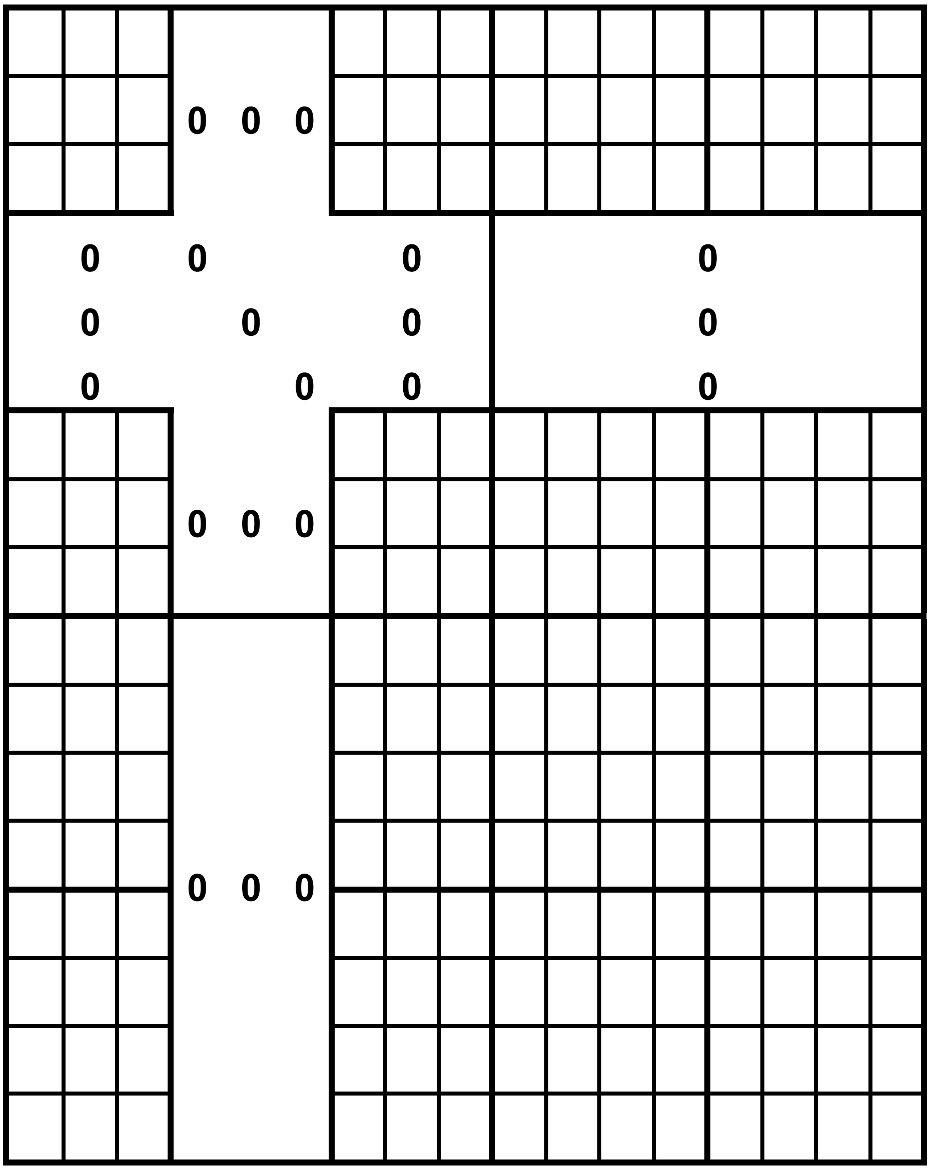
Ahora, basta llenar cada subtablero 3 x 3, 3 x 4, 4 x 3 y 4 x 4 con alguno de los ejemplos dados en las actividades individuales, y como en cada subtablero se cumple la condición de tablero incaico, entonces en el tablero de *n* x *n* también se cumplirá la condición de tablero incaico, pues el número escrito en cada casilla es igual a la diferencia de los números escritos en dos casillas vecinas.

Veamos un ejemplo de llenado del tablero:

2	2	-6	2	2	-6				2	2	-6	2	2	-6	2
4	4	-4	4	4	-4				4	4	-4	4	4	-4	-4
6	-2	-2	6	-2	-2	**0**	**0**	**0**	6	-2	-2	6	-2	-2	-2
2	2	-6	2	2	-6				2	2	-6	2	2	-6	2
4	4	-4	4	4	-4				4	4	-4	4	4	-4	-4
6	-2	-2	6	-2	-2				6	-2	-2	6	-2	-2	-2
			0			**0**				**0**			**0**		
			0				**0**			**0**			**0**		
			0					**0**		**0**			**0**		
2	2	-6	2	2	-6				2	2	-6	2	2	-6	2
4	4	-4	4	4	-4	**0**	**0**	**0**	4	4	-4	4	4	-4	-4
6	-2	-2	6	-2	-2				6	-2	-2	6	-2	-2	-2
2	4	6	2	4	6				2	4	6	2	2	-6	2
2	4	-2	2	4	-2	**0**	**0**	**0**	2	4	-2	4	4	-4	-4
-6	-4	-2	-6	-4	-2				-6	-4	-2	6	-2	-2	-2
2	-4	-2	2	-4	-2				2	-4	-2	2	4	6	8

iii) ***n=3k+2***

En este caso, como $n > 5$, tenemos que $k > 1$ y podemos decir que $n = 3(k-2) + 8$, por lo cual podemos dividir el tablero de n x n en $(k-2)^2$ subtableros de 3 x 3, $2(k-2)$ tableros de 3 x 4, $2(k-2)$ tableros de 4 x 3 y 4 tableros de 4 x 4. Veamos:



Ahora, basta llenar cada subtablero 3 x 3, 3 x 4, 4 x 3 y 4 x 4 con alguno de los ejemplos dados en las actividades individuales, y como en cada subtablero se cumple la condición de tablero incaico, entonces en el tablero de *n* x *n* también se cumplirá la condición de tablero incaico, pues el número escrito en cada casilla es igual a la diferencia de los números escritos en dos casillas vecinas.

Veamos un ejemplo de llenado del tablero:

1	-3	-2				1	-3	-2	-2	-1	-4	5	-2	-1	-4	5
-2	-1	-1	**0**	**0**	**0**	-2	-1	-1	-3	-1	3	1	-3	-1	3	1
5	3	-4				5	3	-4	1	-2	5	4	1	-2	5	4
	0		**0**				**0**						**0**			
	0			**0**			**0**						**0**			
	0				**0**		**0**						**0**			
1	-3	-2				1	-3	-2	-2	-1	-4	5	-2	-1	-4	5
-2	-1	-1	**0**	**0**	**0**	-2	-1	-1	-3	-1	3	1	-3	-1	3	1
5	3	-4				5	3	-4	1	-2	5	4	1	-2	5	4
-2	-3	1				-2	-3	1	-2	-1	-4	5	-2	-1	-4	5
-1	-1	-2				-1	-1	-2	-3	-1	3	1	-3	-1	3	1
-4	3	5				-4	3	5	1	-2	5	4	1	-2	5	4
5	1	4	**0**	**0**	**0**	5	1	4	-1	2	1	3	-1	2	1	3
-2	-3	1				-2	-3	1	-2	-1	-4	5	-2	-1	-4	5
-1	-1	-2				-1	-1	-2	-3	-1	3	1	-3	-1	3	1
-4	3	5				-4	3	5	1	-2	5	4	1	-2	5	4
5	1	4				5	1	4	-1	2	1	3	-1	2	1	3

Con esto hemos concluido la demostración. Considerando los ejemplos de tableros incaicos de 3 x 3, 4 x 4 y 5 x 5, podemos afirmar que es posible conseguir tableros incaicos n x n, para todo $n > 2$.

Situación 2

En una reunión hay cierto número de personas; algunas de ellas se conocen entre sí (relación simétrica) y otras no. Se sabe que cada persona conoce solamente a otras tres personas.

Representaremos a las personas como puntos en el plano (también llamados vértices) y cada vez que dos personas se conocen unimos los vértices correspondientes mediante una línea (también llamada arista). Esta representación de vértices y aristas recibe el nombre de *grafo*.

De esta forma, podemos representar cualquier grupo de personas mediante un grafo. Este grafo nos dará la información acerca de las personas que se conocen y las que no.

Actividades individuales

I1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 4 personas.

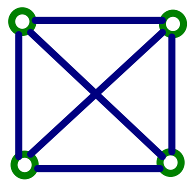
I2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 8 personas.

I3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 6 personas.

Solución

I1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 4 personas.

Es fácil ver que cada persona puede conocer a las otras tres, representando la situación mediante un grafo:

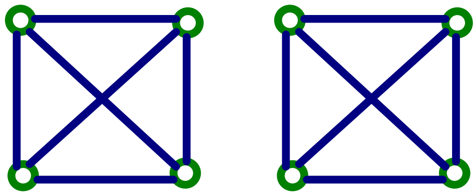


A este grafo suele llamarse grafo 4-completo.
Sin embargo, no se cumple que haya algunas personas que no se conocen entre sí. Por esta razón, concluimos que no es posible que haya solamente 4 personas en la reunión.

I2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 8 personas.

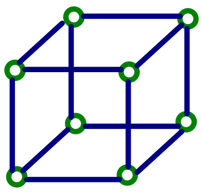
Sí es posible, y vamos a mostrar dos formas de resolver el problema.

Primera forma. Dividimos a las 8 personas en dos grupos de 4, y en cada grupo hacemos que todos se conozcan entre sí. De esta forma obtenemos un grafo que consiste en la "duplicación" del grafo del problema anterior:



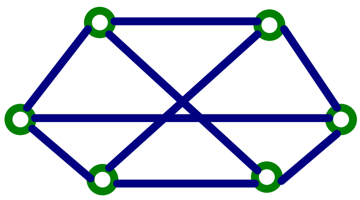
Dicho de otra forma, este grafo está formado por dos grafos 4-completos.

Segunda forma. El grafo a continuación, es un poco más elaborado y surge del hecho de que un cubo tiene 8 vértices, y de cada vértice salen 3 aristas:



I3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 6 personas.

Sí es posible. El siguiente grafo lo muestra:



Actividades grupales

G1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 40 personas.

G2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2010 personas.

G3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 5 personas.

G4. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2011 personas.

G5. Enunciar y demostrar un teorema, a partir de la situación planteada y de los problemas anteriormente resueltos

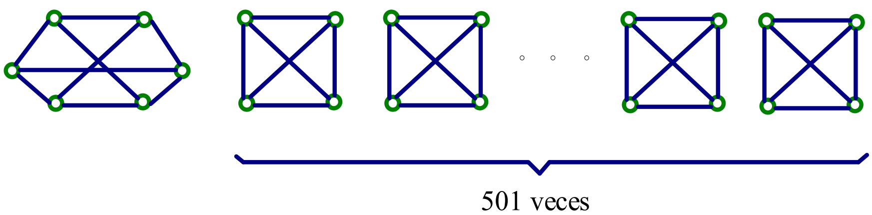
Solución

G1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 40 personas.

Sí es posible, solo necesitamos separar a las 40 personas en 10 grupos de 4, y hacer que en cada grupo todas se conozcan entre sí. Es decir, con las 40 personas formamos 10 grafos 4-completos.

G2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2010 personas.

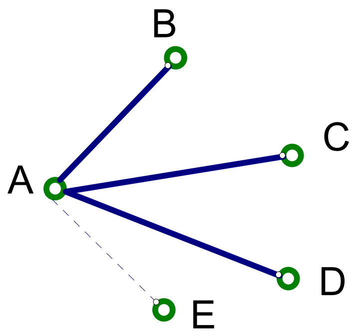
Como 2010=4x501+6 formamos un grupo de 6 personas y 501 grupos de 4, y en cada grupo ya sabemos cómo resolver el problema, es decir, el grafo sería:



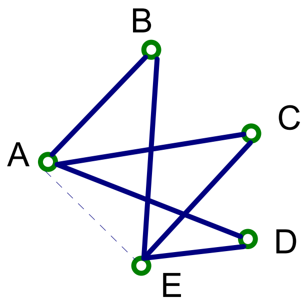
G3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 5 personas.

Vamos a demostrar que no es posible.

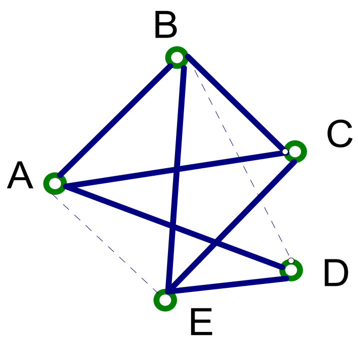
Supongamos que haya 5 personas A, B, C, D, E, tales que cada una conoce a otras 3. Digamos que A conoce a B, C, y D, entonces A no conoce a E, hasta ahora tendríamos:



(las líneas punteadas significan que no se conocen) Como E debe conocer a otras tres personas, éstas deben ser B, C, D:



Como B debe conocer a uno más, podemos suponer sin pérdida de generalidad que conoce a C, y no a D.



Vemos que C ya conoce a 3, entonces C no conoce a D, pero entonces D solo conocería a 2 personas, que contradice la condición inicial.

G4. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2011 personas.

Vamos a demostrar que no es posible. Es más, vamos a demostrar que no es posible que haya un número impar de personas.

Sea n un número impar. En un grupo de n personas, no es posible que cada una conozca a 3 personas.

Demostración

Supongamos que sea posible. Una persona que no pertenece al grupo, escoge dos personas, si ellas se conocen les da un caramelo a cada una, si no se conocen sigue de largo; y hace lo mismo con todas las parejas que se pueden formar en el grupo (para ser exactos, hace $\binom{n}{2}$ veces la misma operación). Cuando acaba de repartir los caramelos es claro que ha repartido un número par de caramelos, pues en cada operación reparte 0 ó 2 caramelos. Por otro lado, al final cada persona termina con 3 caramelos, pues cada una conoce a 3 personas. Por lo tanto, la cantidad total de caramelos es 3n, y como n es impar, la cantidad total de caramelos es impar, lo cual es una contradicción.

En particular si n=5, obtenemos una nueva demostración del problema anterior.

G5. Enunciar y demostrar un teorema, a partir de la situación planteada y de los problemas anteriormente resueltos

Teorema. Decimos que un grupo de $n \geq 4$ personas es cúbico, si cada una de ellas conoce a otras 3 personas del grupo.

a). *Si n es impar, no es posible encontrar un grupo cúbico de n personas.*

b). *Si n es par, es posible encontrar un grupo cúbico de n personas.*

Demostración

La parte a) ya fue demostrada en el problema anterior.

Para la parte b):

- Si n = 4k, formamos k grupos de 4 personas cada uno, y hacemos que en cada grupo todas las personas se conozcan.
- Si n = 4k + 2, formamos un grupo de 6 personas tales que cada una conozca a 3 de ellas (problema 3 de las Actividades individuales) y las 4k − 4 personas que quedan las separamos en k − 1 grupos de 4, y en cada grupo hacemos que todas las personas se conozcan.

Problemas sobre múltiplos

1. *Si se tienen siete números enteros cualesquiera, ¿siempre hay dos de ellos cuya diferencia es múltiplo de 6?*

Solución

Todo número entero al ser dividido por 6 deja un resto igual a 0, 1, 2, 3, 4 ó 5, es decir, sólo tenemos 6 posibilidades, entonces por el principio de casillas entre estos 7 números hay dos con el mismo resto, los cuales van a tener una diferencia múltiplo de 6.

2. *Si se tienen tres números enteros cualesquiera, ¿siempre hay dos de ellos cuya suma es múltiplo de 2?*

Solución

Todo número entero tiene dos opciones, ser par o impar, entonces por el principio de casillas entre estos 3 números hay dos con la misma paridad, los cuales van a tener una suma múltiplo de 2.

3. *Si se tienen siete números enteros cualesquiera, ¿siempre hay tres de ellos cuya suma es múltiplo de 3?*

Solución

Todo número entero al ser dividido por 3 deja un resto igual a 0, 1 ó 2, es decir, sólo tenemos 3 posibilidades, entonces por el principio de casillas entre estos 7 números hay tres con el mismo resto r, los cuales van a tener una suma múltiplo de 3.

4. *Si se tienen cinco números enteros cualesquiera, ¿siempre hay tres de ellos cuya suma es múltiplo de 3?*

Solución

Todo número entero al ser dividido por 3 deja un resto igual a 0, 1 ó 2, es decir, sólo tenemos 3 posibilidades. Si entre los 5 números hay uno de cada resto entonces estos 3 números van a sumar múltiplo de 3, en caso contrario, hay un resto que no aparece entre los cinco números, entonces nos quedaríamos sólo con 2 posibilidades y por el principio de casillas entre estos 5 números hay tres con el mismo resto r, los cuales van a tener una suma múltiplo de 3.

5. *Si se tienen cuatro números enteros cualesquiera, ¿siempre hay tres de ellos cuya suma es múltiplo de 3?*

Solución

La respuesta es NO y basta mostrar un ejemplo: 0, 1, 3, 4.

6. *Encontrar el menor entero positivo n con la siguiente propiedad: para n números enteros cualesquiera siempre es posible encontrar 18 de ellos cuya suma es múltiplo de 18. (Selectivo IMO – Perú, 2002)*

Solución

Vamos a demostrar que el menor entero positivo n con dicha propiedad es $n = 35$. Primero demostremos que $n = 35$ cumple dicha propiedad. Supongamos que tenemos 35 números enteros cualesquiera, entonces entre dichos números hay 3 cuya suma es múltiplo de 3, sean a_1, b_1, c_1 dichos números, entonces $a_1 + b_1 + c_1 = 3m_1$.

Separamos estos 3 números de los demás y nos quedan 32 números enteros, entre los cuales también van a haber 3 cuya suma es múltiplo de 3, sean a_2, b_2, c_2 dichos números, entonces $a_2 + b_2 + c_2 = 3m_2$.

Separamos estos 3 números de los demás y nos quedan 29 números enteros, entre los cuales también van a haber 3 cuya suma es múltiplo de 3, sean a_3, b_3, c_3 dichos números, entonces $a_3 + b_3 + c_3 = 3m_3$.

Y así sucesivamente podemos encontrar los números a_4, b_4, c_4,…, a_{11}, b_{11}, c_{11}, donde $a_4 + b_4 + c_4 = 3m_4$,…, $a_{11} + b_{11} + c_{11} = 3m_{11}$.

Obsérvese que los números m_1, m_2,…, m_{11} también son enteros, entonces entre dichos números hay 3 cuya suma es múltiplo de 3, supongamos sin pérdida de generalidad que sean $m_1 + m_2 + m_3 = 3k_1$. Separamos estos 3 números de los demás y nos quedan 8 números enteros, entre los cuales también van a haber 3 cuya suma es múltiplo de 3, supongamos que sean $m_4 + m_5 + m_6 = 3k_2$. Separamos estos 3 números de los demás y nos quedan 5 números enteros, entre los cuales también van a haber 3 cuya suma es múltiplo de 3, supongamos que sean $m_7 + m_8 + m_9 = 3k_3$.

Finalmente, entre los números k_1, k_2, k_3 hay dos cuya suma es múltiplo de 2, supongamos que sean k_1 y k_2; luego la suma de los 18 números $a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 +…+ a_6 + b_6 + c_6 = 3m_1 + 3m_2 +…+ 3m_6 = 3(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) = 3(3k_1 + 3k_2) = 9(k_1 + k_2)$, el cual es múltiplo de 18.

Por lo tanto $n = 35$ cumple la propiedad del problema y para demostrar que este valor es el mínimo basta mostrar un contraejemplo con $n = 34$ el cual puede ser:

$$0, 3, 6, \ldots, 48, 1, 4, 7, \ldots, 49.$$