Situación didáctica para la rotación de ejes coordenados

Nélida Medina García [1]

Resumen

Como una aplicación del capítulo Geometría Analítica Plana del curso Matemáticas Básicas de Estudios Generales Ciencias de la Universidad Católica desarrollamos la actividad colaborativa "Rotación de ejes coordenados".

En este curso se propicia que los estudiantes desarrollen la capacidad de comprender y aplicar conceptos básicos y propiedades de las cónicas, rotación de ejes coordenados.

A las clases asiste un un promedio de 60 alumnos. Durante el desarrollo de las actividades cooperativas, los alumnos trabajan en grupos de cuatro. El docente y dos asistentes de docencia, que conocen la actividad y sus objetivos, asesoran a los estudiantes en el desarrollo de la misma.

La actividad consta de tres partes.

- Parte individual
  Los alumnos responden individualmente una pregunta para obtener la ecuación de una parábola y una hipérbola usando la definición correspondiente..

- Trabajo en parejas
  Hay dos parejas con tareas diferentes y complementarias sobre las propiedades ópticas de la parábola y la hipérbola.

- Trabajo grupal
  El grupo usa los insumos que aportan las dos parejas. La actividad presenta información sobre las propiedades ópticas de la parábola y la hipérbola. Los alumnos aplican

[1] Pontificia Universidad Católica del Perú-Perú

estas propiedades para resolver un problema contextualizado (Telescopio de Cassegrain).

Marco teórico

Definición de parábola, hipérbola. Elementos.

Gráfica de cónicas

Rotación de ejes coordenados

Graficar de cónicas rotadas.

Propiedades ópticas de la parábola y la hipérbola.

Actividad: Rotación de ejes coordenados

Parte I: Individual

Pregunta:

Dada la parábola $P: x^2 - 4x - 6y - 8 = 0$, considere su vértice V y el punto B, extremo con abscisa positiva de su lado recto, halle:

a) la ecuación de la elipse de focos V, B y distancia entre sus vértices 8 unidades.

b) la ecuación de la hipérbola con focos V, B y distancia entre sus vértices 2 unidades.

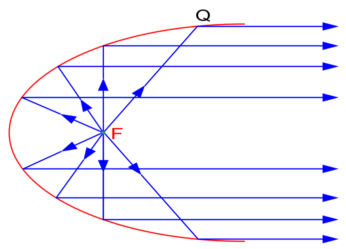
Parte II: Trabajo en parejas

Pareja 1

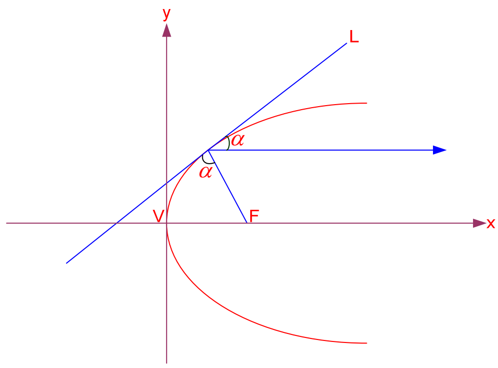
Propiedades ópticas de la parábola

Consideremos la parábola P con foco F **.** Por un punto Q de P se traza una recta l tangente a P. Se verifican las siguientes propiedades:

Propiedad 1: La luz de una fuente que se coloca en el foco de una superficie con sección transversal parabólica, se refleja de modo que es paralela al eje de P. Análogamente, la luz que llega al reflector parabólico en forma de rayos paralelos al eje focal, se concentra en el foco F .



Propiedad 2: La medida del ángulo que forman *Ll* y $\overline{FQ}$ es igual a la medida del ángulo que forman *L* y la recta paralela al eje focal, trazada por el punto *Q.*



Pregunta

Considere la parábola $P: \ y^2 = 4px$. Sea Q un punto cualquiera de P.

a) Verifique, usando propiedades de reflexión de la parábola, que la pendiente de la recta tangente a P en el punto $Q(x_Q, y_Q)$ es $\dfrac{2p}{y_Q}$.

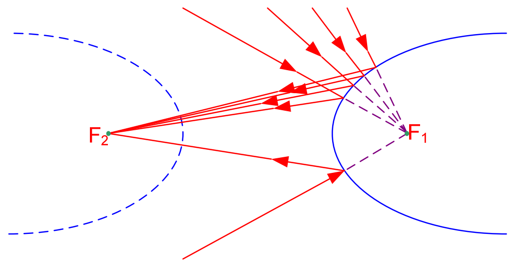
b) Si la curva P se rota un ángulo $\dfrac{\pi}{6}$ en sentido antihorario, halle la ecuación de la parábola rotada en el sistema x - y y grafíquela.

Pareja 2

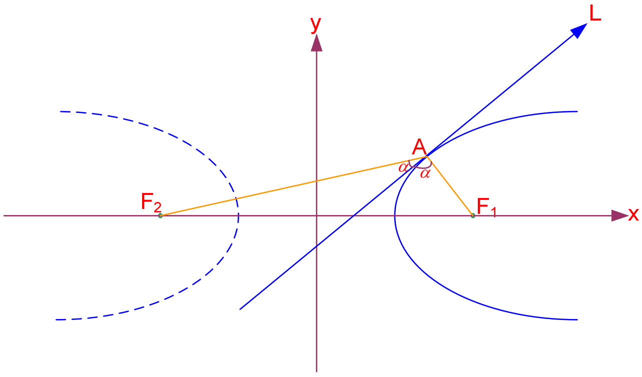
Propiedades ópticas de la hipérbola

Consideremos la hipérbola H con focos F_1 y F_2. Por un punto A de H se traza la recta L, tangente a H.
Se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedad 1: Si un rayo que se dirige a uno de los focos de H choca con la superficie de la hipérbola, este se reflejará hacia el otro foco de H.



Propiedad 2: La medida del ángulo que forman L y $\overline{F_1A}$ es igual a la medida del ángulo que forman L y $\overline{F_2A}$.



Pregunta

Dados la hipérbola H: $\dfrac{u^2}{9}-\dfrac{v^2}{16}=1$ y el punto A $\left(6;\sqrt{48}\right)$ (cuyas coordenadas han sido dadas en el sistema *u-v*), resuelva las preguntas a) y b) en el sistema *u-v.*

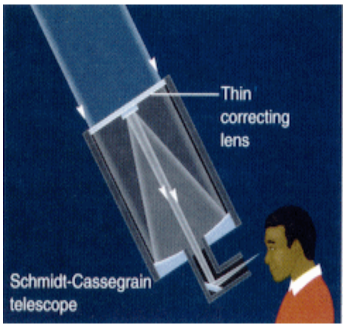
a) Halle la pendiente de la recta que contiene al rayo que incide sobre H en A y que pasaría por el foco F_1 de H (foco de mayor abscisa). Halle también la pendiente del rayo reflejado.

b) Usando propiedades de reflexión en H, halle la ecuación de la recta tangente a H en A.

c) Si el sistema de coordenadas u-v resultó de rotar los ejes x e y un ángulo $\pi/4$ en sentido antihorario, halle la ecuación de H en el sistema $x-y$.

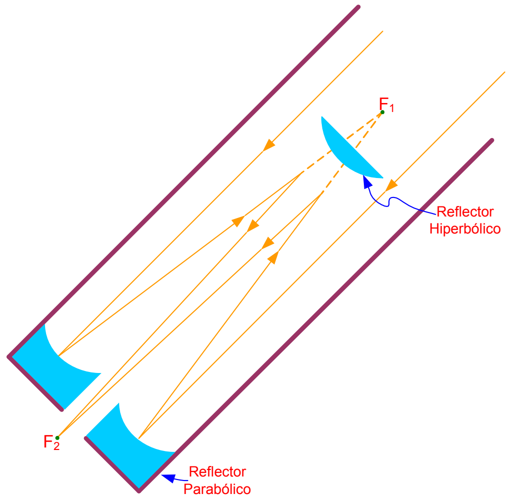
Parte III: Trabajo grupal

Los telescopios de tipo Cassegrain están en funcionamiento en algunos de los observatorios astronómicos más importantes del mundo. En tamaño más reducido, son utilizados por astrónomos aficionados.



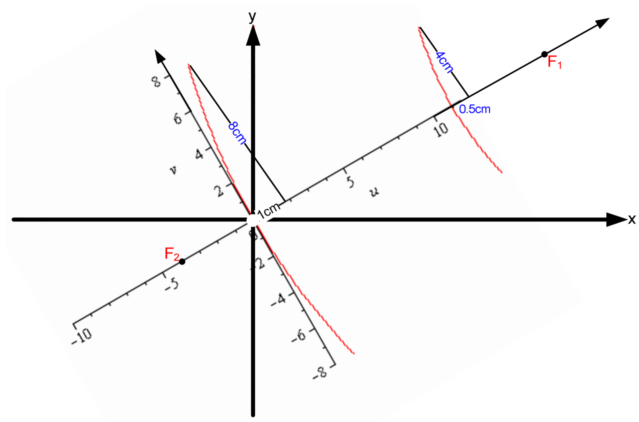
El Cassegrain es un tipo de telescopio reflector cuyo objetivo está constituido por un espejo primario cóncavo parabólico y un espejo secundario convexo hiperbólico. Recoge la luz del objeto observado y en un primer momento la refleja sobre el espejo primario, de modo que el rayo reflejado intenta formar la imagen en el foco F_1, justo detrás del espejo secundario pero esto no ocurre. La luz se refleja en este último espejo y es enviada hasta un agujero existente en el centro del espejo primario; una vez traspasado este agujero, la imagen se forma en el foco F_2 y luego es ampliada por un ocular. Esta trayectoria del rayo luminoso es posible debido a que F_1 es un foco común a la parábola y a la hipérbola.

La siguiente figura ilustra la situación descrita:



Se desea observar una determinada estrella empleando un telescopio Cassegrain. Para ello se ubica un telecopio Cassegrain de modo que su eje forme un ángulo cuya medida es $\frac{\pi}{6}$, con el eje horizontal.

Por la distancia a la que se encuentra la estrella, se puede considerar que los rayos de luz que esta emite son paralelos al eje del telescopio. Si uno de esos rayos incide sobre el espejo primario en el punto A y, debido a los fenómenos de reflexión de las lentes parabólica e hiperbólica, se obtiene una imagen final en el punto F_2 ubicado a 4cm detrás del vértice del espejo parabólico,



a) Determine dónde debe ubicarse el espejo hiperbólico (es decir, las coordenadas de los vértices de la hipérbola que lo contiene) para que ambos espejos tengan como foco común a F_1 .

Nota.: La única solución positiva de la ecuación $4a^3 + 65a^2 - 400a - 100 = 0$ es $a = 4{,}95$.

b) Determine las ecuaciones en el sistema *x* - *y* de las secciones cónicas descritas por los espejos del telescopio.

Nota: De las restricciones sobre *u* y *v* para describir solo la porción de cónica que corresponde a los espejos.