Aprendizaje de la Matemática vía antiquísimos problemas

Alejandro Ortiz Fernández [1]

Resumen

En estas lecturas vamos a presentar un conjunto de ejercicios – problemas, ya discutidos en la Antigüedad, cuyos mensajes nos son aún de utilidad.

Breve visión de la matemática en la antigüedad

Desde remotos tiempos la matemática tuvo importancia en el desarrollo del progreso humano. La aritmética y la geometría, a través de los números y de las figuras básicas, fueron dos aéreas naturales en el hombre de la Antigüedad. Dos civilizaciones que tuvieron progreso matemático fueron Egipto y Babilonia. Conocemos la matemática egipcia por los papiros de Moscú (1850 A.C.) y el de Rhind (1650 A.C) en donde apreciamos abundante información matemática. La cultura babilónica se inicia alrededor del 3,000 A.C.; algunas placas matemáticas se ubican en el periodo 2300-1600 A.C.; la tablilla Plimpton 322 es uno de los más importantes documentos que disponemos.

La humanidad continuó avanzando y resolviendo problemas que la naturaleza le planteaba; así fueron surgiendo nuevas ideas matemáticas y métodos para resolver tales cuestiones. Las condiciones se dieron para el surgimiento de una gran cultura, la civilización griega, la que pasó por tres básicos periodos: (a). Periodo Helénico, que comienza con los albores del pensamiento griego y termina con la muerte de Aristóteles; a este periodo pertenece Tales de Mileto. (b). Periodo Helenístico, es la etapa de mayor esplendor matemático; Alejandría es el faro que ilumina al mundo científico; sus tres más grandes representantes son:

[1] Pontificia Universidad Católica del Perú- Perú

Euclides, Arquímedes y Apolonio. (c). Periodo greco-Romano que corresponde a la etapa del declive de esta cultura y a los esfuerzos que hicieron algunos pensadores para mantener al menos el legado de los grandes maestros; este periodo llega a su final alrededor del siglo V D.C.

En conclusión, podemos decir que en la antigüedad, y sobre todo en Grecia, la matemática alcanzó significativos progresos, aún en el campo teórico, en donde enfrentaron delicados problemas, algunos de los cuales tardaron siglos en ser clarificados.

La historia de la matemática como recurso pedagógico

Vía algunos problemas, que discutiremos en este escrito, vamos a realizar un breve viaje por la Antigüedad desde aproximadamente 2000 años antes de Cristo hasta alrededor de la era cristiana; este viaje debe seguramente dejarnos una sensación de aprecio y nostalgia por aquellos tiempos, y por el legado que nos dejaron seres inteligentes y que aún hoy apreciamos. Creo que a todos nos gusta este tipo de información y que mejor al tener esta cultura para aprender y/o enseñar la matemática respectiva. En las últimas décadas surgió la tendencia de motivar el aprendizaje y la enseñanza de la matemática haciendo uso de las fuentes históricas, es decir, de hacer "matemática y su historia". Por ejemplo, la enseñanza del cálculo infinitesimal podría ser motivada con las ideas que tuvo Newton para llegar y usar las nociones de derivada e integral, así como con temas de la física básica. Al usar esta metodología, la enseñanza y el aprendizaje se haría de un modo unificado pues Newton usó ideas de la geometría, del algebra y de la física para crear su nuevo lenguaje matemático.

Por otro lado, el conocimiento de la historia de la matemática (en sus distintos niveles) nos permite comprender mejor muchas ideas que aprendemos en secundaria y en la universidad: por ejemplo, los babilonios vivieron alrededor de 4 mil años antes que nosotros, sin embargo ellos llegaron a calcular $\sqrt{2}$, y otros números "irracionales" con una buena aproximación; aún más, llegaron a establecer triples pitagóricos.

Así, estos conocimientos nos permiten visualizar mucho mejor nuestro aprendizaje de los números irracionales y del teorema de Pitágoras.

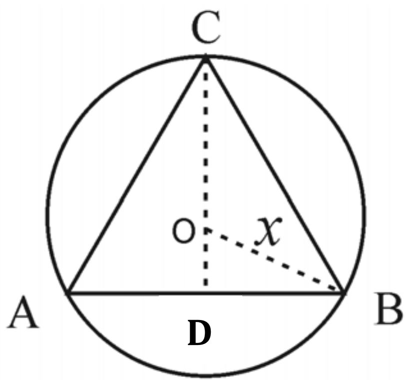
El lector interesado en ampliar lo tratado en las secciones 1 y 2 puede consultar: [BOY], [COL], [EVE], [HEA], [ORT.1], [ORT.2]. En las últimas décadas se han escrito excelentes libros relacionados con la historia de la matemática, algunos de los cuales se encuentran en la Biblioteca de Ciencias de la PUCP.

Algunos antiguos ejercicios – problemas

I. [Babilonia]

Encontrar el radio x de la circunferencia circunscrita al triángulo isósceles ABC sabiendo que
AB = 60 y AC = BC = 50.
(Los babilonios ya conocían al después llamado "Teorema de Pitágoras").

Solución
Este problema aparece en la tablilla de Susa. Se tiene la figura,



Los babilonios conocían algunas propiedades del triángulo. Si CD es la altura (pasa por el centro!), AD = DB = 30. Luego, por "Pitágoras", $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ó $5O^2 = 30^2 + CD^2$, de donde CD = 40. En el triángulo rectángulo ODB: $x^2 = 30^2 + (40 - x)^2$, de donde $x = \dfrac{125}{4}$

II. [Egipto]

Calcular: (i) 24 x 37
(ii) 847 ÷ 33

Solución

(i) 24 = 16 + 8
Múltiplos de 37
(de la forma):

	1	37	
	2	74	
	4	198	
+	8	296	+
+	16	592	+
	24	888	

Luego, 24 x 37 = 888

(ii) Como en (i)

+	1	33
	2	66
	4	132
+	8	264
+	16	528
	25	825

Esto motiva la descomposición:
847 = 528 + 319
= 528 + 264 + 55
= 528 + 264 + 33 + 22
Luego, 847 ÷ 33 = 25, con residuo 22

III. [Egipto; una progresión aritmética]

Distribuir 100 panes entre 5 personas de manera que $\frac{1}{7}$ del total de las tres primeras sea igual al total de las dos últimas. ¿Cuál es la diferencia?

Solución

Esta cuestión es el problema 40 que aparece en el papiro de Rhind; los egipcios usaron el método de "falsa posición", lo que es aplicado en el presente problema que implica una progresión aritmética. Sea A la parte más pequeña; luego asume que A = 1 y así, las partes serán 1, 1 + D, 1 + 2D, 1 + 3D y 1 + 4D. El escriba asume que D = $5\frac{1}{2}$, lo que seguramente es motivado por la hipótesis: 1 + 1 + $D = \frac{1}{7}$ (1 + 2D + 1 + 3D y 1 + 4D), lo que implica $D = 5\frac{1}{2}$. Entonces las partes serán $1, 6,\frac{1}{2}, 12, 17,\frac{1}{2}$ y 23, cuya suma es 60, pero quisiéramos que la suma sea 100; faltan así 40 panes, que es los $\frac{2}{3}$ de 60. Esto exige agregar a cada anterior término sus $\frac{2}{3}$; obtenemos así la distribución: $\frac{5}{3}, \frac{65}{6}, 20, \frac{175}{6}$ y $\frac{115}{3}$, cuya suma es 100 y donde la diferencia es $9\frac{1}{6}$.

IV. [Arquímedes]

Si en una progresión aritmética ascendente, que consiste de las magnitudes $A_1, A_2, ... A_n$, la diferencia es igual al menor término A_1, entonces:

$n A_n, < 2(A_1 + A_2 + ... + A_n),$ (*)
$n A_n, > 2(A_1 + A_2 + ... + A_{n-1}),$ (**)

Solución

Esta cuestión es la proposición 11 en el libro "Sobre Espirales" de Arquímedes, obra en la cual resuelve vitales problemas geométricos; el presente lema es aplicado a otras desigualdades y al estudio de la elipse. La idea de Arquímedes fue adaptada a la siguiente metodología. Por hipótesis, tenemos que $A_n - A_{n-1} = A_1$, ó $A_1 + A_{n-1} = A_n$.

También, $A_2 + A_{n-2} = A_n$ (pues $A_2 + A_{n-2} = A_1 + A_1 + A_{n-1-1} = A_n$); similarmente $A_3 + A_{n-3} = ... = A_n$.

Si: $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_{n-1} + A_n$, ó
$S_n = A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + ... + A_1$,

Luego $2S_n = A_n + (A_1 + A_{n-1}) + (A_2 + A_{n-1}) + ... + (A_{n-1} + A_1) + A_n$
$= A_n + nA_n = (1+ n) A_n.$

De donde: $nA_n < 2S_n$, que es (*)
Veamos ahora (**), esto es, $n A_n > 2S_{n-1}$. En efecto, tenemos:
$2S_n = A_n + nA_n$ ó $2S_{n-1} + A_n + A_n = A_n + nA_n$ ó $2S_{n-1} + A_n = nA_n$, de donde $nA_n > 2S_{n-1}$

V. [Grecia]

Probar que la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables.

Prueba

Por la tablilla Plimpton 322 sabemos que los babilonios conocían al "teorema de Pitágoras". Problema: "encontrar enteros ("positivos") a, b, c los cuales representan los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo"; la terna (a, b, c) se llama un triple pitagórico. Por tal tablilla vemos que los babilonios conocían cómo calcular algunos triples; los pitagóricos sabían que si m es impar entonces $m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$; y si m es par o impar se tiene $(2m)^2 + (m^2 -1)^2 = (m^2 +1)^2$. Estas fórmulas no producen todos los triples pitagóricos pero en los Elementos de Euclides se da una solución completa del problema.

Por otro lado, el teorema de Pitágoras condujo al crucial problema:

«Estudiar la razón entre la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados».

Si asumimos que el lado del cuadrado mide 1, la diagonal mide $\sqrt{2}$. ¿es $\sqrt{2}$ conmensurable con 1?, (es decir, ¿existe una "longitud básica" que entre un número finito de veces en la diagonal y en el lado?).

Supongamos que: $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = \frac{m}{n}$, donde m y n son primos entre si; luego $m^2 = 2n^2$, es decir m^2 es par o aún, m es par.

Desde que $\frac{m}{n}$ es irreducible se tendría que n es impar.

Pero, siendo m par, m^2 es divisible por 4 y n^2 seria divisible por 2, lugo n seria par, (→←).

Conclusión: si $\sqrt{2}$ fuera un "número racional" se llega a una contradicción; luego, la diagonal y el lado de un cuadrado no son conmensurables (son "inconmensurables"!).

En otras palabras, en el cuadrado no existe una terna pitagórica.

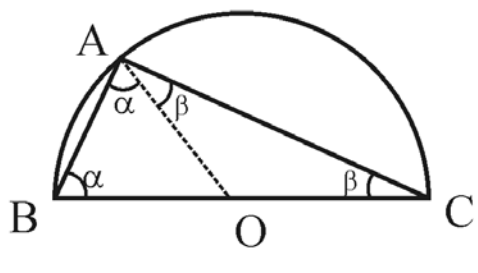
Nota: Existe una prueba geométrica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. En verdad, los antiguos matemáticos, al discutir este tipo de cuestiones, habían llegado a un nivel de alta matemática cuya complejidad los llevó a una profunda crisis, la que solo fue superada en el siglo XIX.

VI. [Tales de Mileto]

Un ángulo inscrito en un semi-círculo es un ángulo recto.

Solución

El primer matemático griego de la Escuela Jónica fue Tales de Mileto quien vivió aproximadamente en el periodo 640 – 550 A.C.; fue un gran pensador y notable científico; estando en Egipto calculó la altura dela pirámide de Keops mediante una ingeniosa aplicación de la semejanza de triángulos. Se le atribuye diversos resultados geométricos, entre ellos el del anguilo inscrito en una semi-circunferencia, resultado que aparece probado en los Elementos de Euclides, Libro III. 31. Aristóteles se preguntaba: ¿Por qué el ángulo de una semi-circunferencia siempre es un ángulo recto?...



A es punto arbitrario. Probar: ∡ BAC es recto.

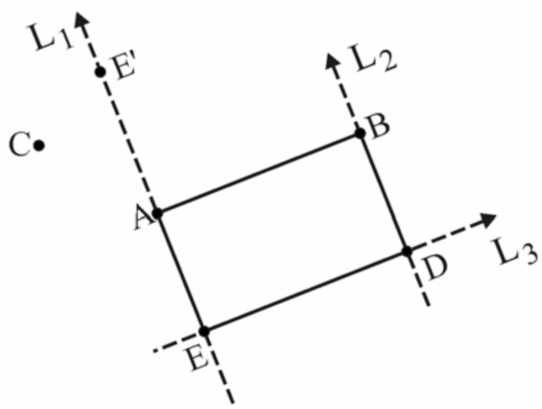
En efecto, Δ BAO es isósceles; Tales sabia que ∡ABO=∡OAB. Similar con Δ AOC.

Sabia también que: 2 ángulos rectos = $\alpha+\beta + \beta + \alpha = 2(\alpha + \beta)$; luego, $\measuredangle$ BAC es recto.

VII. [Grecia]

Dados tres puntos A, B, C, construir un rectángulo ABDE tal que AE $\simeq$ AC (esto es AE es "congruente" con AC).

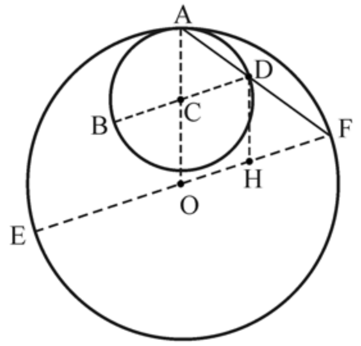
Solución



Construyamos L_1 perpendicular a AB en A (los griegos sabían hacer esta construcción); con centro en A y radio AC se construye un circunferencia $\mathcal{C}$, la que intersecta a L_1 en los puntos E' y E. Ahora construimos L_2 perpendicular a AB en B, y L_3 perpendicular a L_1 en E. L_2 no es paralela a L_3 (si lo fuera, AE y AB serían paralelas, falso), luego ellas se intersectan en un punto D. Se observa que cada par de lados opuestos de ABDE son paralelos y tres ángulos son rectos.
Conclusión: ABDE es un rectángulo.

VIII. [Arquímedes]

Si dos circunferencias se tocan en A y si BD y EF son dos diámetros paralelos, entonces ADF es una línea recta.



Solución

Esta cuestión aparece en el Libro de Lemas. Proposición 1. Se sabía que OCA es una línea recta. Se traza DH paralela a OA, la cual encuentra a OF en H.

La tesis queda probada si verificamos que: ∡ADC + ∡CDF = dos ángulos rectos. (Esta propiedad aparece en los Elementos de Euclides).

En efecto, OH = CD = CA y OF = OA; luego,
HF = OF – OH = OA – CA = CO = DH.
Así, el triángulo DHF es isósceles y (se conocía entonces) ∡HDF =∡HFD. Luego los triángulos CAD y HDF son isósceles y ∡ACD = ∡DHF; también ∡ADC = ∡DFH.

Finalmente, ∡ADC + ∡CDF = ∡CDF + ∡DFH = dos ángulos rectos, como se quería.

IX. [Euclides. Libro IX]

Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales, y se quitan del segundo y del último números iguales al primero, entonces, tal y como el exceso del segundo es al primero, de la misma manera el exceso del último serán a todas las anteriores a él.

Solución

Esta cuestión es la proposición 35 del Libro IX, la que nos indica la forma de hallar la suma de los términos de una progresión geométrica; observemos que la forma presentada, es un tanto "enredada"; sin embargo, los argumentos hechos por Euclides son correctos.

Veamos, sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ n+1 términos en progresión geométrica, entonces Euclides hace el siguiente argumento:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \cdots = \frac{a_2}{a_1}$, y de esta manera $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \cdots = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$.

Ahora, por la proposición 12 del libro VII se tiene $\frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$, de donde concluye: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \ldots = \frac{(a_1 (a)_{n+1} - a_1)}{a_2 - a_1}$.

Nota: si expresamos esta última expresión en términos de la razón r, obtenemos:

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \ldots = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$.

X. [Euclides. Libro IX]

Todo número entero positivo de la forma $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ es un número perfecto si $2^m - 1$ es un número primo.

Solución

Se conjetura que este resultado fue probablemente descubierto por los pitagóricos.

Por hipótesis $p = 2^m - 1$, es primo, luego los divisores de $2n = 2^m p$ ó $n = 2^{m-1}p$ son $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{m-1}, p, 2p, 2^2p, \ldots, 2^{m-1}p$.

Luego la suma de los divisores de $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ es

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{m-1} + p + 2p + 2^2p + \ldots + 2^{m-1}p\\ &= (1 + p) + 2(1 + p) + 2^2(1 + p) + \ldots + 2^{m-1}(1 + p)\\ &= (2+2^2 + \ldots + 2^{m-1})(1+p) = (2^m - 1)(1 + p) = (2^m - 1)\, 2^m\\ &= 2(2^m - 1)\, 2^m\text{-}1 = 2p2^{m-1} = 2n.\end{aligned}$$

Por tanto $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ es un número perfecto.

Nota: recordamos que un número es perfecto si es igual a la suma de sus divisores propios.

XI. [Arquímedes. Método de Exhaustación]

Si $S = |A| + |B| + |C| + |D| + |E|$ tal que

$|A|:|B| = |B|:|C| = |C|:|D| = |D|:|E| = 4 : 1$, probar que

$S = \frac{4}{3}|A| - \frac{1}{3}|E|$.

Prueba

Por hipótesis: $|B| = \frac{1}{4}|A|$, $|C| = \frac{1}{4}|B|$, $|D| = \frac{1}{4}|C|$, y $|E| = \frac{1}{4}|D|$

Luego; $\frac{4}{3}S = \frac{4}{3}(|A| + |B| + |C| + |D| + |E|) = \frac{4}{3}|A| + \frac{4}{3}(|B| + |C| + |D| + |E|) = \frac{4}{3}|A| + \frac{1}{3}(|A| + |B| + |C| + |D|) = \frac{4}{3}|A| + \frac{1}{3}(|A| + |B| + |C| + |D| + |E|) - \frac{1}{3}|E|$,

Esto es: $\frac{4}{3}S = \frac{4}{3}|A| + \frac{1}{3}S - \frac{1}{3}|E|$, lo que implica la tesis.

Nota: este resultado puede ser extendido a cualquier número de sumandos.

XII. [China. ± 300]

Tenemos cierto número de objetos. Si los contamos de 3 en 3 nos sobran 2, si los contamos de 5 en 5 nos sobran 3, y si los contamos de 7 en 7 nos sobran 2. ¿Cuál es el número de objetos?

Solución

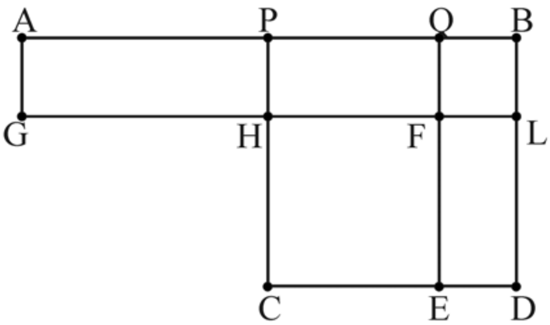
Observemos el siguiente argumento:

	3	6	9	12	15	18	21	24	27	...
+2	5	8	11	14	17	20	$\boxed{23}$	26	29...	
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	...
+3	8	13	18	$\boxed{23}$	28	33	38	43	48...	
	7	14	21	28	35	42	49	56	63	...
+2	9	16	$\boxed{23}$	30	37	44	51	58	65...	

Por tanto, 23 es el número de objetos.

XIII.[Euclides]

Si una línea es dividida en partes iguales y en partes desiguales, el rectángulo contenido en las partes desiguales, junto con el cuadrado sobre la línea entre los puntos de la sección, es igual al cuadrado sobre la mitad de la línea.



En otras palabras, sea AB la línea dada, dividida en partes iguales en P, y en desiguales en Q. entonces se tiene: $(AQ)(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2$.

Solución

Si AQ = 2a, QB = 2b, entonces $4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$
ó si AB = 2a, PQ = b, entonces $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Se tiene, PCDB y QFLB son cuadrados; entonces

$$
\begin{aligned}
(AQ)(QB)+(PQ)^2 &= AGFQ + HCEF = AGHP + PHFQ + HCEF.\\
&= PHLB+PHFQ+HCEF=PHLB+FEDL+HCEF\\
&= (PB)^2.
\end{aligned}
$$

Algunas Reflexiones

(I). En Egipto y en Babilonia, milenarias civilizaciones, ya existía una matemática que sirvió para resolver problemas concretos; se alcanzó un cierto grado de progreso que influyó en posteriores desarrollos.

(II). En la antigua Grecia, siglos antes de Cristo, ya hubieron seres pensantes que investigaron delicados problemas matemáticos; algunos de ellos llegaron a la cúspide del pensamiento abstracto (Arquímedes, Apolonio, Euclides, …) .

(III). Las cuestiones estudiadas en esta oportunidad nos dejan un sabor de haber "viajado" a aquellas civilizaciones y apreciado el progreso habido entonces.

(IV). La "nostalgia" generada nos motiva psicológicamente para aprender y enseñar con estos recursos históricos; la matemática se aprende mejor cuando tenemos las adecuadas motivaciones.

(V). La cultura matemática es una parte importante en todo profesional que enseña; el manejar ideas y métodos según los propios creadores es algo vital que tenemos que valorar en nuestro medio.

Comentarios

Actualmente disponemos de variados libros sobre historia de la matemática, muchos de ellos conteniendo información sobre el Siglo XX; otros relacionados con la problemática de la enseñanza de la matemática en diferentes niveles. Daremos algunas referencias bibliográficas que a su vez contienen muchas otras referencias.

[BOY] Boyer, Carl B. :"Historia de la matemática" Alianza Editorial. 1987.

[COL] Collete, Jean Paul. : "Historia de las matemáticas" Vols. I – II. Siglo XXI. 1986.

[EVE] Eves, Howard: "An Introduction to the History of Mathematics". Holt. Chicago. 1969.

[HEA] Heath, Thomas: "A History of Greek Mathematics". Vols. I – II. Oxford at the Clavendon Press. 1921.

[ORT.1] Ortiz Alejandro: "Historia de la matemática" Vol 1. "La Matemática en la Antigüedad" PUCP. 2005.

[ORT.2] Ortiz Alejandro: "Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática". PUCP – UNT. 2006.