

Problemas de conteo y probabilidad elemental en la Educación Básica

Paulo César Pinto Carvalho ¹

Resumen

Presentamos problemas sencillos de conteo y su aplicación en la solución de problemas simples de probabilidad. Pueden ser trabajados con éxito en la escuela primaria, usando principios simples, que no dependen del conocimiento de fórmulas. En este taller, veremos una serie de problemas con estas características. Varios de estos problemas fueron propuestos en la Olimpiada Matemática de Brasil de las Escuelas Públicas.

Problemas presentados en el taller

1. Un grupo de 4 alumnos (Alice, Bernardo, Carolina y Daniel) necesita escoger un líder y un vice-líder para un debate.
 - a) Haga una lista de todas las posibles formas de escoger un candidato (use la inicial de cada nombre, para facilitar la escritura). Organice su lista de la siguiente forma: primero, escriba todas las posibilidades en que Alice es la presidente, después aquellas en que Bernardo es presidente, y así sucesivamente.
 - b) ¿Cuántas posibilidades encontró?
 - c) No es necesario enumerar todas las posibilidades para contarlas. Basta dividir, en etapas, las posibles formas de escoger un candidato. Esto conduce a un diagrama de árbol de decisiones, como muestra la Figura 1. Complete la figura, indicando las posibles maneras de escoger un líder en cada etapa.

¹ Instituto de Matemática Pura y Aplicada - Brasil

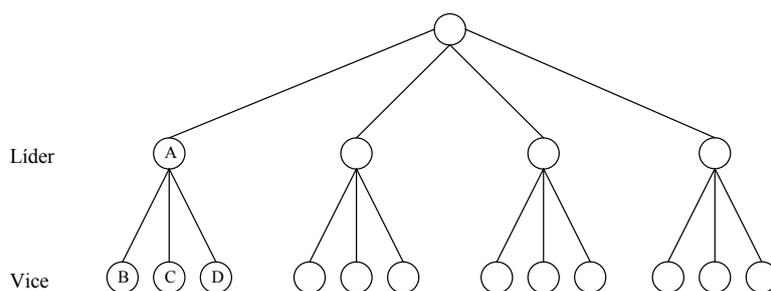


Figura 1

- d) Se puede escoger el líder de ___ maneras. Esta forma de escoger el líder, afecta a los posibles vice-líderes, pero no al número de posibilidades, que es siempre igual a ___. Luego, el número total de posibilidades para escoger un líder y en seguida, un vice-líder es igual al producto ___ \times ___ = ___.

Principio Multiplicativo: Si una decisión puede ser tomada de p maneras y cualquiera que ésta sea, una segunda decisión puede ser tomada de q maneras, entonces el número de maneras de tomar consecutivamente las dos decisiones es igual a pq .

- e) Usando el principio multiplicativo, encuentre cuántas son las posibles maneras de escoger un líder y un vice-líder para el caso en que sean 6 alumnos y 6 alumnas y además, los escogidos deben ser de sexos diferentes.
- f) Repita para el caso en que sean 6 alumnos y 8 alumnas.
2. Un restaurante presenta un menú popular, en el cual, el cliente escoge una ensalada (entre ensalada verde, ensalada rusa ó salpicón), un plato principal (bistec con papas fritas, pescado con puré, pollo con legumbres ó lasaña) y un postre (ensalada de frutas ó pudín). ¿Cuántas son las posibles comidas?
3. Para pintar la bandera (Figura 2), hay 4 colores disponibles. ¿De cuántas maneras puede ser pintada la bandera de modo que, las fajas adyacentes tengan diferentes colores?

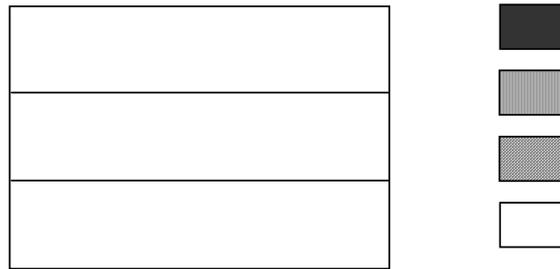


Figura 2

4. Para pintar la bandera (Figura 3), están disponibles seis colores dados, de tal forma que las regiones adyacentes deben ser pintadas de diferentes colores

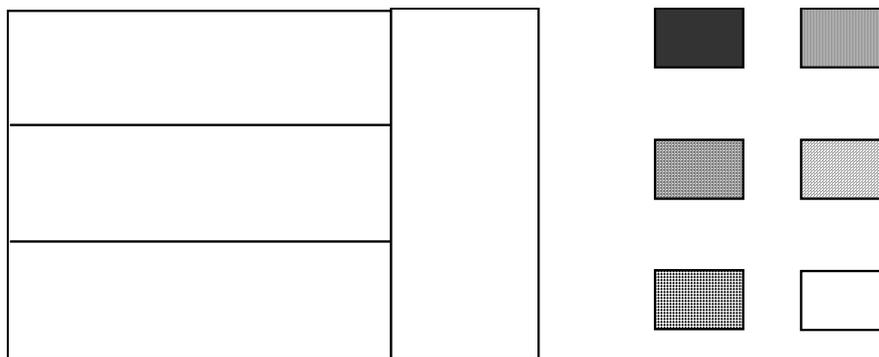


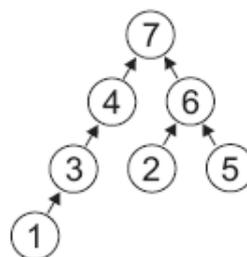
Figura 3

- a) ¿Cuál es el número mínimo de colores a ser usados?
 b) ¿De cuántas maneras puede ser pintada la bandera?
5. Cada dígito de una calculadora es mostrado, en su pantalla, encendiendo filamentos dispuestos como se muestra en la figura del lado. ¿Cuántos símbolos diferentes pueden ser representados? (No incluya el caso en que ningún filamento esta encendido.)
-
- The diagram shows a calculator display with two digits. The digit '1' is formed by the right vertical segment and the bottom horizontal segment. The digit '7' is formed by the top horizontal segment, the right vertical segment, and the bottom horizontal segment.
6. ¿Cuántos son las posibles respuestas de un examen de 10 preguntas (tipo alternativas), que tiene 5 alternativas por

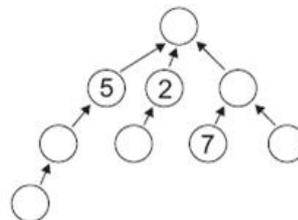
pregunta? ¿En cuántas de estas respuestas la letra *A* aparece exactamente una vez? ¿En cuántas la letra *A* no aparece?

7. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 3 personas en 5 sillas puestas en fila?
8. Liste todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$. ¿Cuántos son? De modo general, ¿Cuántos son los subconjuntos de un conjunto que tiene n elementos?

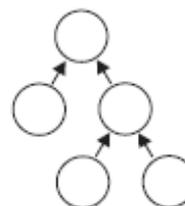
9. (OBMEP 2008) los círculos de la figura del lado, fueron completados con los números del 1 al 7, de modo que, todas las flechas apuntan de un número menor para un número mayor. En este caso, decimos que la figura fue *correctamente completada*.



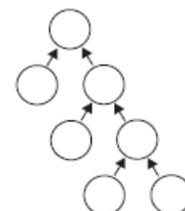
- a) Complete la figura del lado con los números del 1 al 9, de modo que esté correctamente completada.



- b) ¿De cuántas maneras la figura del lado puede ser correctamente completada con los números del 1 al 5?



- c) ¿De cuántas maneras, la figura del lado puede ser correctamente completada con los números del 1 al 7?



10. (OBMEP 2008) Las piezas de la Figura 4 son hechas de cuadraditos de cartulina gris, de un lado y blanca del otro. La Figura 6 muestra una manera de encajar esas piezas con el lado gris hacia arriba, en los cuatro cuadrados de la Figura 5. ¿De cuántas maneras diferentes es posible hacer esto?

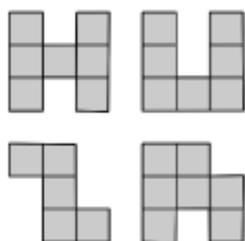


Figura 4

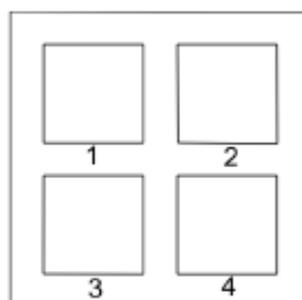


Figura 5

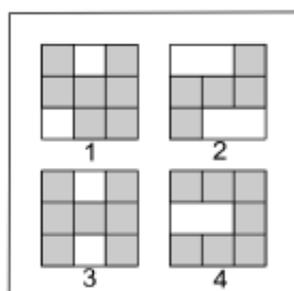


Figura 6

11. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ser colocadas 6 personas en fila?

Permutaciones simples: *El número de maneras de ordenar n objetos distintos es igual a $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$*

12. Un anagrama de una palabra es una nueva “palabra” obtenida reordenando sus letras (esta nueva palabra puede no tener sentido).
- ¿Cuántos son los anagramas de la palabra **SAVEIRO**?
 - ¿Cuántos de ellos comienzan con **S**?
 - ¿Cuántos de ellos terminan con **vocal**?
 - ¿Cuántos presentan el pedazo **VEIR**?

13. ¿De cuántas maneras se puede organizar en una repisa, 5 libros de Matemática, 3 de Biología y 2 de Física (todos diferentes entre si), de modo que libros de la misma disciplina permanezcan juntos?
14. En una fiesta hay 5 hombres y 5 mujeres, que formarán 5 parejas para un baile de cuadrilla. ¿De cuántas maneras se pueden formar esas parejas? ¿Y si hubieran 5 hombres y 8 mujeres?
15. ¿De cuántas maneras 5 hombres y 5 mujeres pueden sentarse en 5 bancos de 2 lugares, si en cada banco debe haber un hombre y una mujer?
16. Considere un grupo de 20 alumnos.
- ¿De cuántas maneras se puede escoger un representante, un secretario y un tesorero?
 - Considere ahora que queremos escoger tres de los alumnos, para formar una comisión. ¿Por qué la respuesta no es la misma que la del ítem anterior?
 - ¿Qué es necesario hacer con la respuesta del ítem **a** para obtener la respuesta del ítem **b**?

Combinaciones simples: El número de modos de escoger **p** entre **n** objetos es $C_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

17. Cada pieza de un dominó presenta un par de números del 0 al 6, no necesariamente distintos. ¿Cuántas son estas piezas?
18. En un grupo hay 12 chicos y 15 chicas. ¿Cuántos son los modos de escoger una comisión de 4 personas:
- sin restricciones?
 - que incluyan a José (que es uno de los alumnos)?
 - que no incluyan a Marcia (que es una de las alumnas)?
 - con 2 chicos y 2 chicas?
 - que tengan por lo menos un chico y una chica?

19. En el juego de la *Tinka* son sorteados, a cada extracción, 6 de los números del 1 al 45.
- ¿Cuántos son los resultados posibles de la *Tinka*?
 - Un jugador apuesta en los números 2, 7, 21, 34, 41 y 43. ¿Cuál es su chance de ganar? ¿Y si él hubiese apostado en los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6?
 - ¿Cuántas veces más, son las oportunidades de ganar de quien apuesta en 8 números?
 - Suponga que el número 17 no es sorteado hace mucho tiempo. ¿Esto modifica las posibilidades de ser sorteado la próxima vez?

Probabilidad: Si un determinado fenómeno aleatorio puede ocurrir de n modos posibles, todos equiprobables, y si en p de ellos ocurre un determinado evento A , la probabilidad de A es

$$P(A) = \frac{p}{n} = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

20. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado honesto?
21. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 2 caras al lanzarse una moneda honesta 3 veces?
22. Un dado es lanzado dos veces.
- ¿Cuántos son los posibles resultados?
 - ¿Cuál es la chance de obtener un duplo 6?
 - ¿Cuál es la chance de obtener suma 7?
23. En una urna hay 5 bolas rojas y 4 negras, todas del mismo tamaño, y hechas con el mismo material. Retiramos dos bolas sucesivamente de la urna, sin reponerlas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean retiradas dos bolas rojas?
24. (OBMEP-2010) Cuatro equipos, entre los cuales el *Quixajuba*, disputan un campeonato de volei en que:
- Cada equipo juega contra cada uno de los otros una única vez;

- Cualquier partido termina con la victoria de uno de los equipos;
 - En cualquier partido, los equipos tienen la misma probabilidad de ganar;
 - Al final del campeonato, los equipos son clasificados en orden por el número de victorias.
- a) ¿Es posible que, al final del campeonato, todos los equipos tengan el mismo número de victorias? ¿Por qué?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que el campeonato termine con el *Quixajuba* aislado en primer lugar?
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que el torneo termine con tres equipos empatados en primer lugar?