Modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales

Edison de Faria Campos
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Asociación de Matemática Educativa
edefaria@gmail.com

Resumen: Se utilizan ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencia para construir modelos matemáticos que describen situaciones dadas. Se utilizarán herramientas computacionales para simular los modelos construidos.

Palabras clave: Resolución de problemas; modelación matemática; simulación

Introducción

Un modelo matemático consiste en la descripción de un sistema usando conceptos y lenguaje matemáticos.

Es importante construir modelos matemáticos para ciertos fenómenos, para una mejor comprensión de dichos fenómenos y para predecir cualitativa y cuantitativamente el comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones o en situaciones que sean de nuestro interés.

La modelización matemática consiste en identificar un conjunto de valores (variables de estado, constantes y parámetros) que representan el estado del fenómeno estudiado, así como establecer un conjunto de relaciones matemáticas entre dichas variables que permiten conocer cómo responde el modelo a cambios en dichas variables. Con el modelo, el investigador podrá utilizarlo para comprobar y contrastar hipótesis de comportamiento del sistema modelado.

Cuando el modelo utilizado es muy complejo es necesario hacer una simulación del fenómeno. En este caso hay que utilizar análisis numérico y tecnología digital para aproximar las soluciones numéricas de los modelos utilizados y simular, es decir, reproducir aproximadamente las principales características de su comportamiento.

Una simulación por computador es un programa que intenta reproducir, con fines pedagógicos o científicos, un fenómeno natural a través de la visualización de los distintos estados que dicho fenómeno puede representar.

Utilizaremos ecuaciones diferenciales o en diferencia para construir algunos modelos matemáticos para describir ciertos fenómenos físicos y biológicos, y el software gratuito Easy Java Simulations (EJS) para hacer simulaciones con el modelo construido.

EJS es una herramienta de modelado y de autor de alto nivel que permite crear simulaciones digitales en Java. Al ejecutar la simulación, EJS genera código Java y lo compila. Además utiliza archivos auxiliares y de librerías para ejecutar el programa compilado. Otra ventaja del EJS es que contiene un editor de ecuaciones diferenciales que genera automáticamente el código Java necesario. Los algoritmos resuelven sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Existen otros ambientes para modelación y simulación como por ejemplo:

- Modelica
- OpenModelica
- Modelicac (Scilab lo incluye)
- SimForge
- IDA Simulation
- Dymola de Dassault Systems
- SimulationX
- Wolfram System Modeler
- Wolfram MathCore
- MapleSim de MapleSoft

A continuación se desarrollan o bien se proponen modelos matemáticos, con la solución analítica para los más sencillos o con la respectiva simulación para otros un poco más complejos. Algunos buenos textos para trabajar con modelos matemáticos vía ecuaciones diferenciales son Blanchard, Devaney y Hall (2012), Edwards y Penney (2001), Zill (2006).

Crecimiento poblacional (1 especie)

Sea $P(t)$ el número de individuos de una población (humana, insectos, bacterias) en el instante t. Supongamos que la tasa de nacimiento α (nacimientos por individuo por unidad de tiempo) y tasa de mortalidad β (muertes por individuo por unidad de tiempo) son constantes.

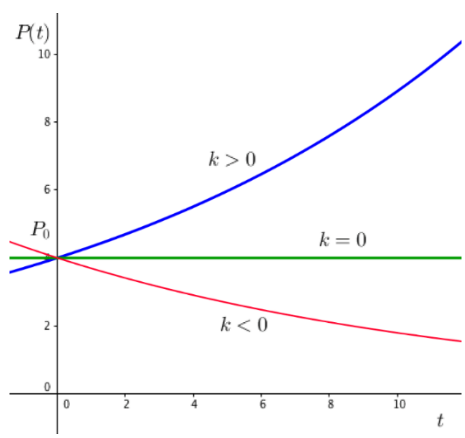
En un corto intervalo de tiempo Δt ocurren (en promedio) aproximadamente $\alpha P(t)\Delta t$ nacimientos y $\beta P(t)\Delta t$ muertes. Así, el cambio ΔP en $P(t)$ está dado aproximadamente por $(\alpha-\beta)P(t)\Delta t$, y por lo tanto

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t) = kP$$

con $k = \alpha - \beta$.

Si $P(0) = P_0$ podemos encontrar $P(t)$ en cualquier instante t positivo resolviendo el problema con valor inicial $\frac{dP}{dt} = kP,\ P(0) = P_0$.

Separando variables e integrando tendremos: $\int \frac{dP}{P} = \int k dt + C$, es decir $\ln P(t) = kt + C$ lo que es equivalente a $P(t) = e^{kt+C} = P_0 e^{kt}$ en dónde $P_0 = e^C$ es el número de individuos de la población en el instante $t = 0$.

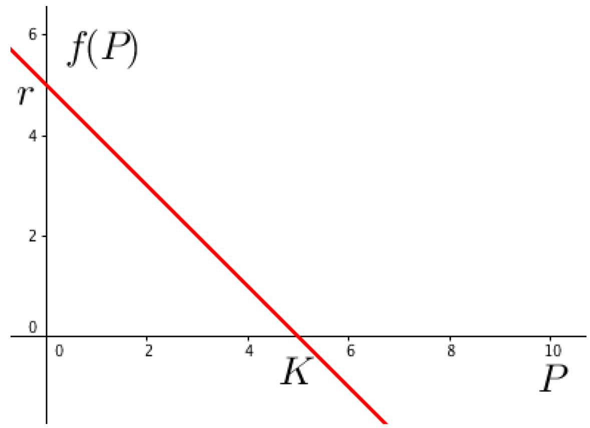


El economista y reverendo inglés Thomas Robert Malthus fue uno de los primeros en intentar modelar matemáticamente el crecimiento poblacional humano. En 1798 él publicó la primera (de seis ediciones) de su libro *Ensayo sobre el principio de la población* y su hipótesis era que la rapidez a la que crece la población en cierto instante es proporcional a la población total en ese momento. Este tipo de idea se conoce como maltusianismo.

En 1838, el matemático belga Pierre-François Verhulst, tras leer el ensayo de Malthus, publicó un modelo que contemplaba la capacidad del ambiente como un factor que impedía el crecimiento ilimitado de la población. Se supone que un medio ideal tiene una capacidad sostenible máxima y que por lo tanto

$$\frac{dP}{dt} = P(t)f(P)$$

tal que $f(P)$ haga que el crecimiento de la población sea más lento al acercarse a la capacidad máxima del ambiente. Por lo tanto $f(P)$ tiene que ser una función decreciente, y la más sencilla de ellas es una función lineal.



La ecuación de la recta anterior es $f(P) = r - \frac{r}{K}P$, y por lo tanto la ecuación de Verhulst es

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) = \alpha P(K - P), \quad \alpha = \frac{r}{K}$$

La ecuación anterior es más conocida como *ecuación logística* y su solución se denomina *función logística*. Es una ecuación en variables separables. La gráfica de la función logística se conoce como *curva logística*.

Es claro que $P \equiv 0 \;\; y \;\; P \equiv K$ son soluciones de la ecuación. K es la capacidad máxima del ambiente (se supone que es una constante positiva). Si suponemos que $0 < P < K$, separando variables e integrando obtenemos

$$P(t) = \frac{Ke^{\alpha Kt}}{Kc + e^{\alpha Kt}} = \frac{K}{1 + Kce^{-\alpha Kt}}$$

c es una constante de integración. Observe que cuando t tiende a infinito, $P(t)$ tiende a K, la capacidad máxima del ambiente. Para calcular la constante c hay que dar una condición inicial. También se puede mostrar que

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 2\alpha^2 P\left(P - \frac{K}{2}\right)(P - K)$$

Por lo tanto $P(t)$ es creciente y cóncava hacia arriba si $0 < P < \frac{K}{2}$; creciente y cóncava hacia abajo si $\frac{K}{2} < P < K$. En $P = \frac{K}{2}$ existe un punto de inflexión.

En los modelos anteriores, utilizamos las siguientes hipótesis:

- La población en estudio se encuentra aislada, es decir, no compite con otras especies por sus alimentos ni por el hábitat.
- La población en estudio no sirve de alimento ni se alimenta de otra especie.
- La cantidad de alimento y el hábitat de la especie son abundantes (modelo de Malthus), pero limitados (modelo de Verhulst).

Crecimiento poblacional (2 especies)

En esta sección analizaremos modelos para dos especies gobernadas por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) = Ax(t)\big(a - bx(t) - cy(t)\big) & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) = By(t)\big(\alpha - \beta x(t) - \epsilon y(t)\big) & (2) \end{cases}$$

$x(t)$ representa el número de individuos de una población en el instante t, $y(t)$ representa el número de individuos de la segunda población en el instante t, $a, b, c, \alpha, \beta, \varepsilon$ son parámetros reales no negativos mientras que A, B son parámetros reales.

La tasa de crecimiento de la población x es $Aax(t)$ para A positivo. El término $Acy(t)$ en (1) y $B\beta x(t)$ en (2) se denomina términos de competencia. En la ausencia de ellos las ecuaciones se reducirían a las logísticas.

Un caso particular del sistema anterior que corresponden a $b = 0, \varepsilon = 0, A = 1, B = -1$ son las conocidas ecuaciones de Lotka-Volterra para un modelo depredador-presa.

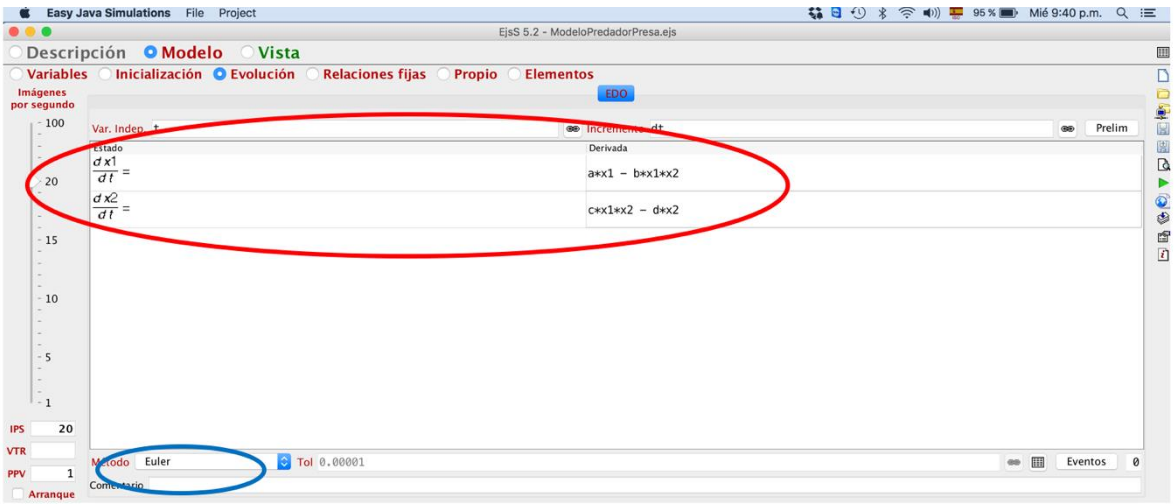
Modelo predador-presa

Consideremos las ecuaciones de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = ax_1 - bx_1x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = cx_1x_2 - dx_2 \end{cases}$$

x_1 representa el número de presas, x_2 el número de predadores en el instante t, a, b, c, d son parámetros, ax_1 y $-dx_2$ son las tasas de reproducción de cada especie en ausencia de interacción con la otra especie, cx_1x_2 representa el aumento de los predadores en la presencia de las presas y $-dx_1x_2$ la reducción de las presas en la presencia de los predadores.

Utilizaremos el ambiente de modelación y simulación EJS, ejecutando EjsConsole.jar y abriendo el archivo ModeloPredadorPresa.ejs.



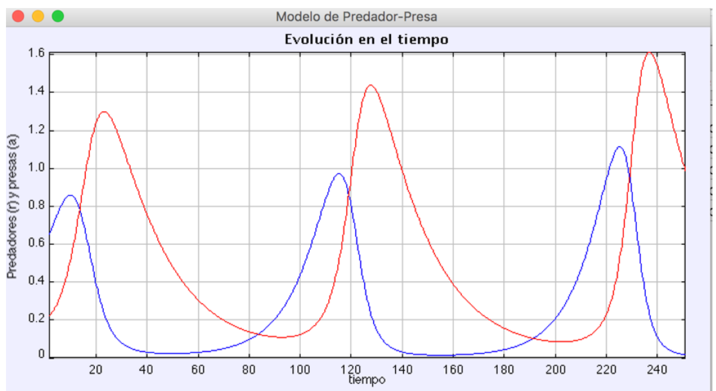
En la vista Modelo, Evolución observamos las dos ecuaciones diferenciales digitadas. El método numérico seleccionado es el de Euler.

En la vista variables (figuras abajo) definimos las variables dinámicas, sus valores iniciales normalizados

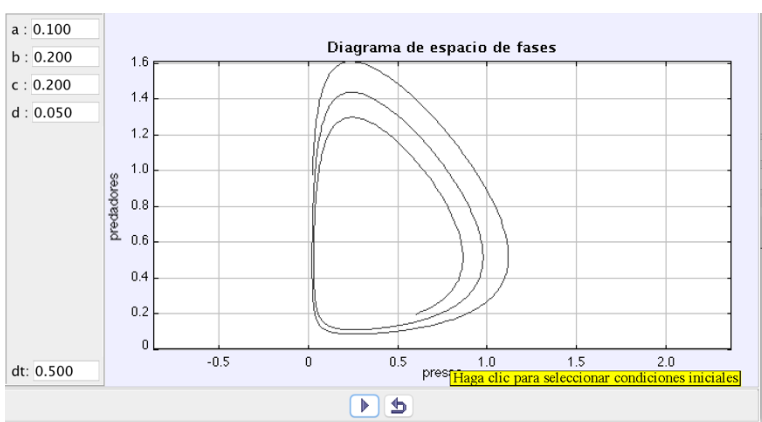
y los valores de los parámetros

Ejecutamos la simulación dando clic en el triángulo verde en el panel vertical del lado derecho

Inicializamos la evolución de las variables dinámicas con el tiempo, la gráfica azul representa la población de presas, la roja la de predadores.

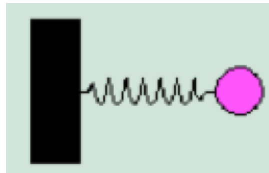


También graficamos, en el espacio de fases, la relación entre los predadores y las presas para los parámetros y las condiciones iniciales dadas. Posteriormente podemos cambiar los valores de los parámetros a, b, c, d y observar lo que sucede con las poblaciones de las presas y los predadores.



Sistema masa-resorte

Un objeto de masa m es conectado en un extremo de un resorte de longitud L y de masa despreciable. El otro extremo del resorte se encuentra fijo en un muelle (figura abajo).



Supongamos que la reacción del sistema al desplazamiento Δx desde la posición de equilibrio puede modelarse mediante la ley de Hooke: $F_{\Delta x} = -k\Delta x$ en donde k es una constante que depende de las características físicas del resorte.

Agregamos una fuerza de rozamiento que supondremos ser directamente proporcional a la velocidad del objeto y que se opone al movimiento: $F_r = -bv$, b es el coeficiente de rozamiento. Para finalizar añadimos una fuerza externa sinusoidal: $F_e = Asen(\omega t)$, ω es la frecuencia de la fuerza aplicada y A su amplitud.

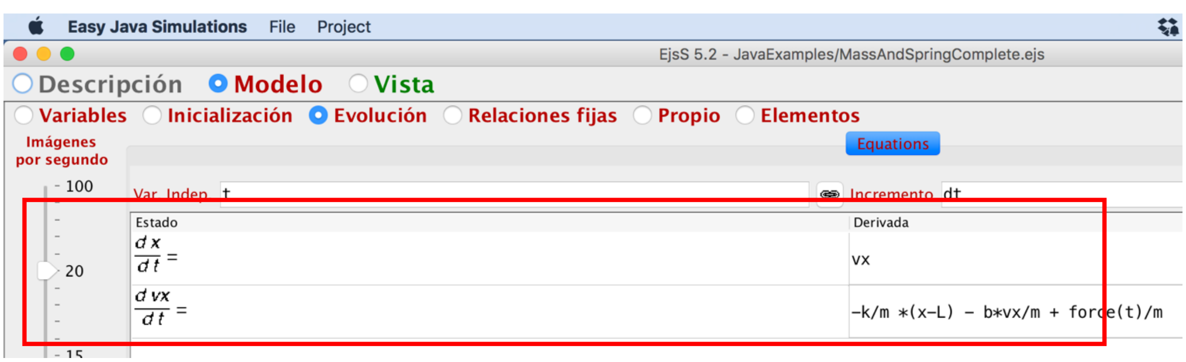
Si utilizamos un sistema de coordenadas con el eje x ubicado horizontalmente y con origen en el extremo fijo del resorte entonces la segunda ley de Newton se escribe como:

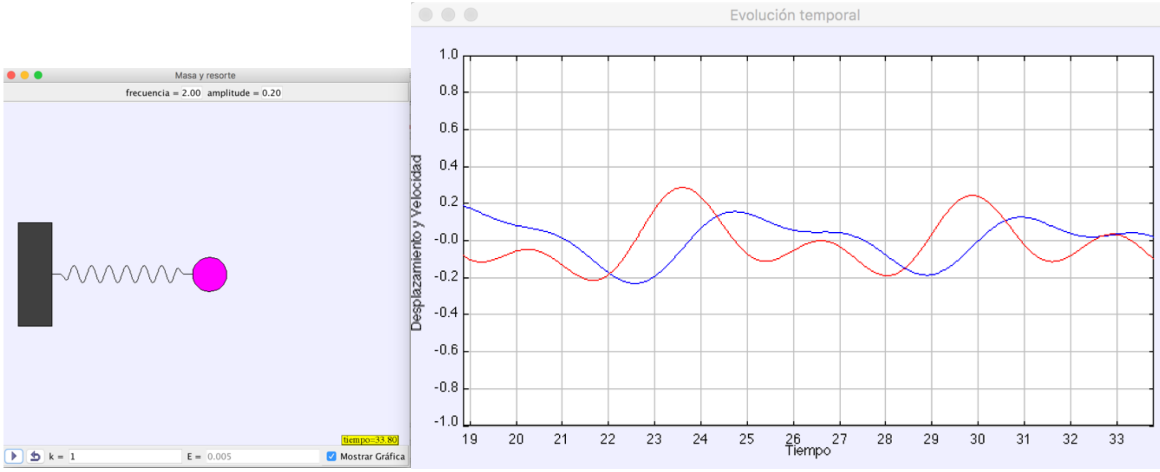
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-L) - b\frac{dx}{dt} + Asen(\omega t)$$

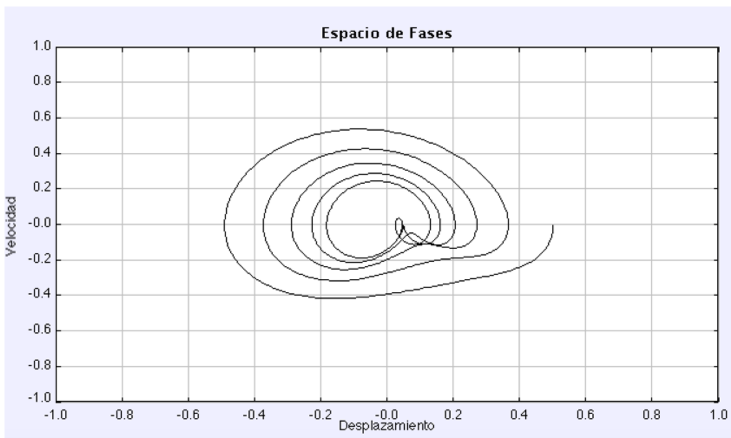
que se escribe como el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{k}{m}(x-L) - \dfrac{b}{m}v + \dfrac{A}{m}sen(\omega t) \end{cases}$$

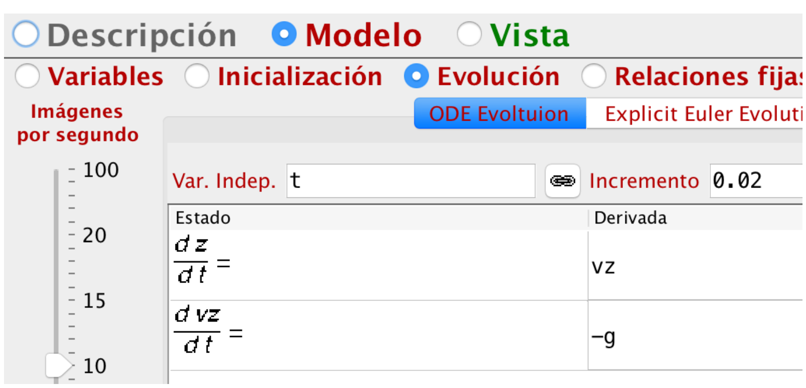
Sigue la implementación del modelo y su simulación con EJS.

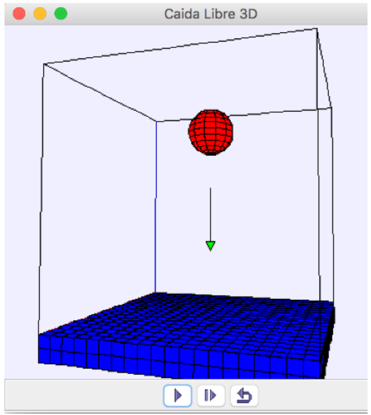


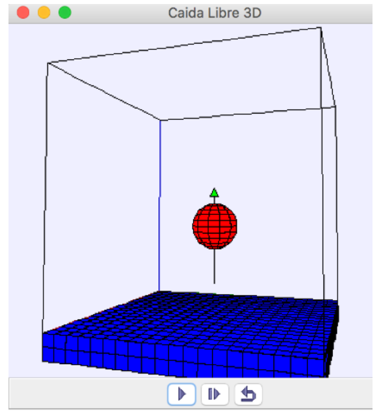




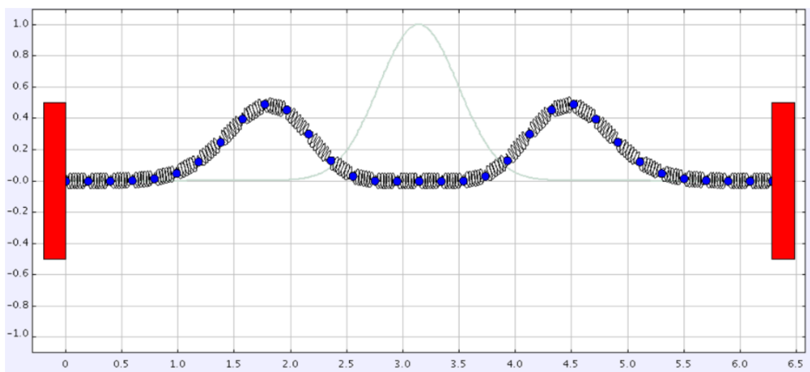
El sitio http://www.compadre.org/OSP contiene varios modelos matemáticos interesantes que pueden ser simulados con EJS, como por ejemplo el de una bola que cae libremente, bajo la acción de la gravedad, y es rebotada en el suelo, gobernada por la ecuación diferencial $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$

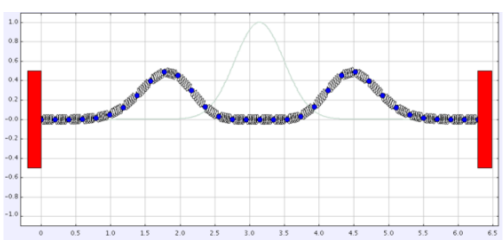


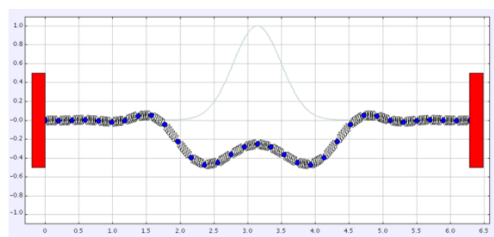




o bien de osciladores acoplados







Un modelo discreto sin simulación

Felix sacó una lata de soda de la refrigeradora. La temperatura inicial de la soda es 6 grados Celsius mientras que la temperatura ambiental, de su casa, es constante de 31 grados Celsius.

El cambio de temperatura en la soda por unidad de periodo de tiempo es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiental y la de la soda, la cual se mantiene uniforme (ley de Newton de calentamiento).

Si T_n es la temperatura de la soda después de n periodos de tiempo entonces

$$\Delta T_n = T_{n+1} - T_n = k(31 - T_n)$$

Por lo tango el modelo para el calentamiento de la soda es

$$T_{n+1} = T_n + k(31 - T_n)$$

Félix mide la temperatura de la soda 1 periodo de tiempo después de sacarla de la refrigeradora y encuentra que es 11 grados Celsius. ¿Cuál es la temperatura de la soda 4 periodos de tiempo después de sacarla de la refrigeradora?

Para responder a la pregunta planteada podemos calcular el valor de k utilizando el modelo y los datos: $T_0 = 6,\ T_1 = 11$.

$$T_1 = T_0 + k(31 - T_0) = 6 + 25k = 11$$

Por lo tanto $k = 0{,}2$ y el modelo es

$$T_{n+1} = T_n + 0{,}2(31 - T_n)$$

Ahora podemos construir una tabla con el modelo:

n	0	1	2	3	4
T_n	6	11	15	18,2	20,76

Después de 4 periodos de tiempo la temperatura de la soda es 20,76 grados Celsius.

Referencias Bibliográfícas

Blanchard P., Devaney R., Hall, G. (2012). Differential equations. Fourth edition. Brooks/Cole. USA.

Edwards, H. Y Penney, D. (2001). Ecuaciones diferenciales. 4ª ed. Pearson Educación de México, S. A. De C. V. México.

Zill, D. (2006). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 8ª ed. Thomson Editores S. A. De C. V. México.