Modelos matemáticos

Edison de Faria Campos
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Asociación de Matemática Educativa
edefaria@gmail.com

Resumen: Se utilizan modelos matemáticos sencillos que contienen distintos tipos de funciones matemáticas para resolver problemas. Los modelos utilizados son discretos o bien continuos y en una situación se describe una simulación basada en el modelo dado. También se desarrolla una metodología para construir un modelo lineal de mejor ajuste para una serie de datos.

Palabras clave: Resolución de problemas; modelación matemática; simulación

Introducción

Los programas de estudio de matemática para I, II y III ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) 2012, enfatizan la construcción y la utilización de modelos matemáticos para el desarrollo de la competencia matemática:

> […] una capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel de las Matemáticas en el mundo y hacer juicios bien fundados y decisiones necesarias para ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (MEP, 2012, p. 23)

En los mencionados programas se explicita que un modelo es en esencia un conjunto de elementos matemáticos conectados que representan una realidad específica y que hay que utilizarlos para generar o reforzar aprendizajes. La modelización siempre aparecerá de manera integrada al proceso "Plantear y resolver problemas" (MEP, 2012, p. 31).

En resumen podemos decir que un modelo matemático consiste en la descripción de un sistema utilizando conceptos y lenguaje matemáticos, y que su importancia radica en una mejor comprensión del fenómeno estudiado, para predecir cualitativa y cuantitativamente el comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones o en situaciones de interés.

Muchas veces el modelo utilizado es muy complejo y se hace necesario la simulación. En este caso hay que utilizar análisis numérico y tecnología digital para aproximar las soluciones numéricas de los modelos utilizados y simular, es decir, reproducir aproximadamente las principales características de su comportamiento. Una simulación por computador es un programa que intenta reproducir, con fines pedagógicos o científicos, un fenómeno natural a través de la visualización de los distintos estados que dicho fenómeno puede representar. El programa computacional puede ser de carácter general, como por ejemplo una hoja de cálculo o Geogebra, o bien específico para simulaciones como el Easy Java Simulations (EJS), Modelica, Simulationx, Modelicac o Wolfram System Modeler, entre otros.

A continuación se proponen situaciones relacionadas con la construcción o la utilización de modelos matemáticos.

Filtrado de medicina en la sangre

Suponga que cada 4 horas, sus riñones filtran el 25% de cierta medicina que se encuentra en su sangre. Si usted tomó una dosis de 1 000 mg de la medicina, construya un modelo matemático que relacione la cantidad de la medicina en la sangre en función del tiempo.

Inicialmente podemos hacer una *simulación* no digital para el fenómeno, utilizando material concreto. Para ello utilizaremos los siguientes materiales:

- Pichel de 2 litros
- Vaso de 250 ml
- Cuchara
- Colorantes de alimentos y bebidas
- Agua

Colocar 1 litro de agua en el pichel. Esta agua representa parte de la sangre que fluye en nuestro cuerpo.

Verter algunas gotas del colorante en el pichel y mezclar (utilice la cuchara). El colorante representa 1000 mg de la medicina ingerida.

Después de 4 horas los riñones filtran cerca del 25% de la medicina ingerida. ¿Cómo podemos modelar esto?

Elimine del pichel 250 ml de la mezcla (se supone que pasaron 4 horas) y coloque en él 250 ml de agua.

¿Cuántos miligramos de la medicina queda en la sangre?

¿Qué sucederá 4 horas después? ¿Qué cantidad de medicina será eliminada del cuerpo y qué cantidad queda en la sangre? ¿Qué sucederá a las 16 horas después de ingerida la medicina? ¿Todavía quedará medicina en la sangre o será completamente eliminada (líquido del pichel completamente claro)?

Hagamos el experimento para ver si la predicción es correcta. Repetir el procedimiento dos veces más. ¿Qué sucedió?

En el segundo periodo de 4 horas, los 250 ml de la mezcla eliminada contenían 750 mg de la medicina y por lo tanto a las 8 horas fueron eliminados 25% de los 750 mg de la medicina, lo que no corresponde a 250 mg.

Podemos representar en forma tabular la cantidad de medicina que queda en la sangre conforme transcurren las horas.

TIEMPO (HORAS)	**CANTIDAD DE LA MEDICINA QUE QUEDA EN LA SANGRE (MG)**
0	1000
4	¾ de 1000 = 750
8	¾ de 750 = ¾ de ¾ de 1000 = $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 1000$
12	¾ de $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 1000 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 1000$
16	¾ de $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 1000 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times 1000$
20	¾ de $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \times 1000 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times 1000$

¿Cuántos miligramos de la medicina quedarán en la sangre 16 horas después de ingerir la medicina?

¿Cuántos mg de la droga queda en la sangre después de 1 día? ¿2 días?

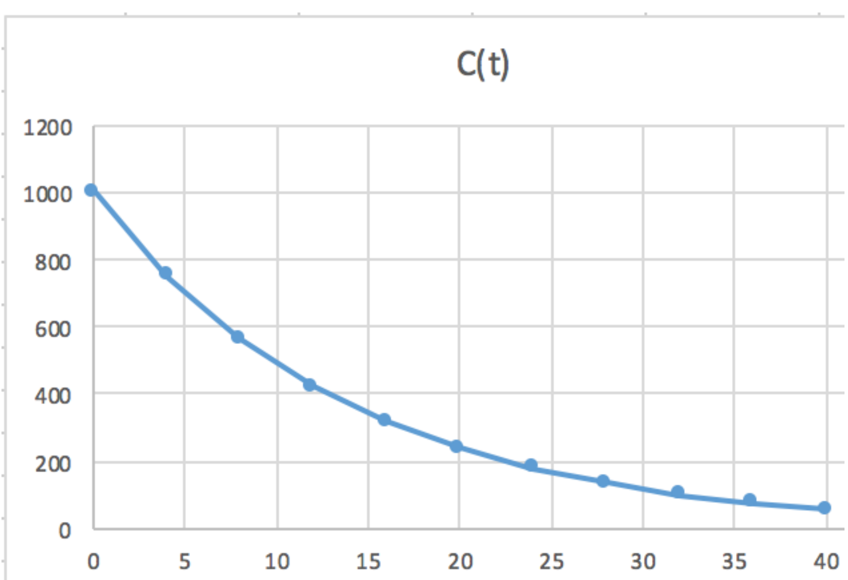
¿Qué modelo matemático es adecuado para representar el fenómeno?

Si $C(t)$ es la cantidad de medicina que queda en la sangre en el instante t, observando la tabla podemos concluir que un modelo matemático para esta situación es:

$$C(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^{t/4} \times 1000 \text{ mg}$$

¿Será completamente removida la droga de su sangre? Explique.

Podemos hacer una representación gráfica del modelo anterior.



De la gráfica anterior se puede inferir que en un tiempo finito, de vida humana, la medicina no será removida de la sangre.

¿Después de cuántos días quedará 1 mg de la droga en su cuerpo?

Para responder a la pregunta anterior hay que resolver la ecuación

$$C(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^{t/4} \times 1000 = 1$$

Podemos utilizar una calculadora para resolver la ecuación anterior. También podemos aplicar logaritmos

$$\frac{t}{4}\log_{10}\frac{3}{4} = \log_{10} 10^{-3} = -3$$

cuya solución aproximada es $t \approx 96$ horas.

Simulación de la propagación de una enfermedad contagiosa

Se propone un juego con el grupo.

Se solicitan a 10 voluntarios. Todos se ponen de pie y se asocia un número entero de 1 a 10 a cada uno de ellos.

Las 10 personas voluntarias son susceptibles de contraer una enfermedad contagiosa (una gripe).

En el primer día se generan 3 números aleatorios entre 1 y 10. Las salidas indican cuáles fueron infectados con el virus y que pueden tomar asiento.

El segundo día se generan otros 3 números aleatorios entre 1 y 10, y si alguna salida corresponde a una persona que se encuentra de pie entonces tendrá que tomar asiento pues está infectado.

Seguimos el procedimiento hasta que todos se encuentren infectados.

Día	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Cantidad de infectados									

Curva de ajuste para una serie de datos (parte 1)

Determinar un modelo polinomial para los datos registrados por Alicia en un experimento que corresponde al calentamiento de un líquido.

Tiempo(min)	Temperatura (^{0}C)
0	12
1	17
2	22
3	27
4	32

Datos registrados por Alicia

Una primera estrategia consiste en mirar las entradas de la tabla como los primeros términos de una sucesión numérica.

Los primeros términos de la sucesión $\{a_n\}$ son: 12, 17, 22, 27, 32, correspondientes a los valores de $n = 0, 1, 2, 3, 4.$

En este caso la sucesión es una *progresión aritmética* con primer término12 y diferencia d igual a 5 (para pasar de un término al siguiente hay que sumar 5). El término general de la sucesión es: $a_n = a_0 + n \times d = 12 + 5n.$

Por lo tanto, al considerar la variable independiente n continua en lugar de discreta, reemplazando n por x, a_n por y, obtenemos el siguiente modelo: $y = 5x + 12.$

Una segunda estrategia consiste en calcular las diferencias primeras $\Delta x, \Delta y$ en donde Δx es la diferencia en el tiempo entre dos registros sucesivos y Δy es la diferencia entre las temperaturas registradas en tiempos sucesivos.

x (tiempo, min)	y (temperatura, ^{0}C)	Δx	Δy
0	12		
1	17	1 – 0 = 1	17 – 12 = 5
2	22	2 – 1 = 1	22 – 17 = 5
3	27	3 – 2 = 1	27 – 22 = 5
4	32	4 – 3 = 1	32 – 27 = 5

Datos registrados por Alicia

En la tabla anterior podemos observar que Δy es constante. Como $\Delta x = 1$ entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$ es constante y esto nos indica que existe una relación lineal entre la variable dependiente y, y la variable independiente x, es decir, $y = ax + b$.

Lo anterior es porque para dos instantes sucesivos x_k , x_{k+1} las temperaturas correspondientes son $y(x_k) = ax_k + b, y(x_{k+1}) = ax_{k+1} + b$. Si restamos las dos ecuaciones obtendremos $\Delta y = y(x_{k+1}) - y(x_k) = a(x_{k+1} - x_k) = a\Delta x = a = 5.$

pues $\Delta x = 1, \Delta y = 5.$ El número $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la pendiente de la recta.

Entonces los datos registrados por Alicia satisfacen la ecuación $y = 5x + b$. Para encontrar el valor de b, el intercepto-y, podemos utilizar cualquier fila de la tabla. Por ejemplo, cuando $x = 0$, $y = 12$. Esto es suficiente para concluir que $b = 12$. El modelo para los datos de Alicia es $y = 5x + 12$, coincide con la representación algebraica encontrada utilizando sucesiones.

Curva de ajuste para una serie de datos (parte 2)

David registró en un laboratorio los siguientes datos obtenidos en un experimento.

x	y
0	1
1	0
2	3
3	10
4	21
5	36

Él quiere encontrar un modelo polinomial que se ajuste a sus datos. ¿Es posible esto? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuál es el menor grado para el polinomio?

Podemos empezar con la estrategia utilizada en el problema anterior, incluyendo columnas para las primeras diferencias $\Delta x, \Delta y$.

x	y	Δx	Δy
0	1		
1	0	1	-1
2	3	1	3
3	10	1	7
4	21	1	11
5	36	1	15

Vemos que, aunque Δx es constante e igual a 1, Δy no es constante. Esto nos garantiza que el polinomio, si existe, no es de grado 1. Pero podemos agregar columnas en la tabla para calcular las diferencias segundas, la resta entre los valores de Δy ubicados en dos filas sucesivas: $\Delta^2 y = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$.

x	y	Δx	Δy	$\Delta^2 y$
0	1			
1	0	1	-1	
2	3	1	3	3 – (-1) = 4
3	10	1	7	7 – 3 = 4
4	21	1	11	11 – 7 = 4
5	36	1	15	15 – 11 = 4

Como las diferencias segundas son constantes y $\Delta x = 1$ también es constante, entonces los datos pueden ser ajustados por un polinomio de segundo grado, de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

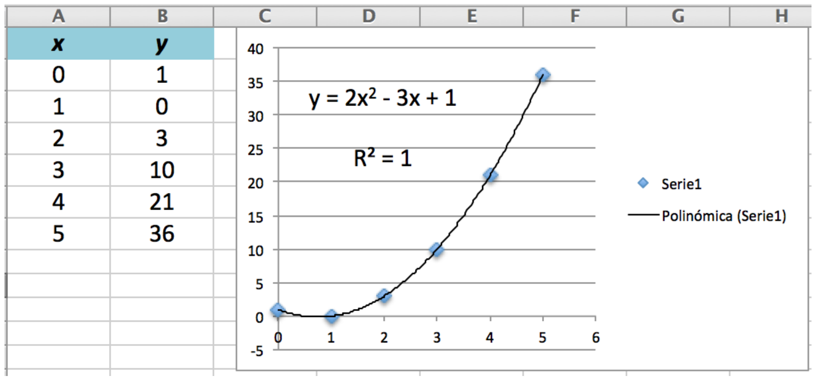
Para encontrar los valores de los parámetros a, b, c podemos utilizar tres filas de la tabla. Si utilizamos los puntos (0, 1), (1, 0) y (2, 3) obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = 2,\ b = -3, c = 1$. Por lo tanto los datos registrados por David son perfectamente ajustados por el polinomio de segundo grado

$y = 2x^2 - 3x + 1$

Esto puede ser comprobado con una hoja de cálculo como por ejemplo Excel, al determinar el polinomio de segundo grado de mejor ajuste para los datos de la tabla.



Comprobación con hoja de cálculo

Recta de mejor ajuste para una serie de datos

Federico registró en un laboratorio los siguientes datos obtenidos en un experimento.

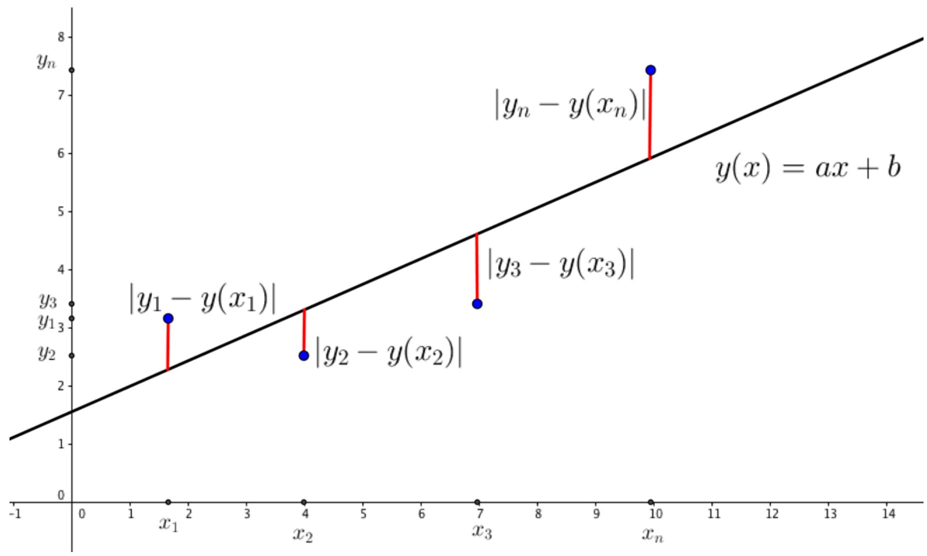
x	***y***
1	-1,2
2	1,5
3	2,8
4	5,3
5	6,8
6	9,4
7	11,4
8	12,8

Él quiere encontrar un modelo lineal para la curva de mejor ajuste a sus datos, utilizando únicamente sus conocimientos acerca de funciones lineales y cuadráticas. ¿Es posible esto? ¿Cómo hacerlo? ¿Se puede generalizar la metodología utilizada?

Dado un conjunto de n puntos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$, se quiere encontrar una recta con representación algebraica $y = ax + b$ de mejor ajuste para los datos, en dónde "mejor ajuste" significa que la suma de los cuadrados de las desviaciones en los valores de la ordenada "y" sea mínima. Esto quiere decir que la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos verticales que unen los círculos (que representan los datos) a la recta (de mejor ajuste) tiene que ser la menor posible (figura abajo).

Algebraicamente tenemos que minimizar la suma de los cuadrados de los errores (desviaciones)

$$[y_1 - (ax_1 + b)]^2 + [y_2 - (ax_2 + b)]^2 + \cdots + [y_n - (ax_n + b)]^2 \qquad (1)$$



Como hay que encontrar dos parámetros, a y b, podemos fijar uno de ellos (por ejemplo a) y obtener el otro parámetro (en este caso b) que minimiza la suma (1) del cuadrado de los errores.

Por ejemplo, si hacemos $a = 2$ en la expresión (1) obtendremos la función cuadrática

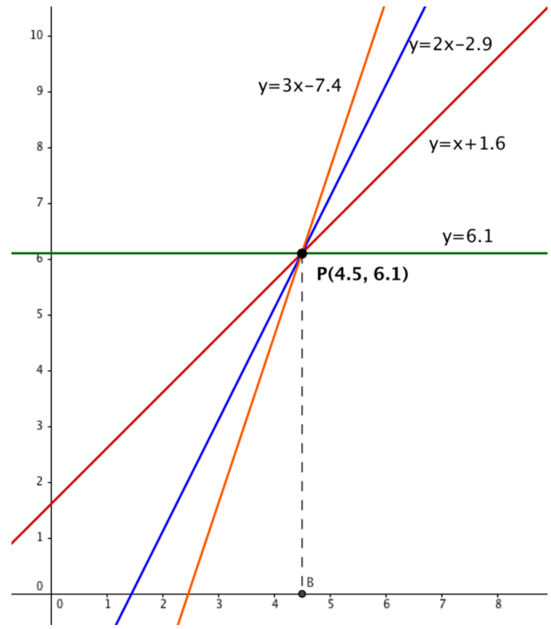
$y = [-1{,}2 - (2\times1 + b)]^2 + [1{,}5 - (2\times2 + b)]^2 + [2{,}8 - (2\times3 + b)]^2 + [5{,}3 - (2\times4 + b)]^2 + [6{,}8 - (2\times5 + b)]^2 + [9{,}4 - (2\times6 + b)]^2 + [11{,}4 - (2\times7 + b)]^2 + [12{,}8 - (2\times8 + b)]^2 = 8b^2 + 46{,}4b + 68{,}02$

El valor mínimo de la función cuadrática anterior ocurre en el vértice de la parábola, es decir, en el punto de abscisa $b = \frac{-46{,}4}{2\times8} = -2{,}9$. Como $a = 2$, la recta de mejor ajuste es $y = 2x - 2{,}9$.

Si repetimos el procedimiento para varios valores de la pendiente a obtendremos una tabla como la que sigue (para a = 0; 1; 2 y 3).

a	**SUMA DE CUADRADOS DE ERRORES (1)**	**VALOR DE b QUE MINIMIZA (1)**	**RECTA DE MEJOR AJUSTE**
0	$8b^2 - 97{,}6b + 468{,}02$	6,1	$y = 6{,}1$
1	$8b^2 - 25{,}6b + 64{,}02$	1,6	$y = x + 1{,}6$
2	$8b^2 + 46{,}4b + 68{,}02$	− 2,9	$y = 2x - 2{,}9$
3	$8b^2 + 118{,}4b + 480{,}02$	− 7,4	$y = 3x - 7{,}4$

Utilizando geogebra observamos que las cuatro rectas de mejor ajuste para las pendientes dadas tienen en común el punto $P(\bar{x}, \bar{y}) = (4{,}5\ ,\ 6{,}1)$ conocido como *centroide* de los datos.



La abscisa $\bar{x}$ es el promedio de las seis entradas:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = 4{,}5$$

mientras que la ordenada $\bar{y}$ es el promedio de las seis salidas:

$$\bar{y} = \frac{-1{,}2+1{,}5+2{,}8+5{,}3+6{,}8+9{,}4+11{,}4+12{,}8}{8} = 6{,}1$$

Todas las rectas que minimizan la suma (1) de los cuadrados de los errores (desviaciones) al fijar valores para el la pendiente a pasan por el *centroide* de los datos, y por lo tanto la recta de mejor ajuste que estamos buscando también pasa por el *centroide* de los datos. Nos hace falta encontrar otro punto de la recta de mejor ajuste, distinto del centroide de los datos, para resolver la situación dada.

Utilizaremos un procedimiento similar al aplicado anteriormente: fijar el valor de b y determinar el valor de a que minimiza la suma (1) de los cuadrados de los errores.

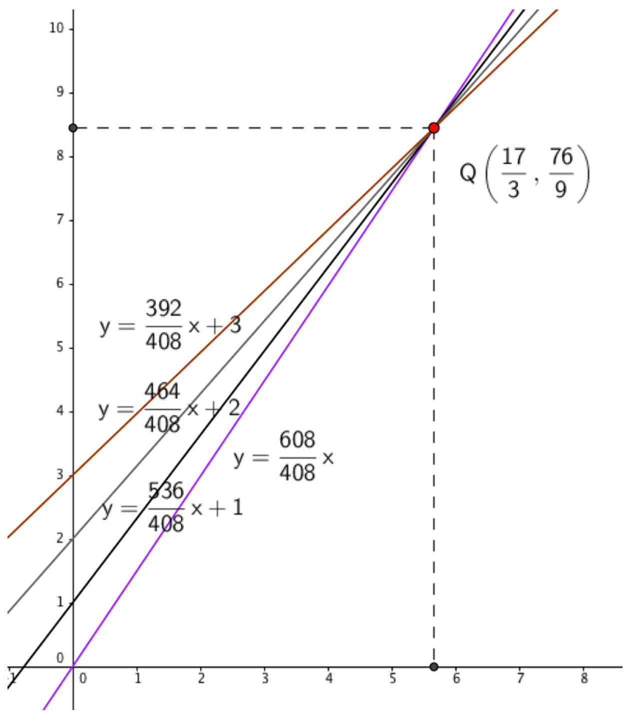
Por ejemplo, para $b = 3$ la expresión (1) se escribe como:

$$y = [-1{,}2 - (a+3)]^2 + [1{,}5 - (2a+3)]^2 + [2{,}8 - (3a+3)]^2 + [5{,}3 - (4a+3)]^2 + [6{,}8 - (5a+3)]^2 + [9{,}4 - (6a+3)]^2 + [11{,}4 - (7a+3)]^2 + [12{,}8 - (8a+3)]^2 = 204a^2 - 392a + 247{,}22.$$

El valor mínimo de la función cuadrática anterior ocurre en el vértice de la parábola, es decir, en el punto de abscisa $a = \frac{-(-392)}{2\times 204} = \frac{392}{408}$. Para el valor dado de b la recta de mejor ajuste es $y = \frac{392}{408}x + 3$.

Si repetimos el procedimiento para varios valores de b obtendremos una tabla como la que sigue (para b = 0; 1; 2 y 3).

b	**SUMA DE CUADRADOS DE ERRORES (1)**	**VALOR DE *a* QUE MINIMIZA (1)**	**RECTA DE MEJOR AJUSTE**
0	$204a^2 - 608a + 468{,}02$	$\frac{608}{408}$	$y = \frac{608}{408}x$
1	$204a^2 - 536a + 378{,}42$	$\frac{536}{408}$	$y = \frac{536}{408}x + 1$
2	$204a^2 - 464a + 304{,}82$	$\frac{464}{408}$	$y = \frac{464}{408}x + 2$
3	$204a^2 - 392a + 247{,}22$	$\frac{392}{408}$	$y = \frac{392}{408}x + 3$



En la representación gráfica anterior, construida con geogebra, observamos que las cuatro rectas que minimizan la suma (1) de cuadrados de los errores, para los valores dados para b, tienen en común el punto $Q(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = \left(\frac{17}{3}, \frac{76}{9}\right)$. Por lo tanto la recta de mejor ajuste para los datos de la tabla también pasa por el punto Q.

Si utilizamos los dos puntos, el centroide $P = \left(\frac{45}{10}, \frac{61}{10}\right)$ y $Q = \left(\frac{17}{3}, \frac{76}{9}\right)$ podemos determinar la ecuación de la recta de mejor ajuste para los datos de la tabla. La recta $y = mx + r$ que contiene los puntos P, Q tiene pendiente m es igual a

$$m = \frac{\frac{76}{9} - \frac{61}{10}}{\frac{17}{3} - \frac{45}{10}} = \frac{211}{105}$$

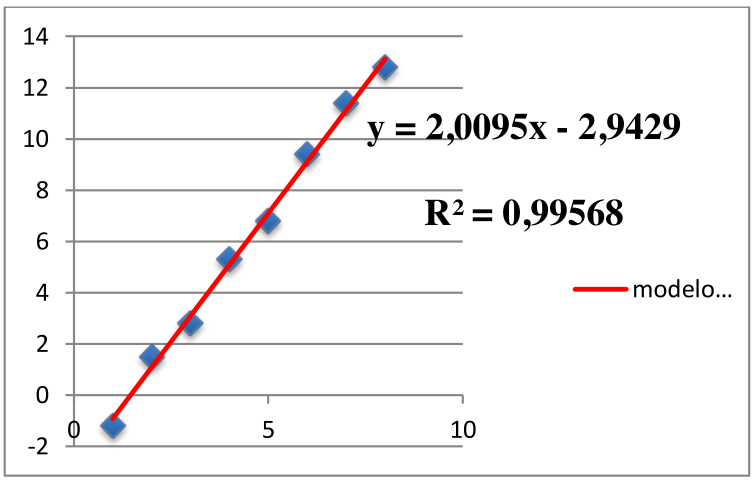
mientras que r el intercepto-y, si utilizamos el punto P es igual a

$$\frac{61}{10}-\left(\frac{211}{105}\right)\left(\frac{45}{10}\right)=-\frac{103}{35}$$

Concluimos que el *modelo lineal de la recta de mejor ajuste* para el conjunto de datos de nuestro problema con siete decimales es:

$$y=\frac{211}{105}x-\frac{103}{35}\approx 2.0095238x-2.9428571$$

El modelo encontrado coincide con la curva de tendencia dada por Excel, truncado con 5 decimales. Excel también calcula el coeficiente de determinación R^2 y este valor es muy cercano a uno, lo que indica que el modelo lineal se ajusta muy bien a los datos de la tabla.



En este análisis hemos desarrollado una metodología para modelar la recta de mejor ajuste para un conjunto de datos, utilizando unicamente conocimientos de funciones lineales y cuadráticas. Una introducción a este tipo de modelación matemática se encuentra en (National Council of Teachers of Mathematics, 2010).

Hemos visto que la recta de mejor ajuste para un conjunto de datos representados como puntos en el plano cartesiano pasa por el centroide de los datos. Para encontrar otro punto de la recta basta fijar dos valores distintos para el intercepto-y, y encontrar el punto de intersección de las dos rectas que minimizan (1). Este método puede ser generalizado para una cantidad arbitraria de puntos en el plano.

Referencias Bibliográficas

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas*. *Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2010. *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making in Algebra*. Reston, Va.: NCTM.