Fractales en el aula

Luis Fernando Ramírez Oviedo
Universidad Estatal a Distancia UNED
lramirez@uned.ac.cr
luis.ramirezoviedo@ucr.ac.cr

Resumen: El presente taller, forma parte de la evaluación del curso Introducción a los Fractales de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica. El mismo pretende introducir conceptos propios de la geometría fractal al currículum escolar. Por medio del azar y la geometría se estudia la convergencia de una serie de puntos al triángulo de Sierpinski. Se estudian algunas características del triángulo de Sierpinski para introducir el concepto de fractal. Mediante una serie de preguntas generadoras y los resultados obtenidos por los estudiantes se establecen conclusiones sobre geometría, probabilidad y álgebra. El taller no pretende recargar el currículum escolar con nuevos conceptos, por el contrario pretende conectar y fortalecer conceptos ya estudiados, o en su defecto introducir algún nuevo concepto propio del currículum.

Palabras clave: Fractales, Enseñanza de la Matemática, Triángulo de Sierpinski.

Introducción

En la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica (UNED), se cuenta con un curso de la licenciatura en la Enseñanza de la Matemática llamado Introducción a los Fractales, en el cual, los estudiantes deben desarrollar un taller con veinticinco estudiantes de secundaria, registrar los resultados y compartir conclusiones con los demás compañeros de curso.

La finalidad del taller es incorporar elementos propios de la geometría fractal para introducir nuevas temáticas del currículum escolar o realizar conexiones entre conceptos existentes y en cualquiera de los dos casos, fortalecer la resolución de problemas como técnica para desarrollar habilidades en el contexto escolar.

El taller pretende vincular los fractales con estadística, probabilidad, geometría y álgebra. Se espera que cada docente durante la implementación del taller en el curso, obtenga una retroalimentación de cómo mejorarlo para volverlo aplicar y determinar que conceptos del currículum escolar puntualmente podría introducir o reforzar mediante la geometría fractal a lo largo de su carrera profesional.

El uso de la tecnología es de suma importancia, trabajar con los estudiantes mediante una hoja de cálculo electrónica que les permita emular el dado y obtener cientos o miles de iteraciones puede ayudar a interpretar mejor los resultados y de una forma más precisa.

El triángulo de Sierpinski

Waclaw Franciszek Sierpenkins (Varsovia, 1882 - República Popular de Polonia, 1969), fue un matemático polaco. Son notables sus aportaciones a la teoría de conjuntos, la teoría de números, la topología y la teoría de funciones. Tres conocidos fractales llevan su nombre: Triángulo de Sierpinski, Alfombra de Sierpinski y Curva de Sierpinski.

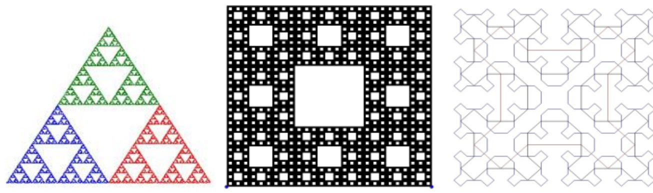

Figura 1. Triángulo, alfombra y curva de Sierpinski

Descripción del Taller

Este taller consta de tres actividades que deben ser desarrolladas con un grupo de 25 estudiantes de secundaria.

Materiales:

- 15 filminas o transparencias.
- 5 Marcadores de punta fina.
- 5 Cartones.
- 5 dados.
- 5 reglas.

Actividad 1

Divida al grupo de estudiantes seleccionado en cinco grupos de cinco estudiantes cada uno.

Entregue a cada grupo de estudiantes una filmina con un triángulo equilátero $\Delta\, ABC$ dibujado (este triángulo debe ser del mayor tamaño que permita la filmina), un dado, una regla y un marcador.

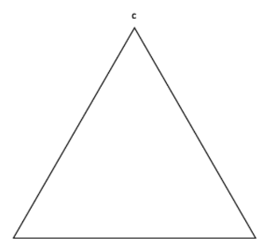

Figura 2. Triángulo equilátero- filmina 1

- Los estudiantes dibujaran un punto cualquiera fuera del triángulo al que llamarán punto inicial Q_0.
- Cada estudiante lanzará el dado una vez, si obtiene un 1 o 2 debe dibujar el punto medio entre el punto inicial Q_0 y el vértice A, si obtiene un 3 o 4 debe dibujar el punto medio entre el punto inicial Q_0 y el vértice B y si obtiene un 5 o 6 debe dibujar el punto medio entre el punto inicial Q_0 y el vértice C. Sin importar el número que haya salido, al punto medio dibujado se le llamará Q_1.
- Una vez obtenido el punto Q_1 se lanza de nuevo el dado y se repite la instrucción anterior, pero ahora dibujando el punto Q_2 que será el punto medio entre A y Q_1 o entre B y Q_1 o entre C y Q_1.
- Debe lanzarse el dado al menos 200 veces hasta obtener 200 puntos, los cuales deben ser dibujados por cada grupo en su respectiva filmina 1.
- El docente debe indicar al inicio dos preguntas importantes a responder cada grupo durante la actividad. (Entregue una hoja por grupo con las preguntas y el suficiente espacio para responderlas).

Preguntas:

- Si el punto inicial Q_0 se colocó fuera del triángulo, ¿Cuántos lanzamientos del dado debieron pasar para que el punto cayera dentro del triángulo?
- Una vez que un punto cayó dentro del triángulo, ¿cuántos puntos posteriores a ese cayeron fuera?

Actividad 2

Entregue una filmina (filmina 2) a cada grupo con el dibujo de la primera iteración del triángulo de Sierpinski. (Esta filmina debe contener un triángulo del mismo tamaño que los demás, pues deben calzar ambos triángulos, No pinte ninguna de las regiones del triángulo de Sierpinski, solo son necesarias las líneas que dividen los triángulos). Indique que deben cuidar y no rayar la filmina 2 pues se utilizará de nuevo en la actividad 3.

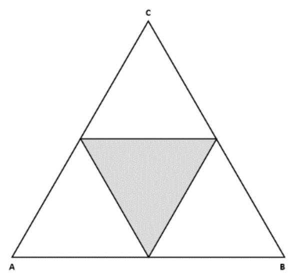

Figura 3. Primera Iteración del triángulo de Sierpinski – filmina 2

Cada grupo debe superponer la filmina 2 entregada con la primera iteración del triángulo sobre la filmina 1 que contiene los 200 puntos. Luego debe responder a las siguientes preguntas

- ¿En cuántos triángulos se particionó el triángulo inicial?
- ¿Se podría asegurar que dichos triángulos son congruentes entre sí?
- ¿Qué porción del área del triángulo inicial representa cada triángulo obtenido de la partición?
- ¿Cuántos puntos cayeron en el triángulo del centro?

Entregue una filmina (filmina 3) a cada grupo con el dibujo de la segunda iteración del triángulo de Sierpinski. (Esta filmina debe contener un triángulo del mismo tamaño que los demás, pues deben calzar ambos triángulos. No pinte ninguna de las regiones del triángulo de Sierpinski, solo son necesarias las líneas que dividen los triángulos). Indique que deben cuidar y no rayar dicha filmina pues se utilizará de nuevo en la actividad 3.

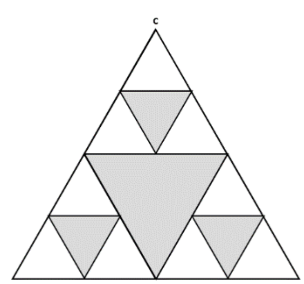

Figura 4. Segunda Iteración del triángulo de Sierpinski – filmina 3

Cada grupo debe superponer la filmina 3 entregada con la segunda iteración del triángulo sobre la filmina 1 que contiene los 200 puntos. Luego debe responder a las siguientes preguntas

- ¿En cuántos triángulos se particionó el triángulo inicial?
- ¿Se podría asegurar que dichos triángulos son congruentes entre sí?
- ¿Qué porción del área del triángulo inicial representa cada triángulo obtenido de la nueva partición?
- ¿Cuántos puntos cayeron en el triángulo del centro del triángulo en la región inferior derecha?

Todos los grupos superpondrán sus filminas con los 200 puntos al mismo tiempo. (Es decir se deben superponer todas las filminas en las que se dibujaron los 200 puntos)

- Se deben comparar los resultados de cada grupo y responder a algunas preguntas:
- Tras comparar los resultados de la pregunta ¿Cuántas iteraciones debieron transcurrir para que un punto cayera dentro del triángulo? intente responder a la siguiente
- ¿Existe alguna forma de estimar en cuál iteración caerá el primer punto adentro del triángulo? Si la respuesta es afirmativa ¿Cómo podría determinar esa forma para estimar?
- Tras la pregunta ¿cuántos puntos cayeron fuera del triángulo después de que el primer punto cayó dentro del triángulo? responda ¿Se puede asegurar que una vez que un punto cae dentro del triángulo sin importar cuántas iteraciones hayan pasado ya no volverá a caer un punto afuera del triángulo?
- Después de realizar la primera partición del triángulo ¿Cuántos triángulos congruentes obtuvo?
- ¿Cuál es el área de cada triángulo si el triángulo inicial tiene área $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ donde l representa la medida de los lados del triángulo?
- ¿Cuántos puntos cayeron en el triángulo del centro?
- Si tomamos el promedio de los puntos que cayeron en el triángulo del centro en cada grupo ¿Qué porcentaje del total de los 200 puntos cayó en el triángulo del centro?
- Después de realizar la segunda partición del triángulo ¿Cuántos triángulos congruentes obtuvo?
- Cuál es el área de cada triángulo (excepto el triángulo del centro de la primer partición) si el triángulo inicial tiene área $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ donde l representa la medida de los lados del triángulo inicial.
- ¿Cuántos puntos cayeron en el triángulo del centro del triángulo de la esquina inferior derecha?
- Si tomamos el promedio de los puntos que cayeron en el triángulo del centro de la esquina inferior derecha en grupo ¿Qué porcentaje del total de los 200 puntos cayó en dicho triángulo?

Las actividades realizadas hasta el momento, le permiten al docente y a los estudiantes realizar algunas conjeturas. Acerca del comportamiento de los puntos.

Es importante formalizar algunos conceptos, para ello el docente de utilizar un video proyector para mostrar a los estudiantes una presentación de Power Point con la construcción del triángulo de Sierpinski (disponible en http://fermathcr.blogspot.com/) y que se elaboró como tarea en el curso de introducción a los fractales). Con el fin de conectar el trabajo realizado en las filminas con el triángulo de Sierpinski, esta le permitirá definir mediante un ejemplo qué es un fractal y al mismo tiempo mostrar que mediante el juego del caos y a pesar de las condiciones diferentes que se den en cada equipo (pues la aleatoriedad de los dados constituye un orden diferente de puntos) existe convergencia de los conjuntos de puntos al triángulo de Sierpinski. Además puede indicar que la cantidad de puntos que caen en los triángulos centrales en cada región de la partición (los cuales son los que se eliminan durante la construcción de Sierpinski) es muy pequeña, lo cual confirma que la mayoría de los puntos que se dibujen se encuentran dentro del triángulo de Sierpinski.

Actividad 3. El juego del triángulo Caliente

Realice el siguiente juego con los cinco grupos de estudiantes

Etapa 1.

- Entregue a cada grupo de estudiantes un cartón (cuadrado) con el dibujo del triángulo de Sierpinski de las dimensiones usadas al inicio en las actividades 1 y 2.
- Entregue la filmina 2 usada en la actividad dos con la primer iteración del triángulo de Sierpinski, esta debe superponerse sobre el cartón.
- En este caso la única región del interior del triángulo que **no** pertenece al triángulo de Sierpinski es el triángulo del centro.
- El profesor pondrá el punto inicial fuera del triángulo de Sierpinski y cada grupo iniciará a jugar lanzando el dado estudiante por estudiante y dibujado el punto correspondiente según las instrucciones de la actividad 1.
- Si un estudiante al lanzar el dado y dibujar su respectivo punto cayó dentro del triángulo de Sierpinski saldrá del juego. Los demás compañeros del grupo siguen jugando hasta que solamente sobreviva un jugador, el cual será el ganador del juego.

Etapa 2.

- Repita el juego pero ahora utilizando la filmina con la segunda iteración del triángulo de Sierpinski.
- Recuerde a los estudiantes que los triángulos centrales de cada región del interior del triángulo **no** forman parte del triángulo de Sierpinski, de tal modo que la única forma de que un estudiante continúe jugando es cayendo fuera del triángulo o en uno de dichos triángulos centrales.

Nota: Si un estudiante (punto) cae sobre una línea (límite entre dos regiones o triángulos) podrá seguir jugando.

Al final se deben plantear las siguientes preguntas:

- Qué relación puede encontrar entre este juego *El triángulo Caliente* y el conocido juego *La Papa Caliente*
- ¿Es posible que al jugar, ningún jugador caiga dentro del triángulo de Sierpinski haciendo este juego interminable?
- ¿Cómo varía el juego al tomar particiones con cada vez más y más triángulos? es decir ¿En qué afecta que existan más o menos triángulos?

Importante: El docente debe registrar todas las etapas de cada una de las actividades, se recomienda tomar fotografías, grabar videos y escanear las respuestas que escriben los estudiantes y registrar las conjeturas que realicen los estudiantes. Todos los registros deben organizarse, y se debe establecer conclusiones acerca del taller implementado por cada docente. Con la finalidad de realizar un análisis posterior en conjunto con todos los demás compañeros del curso.

Conclusiones

Las tres actividades mencionadas anteriormente, buscan establecer vínculos entre diferentes conceptos del currículum escolar, ya que algunas veces el estudiante no logra realizar conexiones entre conceptos de diferentes áreas, por ejemplo geometría y probabilidad.

La participación en equipo enfrentándose a las actividades mencionadas, pretenden fomentar las estrategias de resolución de problemas para estudiar elementos del currículum escolar.

El uso de los fractales en el aula pretende estudiar conceptos propios del currículum escolar a partir de conceptos externos como el triángulo de Sierpinski que no es vinculante con la evaluación, eliminando esto la presión que siente un estudiante al enfrentarse a un concepto nuevo.

Las diferentes aplicaciones (disponibles en http://fermathcr.blogspot.com) sobre fractales que se pueden ilustrar, buscan que el estudiante comprenda la importancia de la matemática en la sociedad, ayudando a motivar el estudio de los conceptos propios del currículum escolar a partir de su conexión con objetos externos que requieren de los mismos para su análisis.

En general, el taller pretende convertirse en una pequeña herramienta para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en las diferentes instituciones educativas costarricenses. El mismo puede ser modificado partiendo de la experiencia y el profesionalismo de los docentes en su labor diaria.

Referencias Bibliográficas

Alfaro A., Murillo, M. y Soto, A. Fractales. (2010). *Revista digital, Matemática, Educación e Internet*. Disponible en www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/Libros/index.htm

Atencia, V. Fractales Matemáticos. (2014). Trabajo Final de Grado en Matemática. Universidad de Barcelona España.