EL USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EN ALUMNOS DEL BACHILLERATO

Salinas, J.

CCH-UNAM, México

Resumen

El propósito de este trabajo es presentar los resultados de un experimento de enseñanza, el cual utiliza la historia de las matemáticas como recurso didáctico. Se aplica esta estrategia en un curso de bachillerato para introducir a los alumnos en el aspecto deductivo de la geometría euclidiana.

Abstract

The intention of this work is to present the results of a teaching experiment, which uses the history of the mathematics as didactic resource. This strategy is applied in a course of high school to introduce the students to the deductive aspect of the Euclidean geometry.

Palabras clave: Historia, Geometría, Didáctica, Aprendizaje, Deducción.

Key words: History, Geometry, Didactic, Learning, Deduction.

Salinas, J (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 557-568). Lleida: SEIEM.

Introducción

En este escrito se reportan los resultados de un experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000) en el cual se diseña y aplica una estrategia para utilizar la historia de las matemáticas como un recurso didáctico. El propósito es observar el aprendizaje matemático y el razonamiento de los alumnos, a través de lo que hacen y expresan. Se utiliza como introducción de un curso de geometría plana para alumnos del bachillerato. Enfocamos nuestra atención fundamentalmente en dos aspectos:

- conocer la actitud de los alumnos ante temas de la historia de las matemáticas, y
- observar si este tratamiento histórico ayuda a los alumnos a introducirse al carácter deductivo de la geometría.

Se adopta una perspectiva histórica con una doble función: tanto como elemento motivador para un acercamiento a las matemáticas y como recurso didáctico para propiciar una mejor comprensión de los contenidos del programa de la asignatura (Maz, 1999). En este enfoque se aborda el conocimiento matemático como parte de la cultura que produce una sociedad en determinado momento histórico (Rico, 1998). Así, se muestra a los alumnos que las matemáticas tienen un origen multicultural y una estrecha relación con el arte, la música, la arquitectura, la economía, etc. (Maz, 1999).

Se diseña una secuencia didáctica, en la cual el tratamiento histórico se enfoca en el cambio que surgió al modificar la actitud hacia las matemáticas, y se enfocó su estudio hacia las propiedades de los números y de las figuras geométricas; contrario al enfoque anterior centrado en la resolución de problemas prácticos.

Marco Teórico

Un experimento de enseñanza involucra una secuencia de episodios de enseñanza. Dichos episodios “incluyen un agente de enseñanza, uno o más estudiantes, un testimonio de los episodios de enseñanza, y un método de registro de lo que sucede durante el episodio” (Steffe & Thompson, 2000, p.274). En nuestro caso, adaptamos la noción de experimento de enseñanza, que está concebida para periodos largos, a una aplicación corta; conservando el propósito de explorar y explicar las actividades matemáticas de los estudiantes.

Para el diseño del experimento, seguimos diferentes ideas que se enmarcan en la perspectiva sociocultural de Vygotsky (1995), la cual considera los procesos de mediación semiótica de las herramientas culturales, de los instrumentos psicológicos[1] y de la mediación social. En esta perspectiva, incorporamos el cine como una herramienta cultural que permite el tratamiento novedoso de contenidos complejos (Giddens, 1995).

Para Vygotsky, el proceso de aprendizaje aparece, como un proceso de apropiación de los métodos de acción de una cultura dada. En esta apropiación los instrumentos psicológicos o simbólicos desempeñan una función esencial. De acuerdo con Feuerstein (1990), para que una experiencia de enseñanza pueda propiciar la adquisición de instrumentos psicológicos debe cumplir con tres características fundamentales: Intencionalidad, trascendencia y significado. La intencionalidad se refiere a la principal función del mediador, la cual es transformar una experiencia incidental en intencional. Esta intencionalidad se enfoca hacia el objeto de aprendizaje. Se realizó llamando la atención de los alumnos hacia el aspecto de interés del objeto de aprendizaje, es decir, el carácter histórico de los conceptos matemáticos de número y figura geométrica. La trascendencia se refiere a que la enseñanza debe conducir hacia algo que trascienda el tema específico y apunte hacia la transmisión de la cultura. En nuestro caso, el aprendizaje que se pretendió fue que los alumnos, se iniciaran en la elaboración de una argumentación deductiva para justificar un resultado geométrico. Con respecto al significado, se llamó la atención sistemáticamente hacia la importancia de las propiedades de los números y de las figuras geométricas.

Metodología

De acuerdo con el marco teórico, en estas actividades estuvieron implicados grupos de personas con una interacción social determinada y la práctica comunicativa. Así, las actividades se resolvieron en parejas, y se alternaron con otras que los alumnos resolvieron individualmente. Todas las intervenciones del profesor-investigador estaban orientadas por las características de intencionalidad, trascendencia y significado descritas en el marco teórico. Se propició siempre la discusión matemática (Mariotti, 2001) con el grupo en su conjunto, para negociar el significado matemático de las actividades.

Se diseñaron actividades de clase cuyos contenidos reprodujeran, por analogía, procesos históricos que influyeron en la aparición de la geometría deductiva. Se explicó previamente a los alumnos el cambio de enfoque de la matemática helena, que dio origen a la geometría deductiva, y que representa una superación muy importante respecto del carácter empírico, característico de la matemática de las antiguas culturas de Mesopotamia y Egipto.

---

[1] Los instrumentos psicológicos son los recursos simbólicos – signos, símbolos, textos, formulas medios gráfico-simbólicos – que ayudan al individuo a dominar sus propias funciones psicológicas naturales (Kozulin, 2000).

Fueron dos los momentos que se consideraron, del proceso de desarrollo histórico de la matemática helena. Por una parte, el trabajo de los pitagóricos, y por otra, la filosofía de Platón. Para los pitagóricos los números eran la esencia de la naturaleza pues consideraban que todas las cosas están literalmente compuestas de números, es decir, no distinguían realmente los números de los puntos geométricos, entendidos naturalmente como puntos extensos o esferas minúsculas. No hay distinción entre cuerpo físico y cuerpo geométrico (González Urbaneja, 2009). Una contribución griega fundamental a la matemática, es el énfasis de Platón de que los objetos matemáticos, números y figuras geométricas son ideas elaboradas por la mente y claramente diferenciadas de los objetos o imágenes físicas. Esta concepción platónica, que distingue las figuras visibles y concretas de las ideas que ellas representan, es la que se encuentra plasmada en los Elementos de Euclides.

Estos momentos del proceso histórico del desarrollo de la geometría deductiva tienen un paralelismo con el desarrollo conceptual que siguen los alumnos para comprender el carácter abstracto y general de las matemáticas (Balacheff, 1987).

La población de estudio

La población observada fue un grupo de 25 alumnos de segundo semestre del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, durante las actividades escolares de un curso ordinario. Participaron 8 hombres y 17 mujeres con edades entre 15 y 16 años.

Instrumentos de observación

Los datos que se obtuvieron fueron tomados de las hojas de actividades realizadas en el salón de clase y cuestionarios. Tales datos fueron expresados en forma de textos y se realizó un análisis cualitativo de ellos.

Procedimiento

Para la aplicación de este experimento de enseñanza se llevó a cabo una secuencia didáctica en la que se utilizaron diversas actividades. La duración fue de 8 horas.

APERTURA DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA. Consistió en ver con el grupo una película. Antes el profesor, comentó el sentido de la película para el curso y posteriormente cada alumno, buscó información para responder un cuestionario. El título es: "*Π el orden del caos*", en cuya trama el personaje central es un matemático, experto en teoría de números. Esta película proporciona una oportunidad de abordar aspectos de la historia de la matemática, no obstante que los personajes son de nuestro tiempo. La premisa central, en torno a la cual se desarrolla la película, es la tesis central de la filosofía pitagórica: Todo puede representarse y entenderse con números.

El personaje central se conduce en todo momento con la idea que las matemáticas son el lenguaje de la naturaleza y que al graficar cualquier sistema surgen patrones y por lo tanto hay patrones en toda la naturaleza. Incluso, otros personajes, hacen explícito el carácter místico y religioso que los pitagóricos imprimieron a la matemática. Después de comentar la película respondieron el cuestionario siguiente:

1. ¿Cuáles eran las creencias de los pitagóricos acerca de las matemáticas, el mundo y la religión?
2. ¿Qué creían los pitagóricos acerca del mundo? ¿Es algo caótico u ordenado?
3. ¿Cuáles eran las propiedades místicas que los pitagóricos asignaban a los números?
4. ¿Cuáles son las características de la proporción dorada que se menciona en la película y cómo ha sido utilizada en la pintura y la arquitectura?

Las razones de esta actividad (Fauvel, 1991) fueron:

1. propiciar la motivación para el aprendizaje;
2. mostrar el aspecto humano de las matemáticas; y
3. cambiar en los alumnos la percepción de las matemáticas.

DESARROLLO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA. Los estudiantes resolvieron problemas de la aritmética pitagórica y después se les pidió mostrar la validez de dos proposiciones. La primera actividad la realizaron en parejas constituidas por ellos mismos y la segunda de manera individual. Se utilizaron dos sesiones de hora y media cada una.

En la primera sesión se les informó que la aritmética pitagórica se prestaba por sí misma a una representación geométrica de los números. Los pitagóricos estudiaron las propiedades de los números y realizaron diversas clasificaciones y acuñaron nombres para los diversos tipos de números. Entre el tipo de números que caracterizaron están los números poligonales. Estos números se van formando como suma de los términos de ciertas sucesiones de números enteros.

Tomando en cuenta lo anterior, se les presentó la tabla, que aparece en la figura 1, para observarla y en base a ella responder las siguientes preguntas:

Indica los números triangular, cuadrado, pentagonal y hexagonal que siguen a los de la tabla; y dibújalos.

¿Cómo se forman los números triangulares?

¿Cómo se forman los números cuadrados?

¿Cómo se forman los números pentagonales?

¿Cómo se forman los números hexagonales?

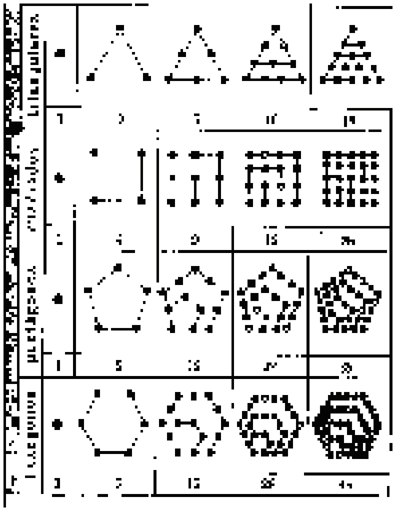

FIGURA 1. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS TRIANGULARES, CUADRADOS, PENTAGONALES Y HEXAGONALES

En la segunda sesión, se les pidió tomar en cuenta las figuras de los números poligonales y mostrar que:

1. Todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.
2. La suma de dos números triangulares iguales es igual a un número poligonal cuyo valor en puntos es el producto de los puntos en cada lado.

Estas actividades permiten focalizar la atención de los alumnos en las propiedades y relaciones entre los números, distanciándolos de su aplicación práctica. Implican procesos más abstractos de representación y de razonamiento, no determinados por un contexto real sino por el uso de instrumento psicológicos, es decir, esquemas de representación aritmética y geométrica.

CIERRE DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA. Previamente, los alumnos habían investigado sobre el mito de la caverna de Platón. El profesor explicó la idea platónica de los objetos matemáticos, consistente en la desmaterialización de la idea pitagórica de los objetos matemáticos. Así, se retomaron algunos aspectos de la historia de las matemáticas y se comentó a los alumnos que para Platón los conceptos matemáticos no se refieren a las figuras visibles y concretas, como a los pitagóricos, sino a las ideas que ellas representan. En la geometría euclidiana, el razonamiento que hacemos se basa en las figuras geométricas definidas por sus propiedades. El propósito de esta actividad es observar si los alumnos mueven la atención del aspecto empírico de la figura hacia el aspecto formal, es decir, hacia las propiedades y relaciones. Se les pidió resolver el siguiente problema:

En la siguiente figura A y B son centros de las circunferencias que aparecen. Si se trazan los segmentos AP y BP se forma un triángulo. ¿Qué tipo de triangulo es? ¿Qué argumentos puedes dar para demostrar que tu afirmación es verdadera?

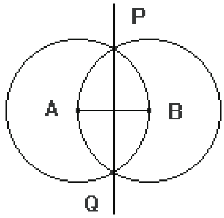

FIG. 2

Resultados y Discusión

APERTURA DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Todos los alumnos mencionan, de alguna manera, las siguientes ideas:

- Los pitagóricos consideraban que los números son el principio y esencia de todas las cosas.
- Los pitagóricos afirmaban que el universo es armónico.
- La matemática pitagórica no es sólo una técnica operatoria, sino sobre todo el descubrimiento de las propiedades de los números y sus relaciones.
- Los números, más allá del aspecto cuantitativo, revelan propiedades eternas e inmutables del mundo.

Así, observamos que de la información que recogen los alumnos para responder el cuestionario, seleccionan elementos relevantes del tema y que son abordados en la película. Esto muestra una adecuada asociación entre las respuestas y los contenidos de la película. Por consiguiente, las respuestas reflejan cierta comprensión de dichas ideas. Esta información se sigue aprovechando en las actividades subsecuentes para seguir enriqueciendo su comprensión.

También, se aplicó un cuestionario con tres preguntas:

> ¿La película de "π el orden del caos" te despertó mayor interés por las matemáticas? Si_ No__ ¿Qué aspecto te resultó interesante?

¿Dicha película te hizo ver aspectos que no tenías en cuenta de la matemática? Si___ No_____ ¿Cuáles?

¿La película te hizo ver una dimensión humana de la matemática? Si___ No___ ¿Cuál?

En la **primera pregunta**, el 100% de los alumnos respondieron afirmativamente. Algunos de los argumentos acerca de qué aspectos les resultaron interesantes, son:

> El hecho de que existan patrones en la naturaleza los cuales se encuentran en todas partes y nos pueden ayudar a entender el universo.
>
> Pues en si toda la película porque te habla que en todo desorden hay un orden y que esto hasta lo puedes emplear en tu vida.

En la **segunda pregunta**, 75% de las respuestas fueron afirmativas. El tipo de reflexiones, fueron:

> Yo pensaba que las matemáticas solo son para el salón de clases y ya, pero la película te abre los ojos y te explica que no¡¡ que las matemáticas están en todos pero en todos lados y que con ellas puedes encontrar la respuesta de varias respuestas tanto de tu vida como de la sociedad.
>
> Se me hizo interesante y curioso ver como solucionaba muchos problemas y ver que era tan fácil resolverlo y bueno también porque pensé que una película de matemáticas iba a ser aburrida y no hasta me gusto.

En la **tercera pregunta**, el 100% de respuestas fueron afirmativas. Algunas son del siguiente tipo:

> Si ya que el chavo se entrega por completo a las matemáticas, incluso hay veces que ni duerme por estar en busca de los patrones como los de π y pues eso me hace pensar que las matemáticas más que simples números son nuestra vida, ya que todo el tiempo estamos pensando en ellas y utilizándolas en nuestra vida diaria.
>
> Si al mostrarnos que todo en nuestro alrededor tiene matemática y una explicación.

DESARROLLO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En la **primera actividad**, que se realiza en parejas, los alumnos deben identificar el patrón geométrico y aritmético de algunos números poligonales, y observar la estrecha relación entre el aspecto aritmético y el geométrico. 10 de 12 parejas de alumnos (83.3%) responden correctamente a la primera pregunta. La siguiente figura ilustra el tipo de respuesta.

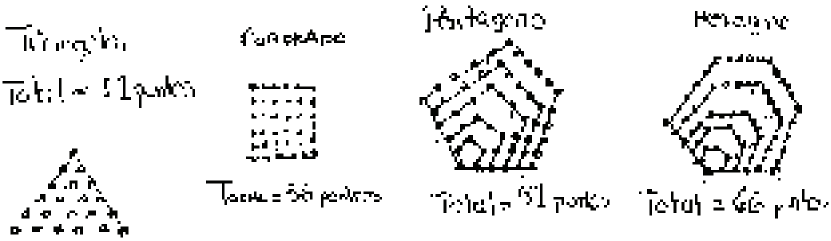

FIGURA 3. RESPUESTA DE ANA Y MARISOL A LA PRIMERA PREGUNTA

De la segunda a la quinta pregunta, se pide a los alumnos que indiquen cómo se forman los números poligonales que se mencionan en la pregunta anterior. 8 de 12 parejas de alumnos responden correctamente (66.6%). La Fig. 4 ilustra el tipo de respuesta a estos ítems.

2: El número triangular anterior más el número de la posición que ocupa. N= 1+2+3+4…

3: El número de la posición que ocupa elevado al cuadrado. Posición= n^2

4: El número pentagonal anterior más el número de la posición por tres y restando dos.

5: Dos veces el cuadrado del número de la posición menos el número de la misma. Posición = $2n^2 - n$

FIGURA 4. RESPUESTA DE ANA Y MARISOL A LAS PREGUNTAS 2, 3, 4, Y, 5

Como se puede observar, de la figura 4, la adecuada identificación de los patrones geométricos y aritméticos, y la relación entre ellos, les lleva a estas alumnas no sólo a establecer reglas generales para generar cualquiera de este tipo de números poligonales, sino, incluso en algunos casos, proporcionan una expresión simbólica de dicha regla. Esta es una capacidad excepcional de estas alumnas, pues los demás alumnos lograron solo reconocer los patrones y expresar las series que dan cuenta de tales números.

En la **segunda actividad**, que se resuelve de manera individual, se pide mostrar que son ciertos dos teoremas relativos a los números figurados, para lo cual se espera que puedan utilizar diagramas de puntos.

En general, se observa que los alumnos se han apropiado de este esquema de representación y logran representar dichos resultados de la aritmética pitagórica, en los que se expresan relaciones entre propiedades de los números. En la pregunta 2, de esta actividad, tienen más dificultades. Las siguientes respuestas a la segunda actividad, ilustran la manera en la cual los alumnos muestran que: 1. Todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos y, 2. La suma de dos números triangulares iguales nos dan un número poligonal cuyo valor en puntos es el producto de los puntos en cada lado.

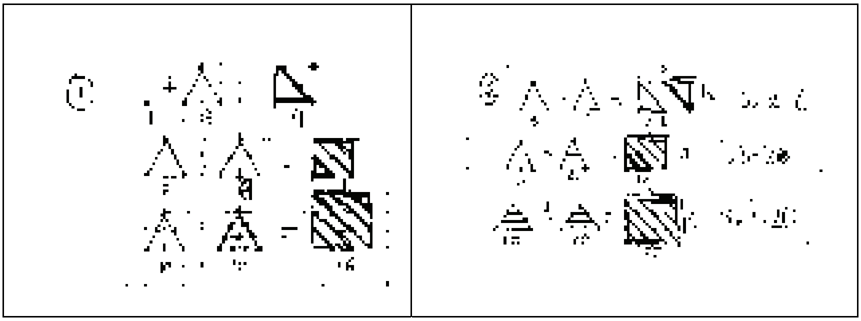

FIGURA 5. RESPUESTA DE ANA A LAS PREGUNTAS DE LA ACTIVIDAD 2

23 de 24 alumnos (95.8%) interpretan correctamente el primer enunciado. El segundo enunciado es representado correctamente por 10 de 24 alumnos (41.6%). Para su representación, en todos los casos, consideran instancias particulares y proceden de manera ordenada e inductiva para insinuar su validez general. Estas respuestas implican, que los alumnos se han apropiado, unos mejor que otros, de algunos instrumentos psicológicos para enfocar su atención en ciertas propiedades de los números y relacionarlas entre sí.

CIERRE DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Doce parejas de alumnos respondieron a la actividad. Ver pag. 5, figura2.

En las repuestas, siete parejas mencionan la medición de los lados y/o de los ángulos o hacen alusión a algún procedimiento de construcción de la figura, que no demuestra porque el triángulo que se forma es equilatero. Sin embargo, hay otras cinco parejas de estudiantes que elaboran justificaciones de carácter deductivo, y no apelan a la necesidad de medir los lados directamente sino que su afirmación se presenta como consecuencia de las propiedades geométricas de la figura. Por ejemplo:

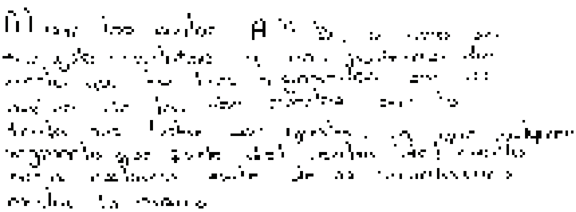

FIGURA 6. RESPUESTA DE ANA Y MARISOL

En este tipo de respuestas, los alumnos se apoyan en la figura para elaborar su razonamiento, pero podemos afirmar que distinguen la figura de la propiedad que representa, pues, enfocan su atención en las propiedades geométricas para elaborar un razonamiento que les permita deducir la conclusión que quieren probar. Este es un resultado significativo pues nos permite observar que mediante este tipo de estrategia es posible introducir a los alumnos al enfoque deductivo de la geometría. Es pertinente agregar que de las 5 parejas que respondieron en este sentido, cuatro de ellas estaban formadas por alumnos que respondieron las dos actividades previas de manera correcta, es decir, estos alumnos manifestaron una mayor interiorización de los instrumentos psicológicos, dados por los esquemas de representación de la aritmética pitagórica.

Conclusiones

Los resultados del experimento de enseñanza que aquí reportamos, nos permiten establecer las siguientes conclusiones, con respecto a los aspectos que nos interesaron observar:

- conocer la actitud de los alumnos ante temas de la historia de las matemáticas, y
- observar si este tratamiento histórico ayuda a los alumnos a introducirlos al carácter deductivo de la geometría.

La estrategia utilizada permitió a los alumnos un acercamiento no usual a las matemáticas. Los estudiantes manifestaron que este enfoque les resultó motivante e interesante. Se dieron cuenta que hubo un desarrollo histórico de las matemáticas, en el cual hay diversas aportaciones de las antiguas culturas de Mesopotamia y Egipto, y que éstas fueron heredadas por los griegos. Así, obtuvieron una idea del carácter multicultural de las matemáticas (Fauvel, 1991).

Se destacó el carácter racional del pensamiento filosófico, y los alumnos conocieron que en esta atmósfera racionalista, las matemáticas cambiaron su enfoque, con relación a la que heredaron de las culturas más antiguas.

Los estudiantes se dieron cuenta que distintos filósofos tuvieron ideas diferentes sobre las matemáticas, y al identificar esto fueron desarrollando gradualmente su comprensión de ellas, a partir de resolver problemas que estaban relacionados con estos diferentes puntos de vista.

Así, la historia de las matemáticas fue utilizada como un medio para el trabajo de los contenidos curriculares y no como un fin en sí mismo (Maz, 1999). En las actividades que se llevaron a cabo, todos los estudiantes mostraron alguna capacidad para distinguir patrones aritméticos y geométricos. Por consiguiente, aún sin una conciencia cabal de su significado, empezaron a trabajar con propiedades y relaciones entre ellas y, a valorar su importancia.

Cada actividad permitió desarrollar aspectos diferentes del proceso histórico, y en su conjunto permitieron introducir a algunos alumnos en el carácter deductivo de la geometría euclidiana.

Finalmente, es importante agregar que sería muy conveniente replicar este experimento de enseñanza, considerando un periodo más prolongado y de esta manera profundizar en los resultados de este estudio.

Referencias

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation; *Educational Studies in Mathematics* 18, 147-176.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics* 11 (2) Montreal. pp. 13-16.

Feuerstein, R. (1990) The theory of structural cognitive modifiability. En B. Presseisen (comp.), *Learning and thinking styles: classroom interaction*, Washington, D. C.: National Education Association, pp. 68-134.

Giddens, A. (1995). *Modernidad e identidad del yo. El yo y la sociedad en la época contemporánea.* Barcelona: Ediciones Peninsula.

González Urbaneja, P. M., (2009). *Pitágoras. El filósofo del número.* Madrid: Nivola libros y ediciones.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Mariotti, M. A., (2001). *Introduction to proof: The mediation of dynamic software environment.* Educational Studies in Mathematics. Special issue 44, 25-53.

Maz, A. (1999). Historia de la matemática en clase: ¿por qué? y ¿para qué? En Mª. I. Berenger, J. Mª Cardeñoso, y M. Toquero (Eds.)(1999). *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad.* Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la matemática

Rico, L. (1998). Conocimiento numérico y formación del profesorado. *Revista de la Universidad de Granada*. Vol. 11. Granada: Universidad de Granada.

Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Nelly y R. A. Lesh (Eds). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona: Paidós.