

# CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA (MKT) DE MATRICES EN BACHILLERATO

Sosa, L., Carrillo, J.

*Universidad de Huelva*

## **Resumen**

En este artículo se presentan los resultados correspondientes al análisis del MKT para enseñar matrices en bachillerato. Intentamos identificar y comprender los dominios del MKT que ponen en juego dos profesoras de dicho nivel al enseñar el tema de matrices. De este estudio exploratorio pudimos obtener más evidencia de un subdominio, el KCT, del cual pudimos clasificar dos categorías: uso de ejemplos y gestión de la participación y dentro de esta última, las subcategorías: preguntas y respuestas.

## **Abstract**

This paper presents the results of an analysis of mathematical knowledge for teaching (MKT) in the Spanish upper secondary (high school). We aim to identify and account for the domains of MKT deployed by two teachers working on the topic of matrices at this level. From this exploratory study we were also able to obtain evidence of a subdomain of knowledge of content and teaching (KCT), two categories of which could be identified: use of examples and management of participation, and within this latter, the subcategories of questions and answers.

**Palabras clave:** MKT, MKT en bachillerato, conocimiento profesional.

**Keywords:** MKT, MKT in upper secondary (high school), professional knowledge.

La formación continua del profesorado de matemáticas de bachillerato, en su mayor parte, se organiza desde los CEPs y las Consejerías de Educación (con diversos formatos) o desde asociaciones del profesorado. Sin embargo, es notoria la ausencia de una institución que tenga la encomienda de reglar la consistencia de la secuenciación y del seguimiento de esa secuencia de los temas ofrecidos para su formación. A la inconsistencia y escasez de propuestas formativas, hemos de añadir la ausencia de un modelo teórico que describa específicamente el MKT<sup>1</sup> en bachillerato.

Este artículo forma parte de una investigación sobre el MKT de dos profesoras, en los contenidos de Álgebra en segundo de bachillerato (alumnos de 17-18 años). Una de ellas imparte matemáticas a la especialidad de Ciencias Sociales y otra, al Científico-Tecnológico, incluyendo varios temas: matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y programación lineal. En este escrito describimos sólo la caracterización del MKT en bachillerato evidenciada por las dos profesoras en el tema de matrices.

### **Un modelo para el MKT**

La discusión de la complejidad del conocimiento profesional es una preocupación constante de los investigadores en Educación Matemática, habiendo ocurrido, como prueba de esa preocupación, un Research Fora en el PME (2009)<sup>2</sup>, titulado *Teacher knowledge and teaching: considering a complex relationship through three different perspectives* en el que se han discutido tres perspectivas: *Mathematics for teaching* (Davis y Simmt, 2006), *Knowledge Quartet* (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) y *Mathematical knowledge for Teaching* (Ball, Thames y Phelps, 2008).

En la propuesta de Davis y su grupo de investigación denominada *Mathematics for teaching* (MfT), ven a los profesores como sistemas y les interesa saber cómo aprenden, estos investigadores distinguen a las matemáticas para la enseñanza como una rama específica dentro de las matemáticas y organizan sus investigaciones en torno a ‘estudio de conceptos’ (concept studies). En la perspectiva de Rowland y colaboradores conocida como *Knowledge Quartet* se aporta un marco teórico desarrollado inductivamente a partir del análisis de clases grabadas de estudiantes para profesor de primaria, proponen cuatro categorías del conocimiento: fundamentos, transformaciones, conexiones y contingencias. Y finalmente, *Mathematical knowledge for Teaching* propuesto por Ball y sus colegas, sus inves-

---

<sup>1</sup> Denotaremos el Conocimiento Matemático para la Enseñanza con MKT por sus siglas en inglés (*Mathematical Knowledge for Teaching*) porque es un término bastante acuñado por Deborah Ball y su grupo de investigación.

<sup>2</sup> En la reunión del grupo de *Psychology of Mathematics Education* (PME) celebrado en Tesalónica, Grecia 2009.

tigaciones se centran en el MKT, en particular en nivel primaria, estudiando dicho conocimiento a partir de la práctica del profesor; ellos proponen un modelo en el que hacen un refinamiento a los dominios del conocimiento del contenido (SMK) y didáctico del contenido (PCK) propuesto por Shulman (1986) adaptado a las matemáticas, incluyen el KCC en el PCK, obteniendo así sólo dos grandes parcelas (como se muestra en la Figura 1): SMK y PCK.

Shulman (1986) propone tres dominios basados principalmente en la idea central de enfocar los estudios al rol del contenido a enseñar: Conocimiento del contenido a enseñar (SMK), referido al conocimiento del contenido y su estructura. Conocimiento didáctico del contenido (PCK) constituido por el conocimiento del contenido que incorpora los aspectos más relacionados a su enseñanza. Y conocimiento curricular (KCC), consiste del conocimiento sobre qué contenidos deben aprender los estudiantes y la orientación que deben tomar esos contenidos en el aprendizaje (incluye los materiales curriculares de los que hace uso el profesor).

En este estudio recurrimos a Ball et al. (2008), porque nuestro objetivo es identificar los subdominios del MKT y en el modelo presentado por Ball et al. se hace una distinción entre diferentes tipos de conocimiento matemático para la enseñanza; porque es un modelo que surge directamente del estudio y análisis de la práctica del profesor y porque en este modelo se le da un enfoque particular al conocimiento especializado del contenido, es decir, al conocimiento matemático (puro) propiamente necesario por los profesores para afrontar sus múltiples tareas en la enseñanza.

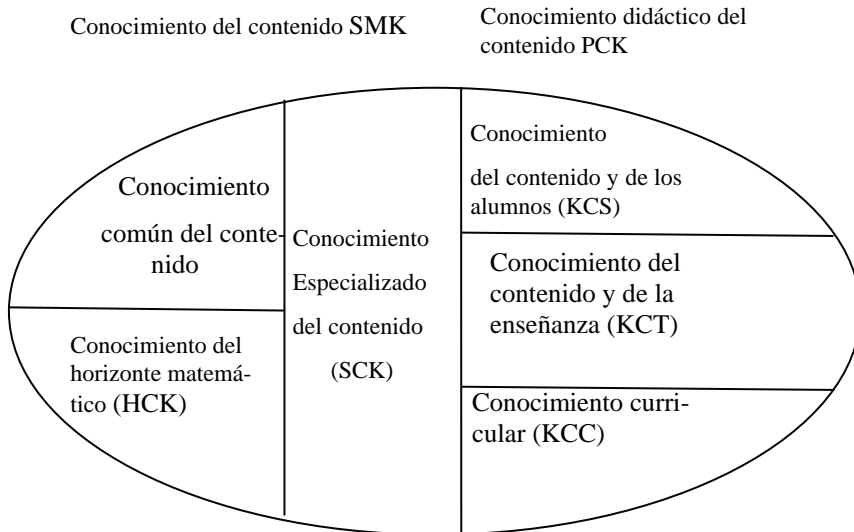


FIGURA 1. DOMINIOS DEL MKT (BALL ET AL., 2007)

De estos subdominios podemos destacar lo siguiente:

El CCK es el conocimiento matemático y habilidades necesarias para resolver las tareas que los alumnos realizan. El SCK es el conocimiento matemático y habilidades que son propias/únicas de la profesión de los profesores, pues incluye su capacidad para distinguir, averiguar, valorar e interpretar la validez de diversas e inesperadas respuestas de los alumnos. Y el HCK se refiere al conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intra y extramatemáticas.

Por su parte, el KCS incluye las habilidades que tienen los profesores para predecir lo que a los alumnos les parecerá fácil, difícil, interesante, aburrido, agobiante o motivador. El KCT se refiere a las habilidades para saber qué representaciones son más adecuadas para enseñar un contenido específico y usar diferentes métodos y procedimientos para enseñar ese contenido matemático.

## **Metodología**

Se expone una investigación enmarcada dentro del paradigma interpretativo (Latorre, et al. 1997), porque intentamos comprender e interpretar el MKT en bachillerato, es decir, estudiamos un aspecto de corte cognitivo. Por tanto, el investigador juega un papel importante en dicha interpretación, característica distintiva de este paradigma (Bogdan & Biklen, 1994).

## **Participantes**

Las participantes en esta investigación son dos profesoras (Emi y Aly), seleccionadas intencionalmente para que dieran información a los objetivos de la investigación, son reconocidas como excelentes profesionales por sus colegas, su institución y sus propios alumnos. Las dos imparten matemáticas en segundo año de bachillerato en España (Emi enseña a estudiantes de Ciencias Sociales (CS) y Aly, a estudiantes de Científico Tecnológico (CT)), son licenciadas en Matemáticas y poseen varios años de experiencia en la enseñanza (Emi, 21; Aly, 13).

## **Colección de datos y análisis**

El equipo de investigación asistió simultáneamente durante tres meses, a las clases de Emi y Aly con los estudiantes de CS y CT respectivamente, de ellas se filmaron 15 de cada una, con una duración aproximada de 50 minutos por clase, la cámara fue enfocada a la profesora y colocada detrás de los estudiantes tratando de alterar la observación lo menos posible. La observación no participante se complementó con notas de campo por parte de la investigadora, cuestionarios y entrevistas (instrumentos utilizados para triangular los resultados). Los datos que

presentamos en este artículo provienen de las transcripciones de 8 de las clases filmadas (cuatro por profesora) correspondientes sólo al contenido de matrices.

Para el análisis de los datos tomamos dos instrumentos, uno para organizar la información de las transcripciones y poder analizarlas (adaptamos un modelo cimentado en las ideas de otros anteriores para modelar la enseñanza<sup>3</sup>) y otro para identificar los subdominios del MKT (Ball et al., 2007), con la alerta permanente de descubrir posibles subdominios nuevos o matizar los existentes.

### **Análisis de las clases observadas**

El análisis de las clases es realizado a partir de tres acercamientos.

En el primer acercamiento, basados en las transcripciones y usando los dos instrumentos mencionados arriba, identificamos los subdominios del MKT en todas las clases, que fueron divididas en episodios y sub-episodios fenomenológicamente coherentes de manera recurrente, regidos por un objetivo. De este primer acercamiento obtuvimos una primera clasificación de descriptores evidenciados para cada uno de los subdominios del MKT.

En el segundo acercamiento se hizo una selección de cuatro clases (2 por profesora) para analizarlas nuevamente con mayor profundidad, atendiendo a los siguientes criterios marcados por la propia naturaleza de esta investigación: 1. Aquellas donde se evidencie un mayor número de subdominios (no necesariamente distintos) del MKT, 2. Aquellas en las que queden representados todos los descriptores de la clasificación obtenida en el primer acercamiento, y 3. Aquellas en las que se activen distintos subdominios del MKT, y no sólo KCT y CCK, que son los dos subdominios de los que se obtuvo más evidencia.

El tercer acercamiento es la fase de construcción de nuevos descriptores y refinamiento de los identificados previamente, así como de la verificación de que la adaptación de la información, evidenciada de la práctica de las dos profesoras, corresponda a esos descriptores en su totalidad (en esta fase se va puliendo simultáneamente el primer y segundo acercamiento al análisis), aspirando a la calidad de estudios cualitativos.

De estos tres acercamientos al análisis de las clases de las dos profesoras al enseñar el contenido de matrices, obtuvimos algunos descriptores del MKT, los cuales concretamos en la siguiente caracterización.

---

<sup>3</sup> El modelo presentado por Schoenfeld (2000), y las adaptaciones efectuadas por Monteiro, et al. (2008) al área de las ciencias y por Ribeiro, et al. (2008) a la matemática en temas de primaria.

## Caracterización del MKT de matrices en bachillerato

### CCK

El CCK, en este caso, consiste principalmente en saber la definición de matrices; saber lo que caracteriza a los distintos tipos de matrices; saber hacer ejemplos (o ejercicios); saber la operatividad, propiedades, utilidad o aplicación de matrices y saber o conocer cuando sus estudiantes tienen una respuesta correcta/incorrecta<sup>4</sup>.

### SCK

De este dominio sólo encontramos un descriptor.

Consideramos el siguiente como descriptor del SCK porque es el profesor, a diferencia de otros profesionales, el que cae y hace caer en la cuenta de ese conocimiento matemático especializado para la enseñanza, es decir, de que no se pueden multiplicar tres matrices al mismo tiempo.

Saber que la multiplicación de matrices es una operación binaria, y que por tanto en el caso en que haya que multiplicar tres matrices, se debe colocar paréntesis o simplemente tomar en cuenta que hay que efectuar el producto de dos matrices primero, es decir, saber que no hay forma de multiplicar tres matrices simultáneamente.

### (Emi clase 4, líneas 409-415)

409	Emi:	La propiedad asociativa A por B por C [(AB)C],
410		si tengo que multiplicar tres matrices ¿cómo lo hago?
411		Tres matrices no se pueden multiplicar, es decir,
412		si me dicen A.B.C no hay forma.
413	Es <sup>5</sup> :	Multiplicamos A por B y luego por C.
414	Emi:	Bueno, ¿pero cuáles vamos a tomar primero?
415		Primero B y C o primero A por B.

<sup>4</sup> En este dominio y en los posteriores, por cuestiones de espacio no podemos mostrar la evidencia de cada uno de los aspectos que hemos descrito anteriormente, sólo escribiremos una o dos unidades de información.

<sup>5</sup> Es es el seudónimo de los estudiantes en conjunto.

## HCK

Otro de los subdominios de los que no se obtuvo mucha evidencia fue el HCK; a continuación mostramos el descriptor que encontramos:

Saber que las propiedades de las matrices constituyen la estructura de espacio vectorial (aunque no aborde el tema de estructura de espacio vectorial porque el programa para CS no lo incluye).

Emi les comenta que las propiedades de las matrices están relacionadas con otro tema más general, estructuras algebraicas (espacio vectorial), que en este bachillerato [de CS] no estudian estructuras [algebraicas] pero en el CT sí.

### (Emi clase 4; líneas 170-172, 182-185)

170	Emi:	si nosotros estudiáramos estructuras algebraicas,
171		estas propiedades son muy importantes
172		porque junto con las de la suma,

...

182		en matemáticas de ciencias [bachillerato científico tecnológico] sí,
183		se habla de estructuras de espacio vectorial,
184		de todas formas cuando hagamos ejercicios si vamos a aplicar
185		estas propiedades [de matrices] que por eso os estoy dando,

## KCS

Los descriptores correspondientes a este dominio responden a aspectos previsoros de las profesoras para enseñar matrices a estos estudiantes: Prever las dificultades y necesidades que puede tener un estudiante, la confusión que pudiera tener el estudiante con algo que se esté viendo en clase o posteriormente en las clases siguientes, una posible situación concreta susceptible de error para los estudiantes en ejercicios posteriores o que los estudiantes pueden suponer una idea errónea sobre alguna propiedad de matrices. Además de saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido al presentarles matrices.

Ejemplo referente a prever una posible situación susceptible de error para los estudiantes.

La situación es mostrada por Aly como medida preventiva en situación de riesgo de error de los estudiantes, ella se adelanta a una situación que podrían tener los estudiantes en ejercicios posteriores y con el objetivo de que tengan idea de lo que deben hacer ante una situación similar a la que les plantea, Aly les comenta el caso

en el que al diagonalizar una matriz, en la diagonal principal obtuvieran 1, 3, 1 en lugar de 1, 1, 1 y que en ese caso sólo habría que multiplicar por  $1/3$  toda la fila en la que se encuentra el 3.

**(Aly clase 4, líneas 520-533)**

520	Aly:	Pero vamos a ver, que sucedería si ya hubiéramos obtenido los ceros
521		y en la diagonal en lugar de tener 1, 1, 1, tuviéramos 1, 3, 1
522		¿qué hacemos para quitar de aquí ese 3?
523		¿qué se os ocurriría?, ¿nada?,
524		si yo quiero conseguir un 1 y tengo un 3
525		¿qué hago para quitar de ahí eso? ¿qué haría?
526	E11 <sup>6</sup> :	Dividir entre 3.
527	Aly:	Dividir toda la fila [en la que se encuentra el 3] entre tres
528		o multiplicar por un tercio que es lo mismo,
529		bueno ya digo que este no es el caso pero cuando pase eso
530		pues ya sabéis lo que hay que hacer,
531		dividir toda la fila entera por un número
532		o multiplicar toda la fila entera por un número,
533		eso está perfectamente definido, vale.

**KCT**

En este dominio, de acuerdo a los descriptores evidenciados, podemos establecer dos categorías:

***Uso de ejemplos***

En esta categoría podemos distinguir la capacidad para decidir con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea matemática (eg las propiedades de las matrices); para considerar la aplicación del concepto en un ejemplo para ir induciendo luego la definición del concepto (eg Emi considera la aplicación de matrices en el ejemplo de criptografía

---

<sup>6</sup> E11 es seudónimo del estudiante etiquetado con el número 11.



para ir induciendo luego la definición de matriz, E1, p2A) o para aprovechar el ejemplo para hacerles notar, explícitamente al desarrollar el ejemplo los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñar ese día en clase. También obtuvimos evidencia de la capacidad para improvisar la construcción y presentación de un ejemplo para enfatizar cierta idea matemática, de tipo contextualizado (en su entorno, en el que los protagonistas son los propios estudiantes y se pretende que vean que las matrices se utilizan en estudios sociológicos para ver la opinión que tienen esas personas de sí mismas dentro de un grupo) o no contextualizado (un ejemplo parecido al que pudiera aparecer en el libro de texto tradicionalmente).

Ejemplo referente a aprovechar el ejemplo para hacerles notar aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñar ese día en clase.

Emi les da los elementos de esta matriz y les hace notar en el ejemplo de la matriz de  $4 \times 5$ :

El número de filas y columnas que tiene esa matriz.

Que los elementos de la matriz pueden ser enteros y fraccionarios.

Cómo localizar un elemento sabiendo los subíndices, es decir, hacerles ver que para localizar un elemento sólo hay que contar la fila y la columna para conocer su posición.

(Emi clase 1, líneas 370-387)

**Gestión de la participación.** En esta categoría podemos destacar dos sub-categorías:

**Preguntas.** Aquí podemos distinguir la capacidad para introducir una nueva pregunta para hacerles ver que es equivocada la respuesta de un estudiante y orientar la pregunta a la respuesta que la profesora quiere escuchar; para ir haciendo preguntas a los estudiantes sobre cierta idea, no necesariamente a cierto estudiante (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes), hasta llegar a escuchar lo que la profesora desea; y para formular una nueva pregunta para introducir un nuevo concepto.

Ejemplo referente a introducir una nueva pregunta para hacerles ver que es equivocada la respuesta de un estudiante y orientar la pregunta a la respuesta que quiere escuchar.

En este caso, Emi habla de una matriz de dimensión  $m \times n$  y pregunta qué tipo de números serán  $m$  y  $n$ . E3 contesta que son enteros y entonces Emi les hace notar que eso no tiene sentido, hasta escuchar que  $m$  y  $n$  son naturales.

**(Emi clase 1, líneas 258-264)**

258	Emi:	¿m y n qué serán?
259		¿Qué tipos de números?
260	E3 <sup>7</sup> :	Enteros.
261	Emi:	¿Enteros?
262		¿Tendría sentido que m y n fueran números negativos o decimales?
263	E8:	Naturales.
264	Emi:	Naturales, muy bien m y n van a ser siempre números naturales

**Respuestas.** Aquí podemos destacar que se observa la capacidad para decidir qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles ignorar y cuáles destacar para usarlas luego; para orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar por convención matemática; y para aprovechar una respuesta incorrecta para hacer ver las consecuencias en el contenido.

Ejemplo referente a orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. En este caso E3 da una respuesta correcta respecto a la ubicación del elemento de la matriz con subíndices 2 y 3, E3 responde que ese elemento estaría en la tercera columna, segunda fila, pero Emi orienta esa respuesta para que se vayan acostumbrando a decir primero el número de filas y luego el número de columna, en concordancia con esa convención matemática.

**(Emi clase 1, líneas 330-335)**

330	Emi:	Entonces por ejemplo el elemento a dos tres, el que tiene los subíndices
331		2 y 3, ¿dónde está situado?
332	E3:	En la tercera columna segunda fila.
333	Emi:	Vamos a ver, aunque da lo mismo decir primero el número de columnas
334		y luego el número de filas, nos vamos a acostumbrar a dar primero el
335		número de filas y luego el número de columnas.

<sup>7</sup> E3 y E8 son seudónimos de los estudiantes etiquetados con el número 3 y 8 respectivamente.

## KCC

Su conocimiento curricular está orientado a saber qué contenidos deben aprender los estudiantes y la orientación que deben tomar esos contenidos en el aprendizaje y sus principales fuentes son: Programación, libro de texto y temario para examen de admisión en la universidad.

## Conclusiones

Consideramos que una de las principales aportaciones del trabajo es obtener un primer acercamiento al estudio del conocimiento matemático para la enseñanza en el gremio de profesores de bachillerato, en este caso presentamos los principales descriptores que permiten hacer una primera caracterización del MKT en matrices y que en este estudio exploratorio pudimos obtener más evidencia del KCT, del cual pudimos clasificar categorías y subcategorías, lo que puede resultar lógico si consideramos que lo que analizamos es la enseñanza del profesor directamente desde su práctica.

Coincidimos con Rowland et al. (2009, p.72) en que los ejemplos son usados todo el tiempo en la enseñanza de las matemáticas y para algunas razones diferentes. En nuestro estudio pudimos observar que las profesoras hacen uso de los ejemplos para distintas razones, tanto para presentar después del ejemplo la definición del concepto, como para aprovechar el ejemplo para hacer hincapié en los aspectos más relevantes del contenido, además de ponerse en evidencia su capacidad para improvisar la construcción de ejemplos debida a su experiencia al impartir el tema de matrices.

En cuanto a la gestión de la participación, se destaca la evidencia de que las profesoras ya tienen bien estructurado en su mente lo que desean enseñar en la clase, de tal forma que tratan de ir haciendo preguntas orientadas a lo que desean impartir (algunas veces se contestan ellas mismas), de tal forma que cuando los estudiantes responden, ellas orientan esas respuestas nuevamente a la estructura prevista por ellas.

Los seis subdominios del MKT son claves para enseñar matemáticas, pero de acuerdo con Ball et al. (2007, p34) el SCK es uno de los subdominios que podría ser más interesante para el investigador. Plantearse el SCK es a nuestro juicio, una de las grandes aportaciones del modelo teórico de Ball y sus colegas, por la propia definición de éste.

Para finalizar, cabe mencionar que los descriptores que nos permitieron caracterizar el MKT de matrices en bachillerato aún están en refinamiento y construcción-reconstrucción porque nos interesa sustentar los subdominios del modelo que pretendemos construir para el MKT en bachillerato.

## Agradecimientos

Al apoyo otorgado por el proyecto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), Dirección General de Investigación y Gestión del Plan Nacional de I+D+i. Ministerio de Ciencia e Innovación.

Al apoyo otorgado por las becas ALBAN (Programa de Becas de Alto Nivel de la Unión Europea para América Latina. E07D402718MX) y CONACYT (Becas del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México. 192161).

## Referencias

- Ball, D., L., Thames M. H. & Phelps G. (2007). *Content knowledge for teaching: What makes it special?* Paper submitted to the Journal of teacher Education.
- Ball, D., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto editora.
- Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 293-319.
- Latorre, A., Del Rincón, D., Arnal, J. (1997). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Hurtado ediciones.
- Monteiro, R., Carrillo, J. & Aguaded, S. (2008). Emergent theorizations in modelling the teaching of two science teachers. *Research in Science Education*, 38(3), 301-319.
- Ribeiro, C. M., Carrillo, J., Monteiro R. (2008). Uma perspectiva cognitiva para a análise de uma aula de matemática no 1º ciclo: Um exemplo de apresentação de conteúdo tendo como recurso o desenho no quadro. L.J. Blanco et al. *del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática Investigación en educación matemática XII* pp. 545-555), Badajoz.
- Rowland, T., Turner F., Thwaites, A. & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. SAGE publications, London, UK.
- Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 255-281.
- Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behaviour*, 18(3), 243 - 261.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.