



## Resultados de la implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de razones trigonométricas en territorios indígenas

Lic. Mauricio Rodríguez Sánchez  
Ministerio de Educación Pública  
[mauriciorods@gmail.com](mailto:mauriciorods@gmail.com)

Lic. Eithel Trigueros Rodríguez  
Universidad Nacional de Costa Rica  
[eitheltr@gmail.com](mailto:eitheltr@gmail.com)

**Resumen:** Se presentan los resultados finales de un trabajo final de graduación para la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la UNED, cuyo objetivo principal es desarrollar habilidades para el aprendizaje de razones trigonométricas en noveno año, por medio de una unidad didáctica apoyada en el software Geogebra y el modelo de Van Hiele. Esto en el Liceo Rural Gavilán, Valle la Estrella, Limón, durante el tercer trimestre del 2016, con una población en su mayoría indígena.

**Palabras clave:** Etnomatemática, material didáctico, educación intercultural.

### Introducción

Este trabajo responde a la continuación del producto *Implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de razones trigonométricas, apoyada en el software GeoGebra y el modelo de Van Hiele* (Rodríguez, Trigueros, 2016), y representa la divulgación del trabajo final de graduación *Estrategia didáctica apoyada en GeoGebra y el modelo de Van Hiele para la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas* (Rodríguez, 2017).

En el reporte de la implementación se explicó el escenario de la investigación, el modelo de Van Hiele, se indagó sobre investigaciones similares y abordó el desarrolló la unidad didáctica que se aplicaría en el Liceo Rural Gavilán. Para el momento en que se realizó dicho trabajo, no se contaba con la versión final de la unidad, por lo que en este documento se abordará ese aspecto.

Para tener un mejor contexto de la investigación y producto realizado es importante mencionarse que el Liceo Rural Gavilán Vesta pertenece al circuito 05 de la Regional Educativa de Sulà del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), aunque no se encuentra dentro del territorio indígena. Sin embargo recibe un importante número de estudiantes indígenas que deben enfrentarse grandes distancias para asistir a clases, falta de transporte público, inclemencias climatológicas, entre otros factores geográficos y sociales que les dificulta el progreso educativo de la población.

Parte de los medios con los que se contaba eran los recursos tecnológicos aportados por el proyecto REMA, el cual asignó en noviembre del 2014, 124 computadoras para 124 estudiantes del Liceo Rural Gavilán. El objetivo general del Proyecto REMA es “favorecer el desarrollo integral de los estudiantes y de los liceos rurales para funcionar como impulsores del mejoramiento de la calidad de vida de sus



comunidades” (Fundación Omar Dengo, 2013, p. 1). Así mismo, cada computadora tiene instalado el programa GeoGebra, el cuál es de licencia libre.

Además se retoman los objetivos de la investigación los cuales eran:

- Diagnosticar el nivel de razonamiento de los estudiantes de noveno año, según el modelo de Van Hiele.
- Elaborar una unidad didáctica apoyada en el software Geogebra para el desarrollo de las habilidades específicas de las razones trigonométricas del programa de estudio del MEP, según el modelo de Van Hiele.
- Validar la unidad didáctica apoyada en el software Geogebra y el modelo de Van Hiele para el desarrollo de las habilidades específicas de las razones trigonométricas del programa de estudio del MEP.
- Implementar la unidad didáctica apoyada en el software Geogebra y el modelo de Van Hiele.
- Describir los niveles de razonamiento que muestran los cuatro estudiantes con la unidad didáctica apoyada en Geogebra según el modelo de Van Hiele.
- Mejorar la unidad didáctica apoyada en software Geogebra y el modelo de Van Hile para el desarrollo de las habilidades específicas de las de las razones trigonométricas del programa de estudio del MEP.

### **Metodología utilizada en la investigación**

Debido a que el estudio realizado pretendía profundizar en las ideas de un individuo sobre un fenómeno en particular, se recomienda el enfoque cualitativo (Hernández, Fernández, y Baptista, 2014, p. 358).

En relación al diseño de investigación, este corresponde a una investigación acción, ya que es una forma idónea para abordar estudios en educación, a nivel del aula, donde se busca mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. En concordancia con Kemmis (1984, citado por Latorre, 2005, p. 24) que define la investigación acción como: “una forma de indagación autoreflexiva realizada por quienes participan en las situaciones sociales para mejorar las prácticas educativas; su comprensión sobre las mismas; y las instituciones en que estas prácticas se realizan (aulas o escuelas, por ejemplo).”

Esta investigación al ser de enfoque cualitativo no define hipótesis, ni variables, lo que se establece son categorías de análisis (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

La unidad de análisis de esta investigación corresponde a los estudiantes de noveno año que participaron en la aplicación de la estrategia didáctica, los cuales estaban matriculados en noveno año en el Liceo Rural Gavilán, durante el 2016. Por otra parte, la categoría de análisis de esta investigación corresponde a los niveles nivel de razonamiento, que se define como el nivel de razonamiento logrado por los estudiantes, y corresponde al parámetro que contribuye a secuenciar los contenidos según el Modelo de Van Hiele. Además, las subcategorías o casos iniciales hacen referencia a los procesos matemáticos que involucra el modelo de Van Hiele. En particular se explican los resultados obtenidos respecto a los 3 primeros niveles del modelo de Van Hiele.

Con respecto a la población esta corresponde al grupo de noveno año del Liceo Rural Gavilán durante el curso lectivo del 2016, la cual tuvo una matrícula de 28 estudiantes en la asignatura de matemáticas, con edades entre 14 y 18 años. Esta población estudiantil habita las comunidades de Vesta, Gavilán, Progreso y Llano Grande. Además, forma parte del proyecto REMA.

El tipo de muestra es voluntaria, por lo tanto, la muestra es no probabilística y no será necesariamente una representación estadística de la población. Inicialmente el proyecto pretendía abarcar a todo el



grupo de la sección 9-1. Sin embargo, lamentablemente los recursos iniciales habían sufrido un deterioro prematuro, lo que hizo necesario que se modificara el alcance de la investigación. Así que, se decidió consultar a aquellas personas que tuvieran la computadora en buen estado, y si querían participar de la investigación. En total 9 estudiantes accedieron a participar en la investigación.

Para realizar la recolección de los datos se utilizaron los siguientes medios:

- 1) **Prueba diagnóstica:** Esta prueba indagó los conocimientos previos necesarios para abordar las actividades de la estrategia didáctica. Según los resultados de esta prueba se desarrollaron centros de estudio, antes de la aplicación de la estrategia didáctica, para profundizar, recuperar y repasar los conocimientos previos abordados en séptimo y octavo año en el plan de estudio del MEP.
- 2) **Observaciones de expertos:** Para el proceso de validación de la estrategia didáctica y la prueba diagnóstica, se utilizó el criterio de los siguientes expertos: el director de tesis Lic. Eithel Trigueros, los lectores M.sc Alexander Borbón Alpizar y M.sc Marco Vinicio Gutiérrez Montenegro, colaboradores externos, M.sc Randall Blanco quien cuenta con 21 años de experiencia docente, el Lic. Adolfo Alejandro Monge Zamora con 15 de experiencia docente y Lic. José Miguel Flores Villegas con 5 años de experiencia. En cuanto a las observaciones y comentarios de los expertos, estas se encuentran en el anexo B de esta investigación.
- 3) **Folletos de los estudiantes:** Este folleto se observa en el Anexo C, el cuál fue brindado a los estudiantes, con la finalidad de que el participante anotará las respuestas a las actividades planteadas, y de esta forma recolectar información que permita identificar el nivel de razonamiento del alumno.
- 4) **Construcciones geométricas en GeoGebra del estudiante:** La estrategia didáctica plantea algunas actividades donde se incluyen construcciones geométricas utilizando GeoGebra, esto permitirá observar los niveles de razonamiento de los alumnos en sus construcciones. Para este análisis se apoyará en la opción de protocolos de construcción y las construcciones de cada estudiante en GeoGebra.
- 5) **Grabaciones de audio:** Se buscó un espacio para que el grupo de alumnos participantes opinen sobre su experiencia con la estrategia didáctica y comunique al investigador debilidades y fortalezas sobre la implementación de la estrategia didáctica.
- 6) **Bitácora de campo del investigador:** El investigador llevó un cuaderno donde consignó sus anotaciones descriptivas o interpretativas de los eventos que se presentaron durante las sesiones.
- 7) **Bitácora de análisis del investigador:** Con esta herramienta el investigador realizó anotaciones sobre el método utilizado (ajustes en la codificación, problemas encontrados y soluciones ejecutadas), ideas, conceptos, significados, categorías e hipótesis que surjan del estudio. Anotaciones relacionadas con la credibilidad y verificación del estudio (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p. 447).



## Análisis de los resultados obtenidos

### Prueba diagnóstica.

El primer paso de la investigación fue la elaboración y aplicación de una prueba diagnóstica. Esta constó de 7 preguntas y formó parte de la estrategia didáctica para estudiantes y profesores. Para abordar los conocimientos previos se consideraron las habilidades específicas de los niveles de 7º, 8º y 9º, los cuales se muestran en la siguiente tabla.

**Tabla.1:** Distribución de problemas de la prueba diagnóstica según nivel académico.

Nivel	Conocimientos	Habilidades específicas
7º	Triángulos: Desigualdad triangular Ángulos internos Ángulos externos.	Pregunta 1: Aplicar la desigualdad triangular. Pregunta 1: Aplicar la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo. Pregunta 2: Determinar medidas de ángulos internos y externos de un triángulo, conociendo las medidas de otros ángulos.
8º	Triángulos: Semejanza Congruencias	Pregunta 3 y Pregunta 5: Aplicar los criterios de semejanza: LLL, ALA y AAA para determinar y probar semejanza de triángulos. Pregunta 4: Aplicar criterios de congruencia: LLL, LAL y ALA para determinar y probar la congruencia de triángulos. Pregunta 6: Resolver problemas que involucren la semejanza y congruencia de triángulos.
9º	Teorema de Pitágoras.	Pregunta 7: Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas en diferentes contextos.

**Fuente.** Elaboración propia.

La prueba diagnóstica fue revisada por expertos y sufrió ciertos cambios antes de la aplicación, pero fueron cambios en su mayoría de forma y no de fondo.

En general, las situaciones problemas, el diseño y presentación de la unidad, así como los archivos en geogebra pasaron por varias etapas hasta la versión final. Incluso, es claro que dicha versión que se presenta en este documento puede sufrir modificaciones para mejorar.

La prueba diagnóstica mostró que las 9 personas participantes tenían falencias en los conocimientos previos, debido a que la mayoría no respondió las preguntas, dejando las 7 preguntas de la prueba diagnóstica en blanco.

Entre las razones del por qué los estudiantes dejaron la prueba en blanco, se encuentran: a) que recordaban muy poco de los contenidos relacionados con el tema, b) están acostumbrados a prepararse para las pruebas, es decir, los hábitos de estudio están en función de aprobar una evaluación y no en aprender, y c) los estudiantes afirmaron que los temas relacionados a congruencia de triángulos no lo habían estudiado en octavo año. Este último aspecto podría deberse al estado del clima en el segundo semestre del 2015, pues hubo muchas precipitaciones lo que obligó a la suspensión de clases, provocando que los estudiantes no tuvieran el tiempo necesario para estudiar dichos temas en Octavo año.



Sin embargo, estas son algunas de las respuestas obtenidas:

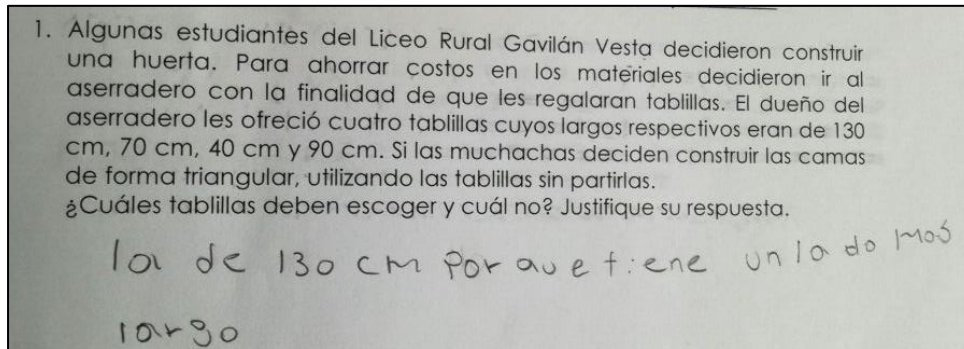


Figura 1: Respuesta de un estudiante a la pregunta diagnóstica 1

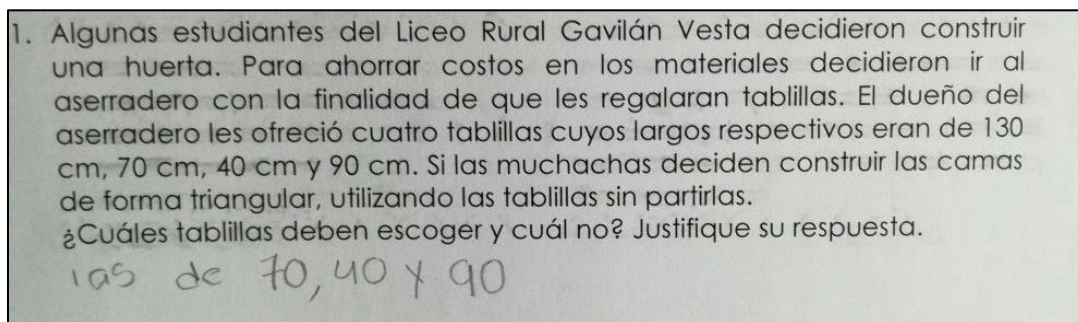


Figura 2: Respuesta de una estudiante a la pregunta diagnóstica 1

En la figura 1, la respuesta dada por el estudiante, omite la idea de formar un triángulo y considera solamente una tablilla. Por otro lado, la respuesta dada en la figura 2 es correcta, aunque la estudiante no justifica por qué hizo esa elección.

Estos resultados en la prueba de diagnóstico indican que los y las estudiantes podrían no estar preparados para los contenidos de noveno año, lo que hace necesario que se generen mecanismos de nivelación para las próximas lecciones. Además abre un tema de discusión que es sensible, la preparación que están teniendo nuestros estudiantes en la actualidad, pues las preguntas del diagnóstico eran en su mayoría de aplicación y no de memoria.

La estrategia didáctica se aplicó en cuatro sesiones de 4 horas cada una. Para la sesión 1, 2 y 3 participaron nueve estudiantes y para la sesión 4, participaron cinco. Además, durante las sesiones se contó con los siguientes recursos: la computadora portátil del docente, un proyector y nueve computadoras de la Fundación Omar Dengo.

En relación a los resultados de la prueba diagnóstica, como medida ante las falencias de los estudiantes, se desarrolla la actividad 1 de la estrategia didáctica, que corresponde a la 1ª fase del modelo de Van Hiele, la cual recibe el nombre de información. A través de esta fase se pretende explorar los conocimientos previos del estudiante, tanto escolares como no escolares, mostrar los recursos a utilizar, en el caso de esta investigación el programa GeoGebra, introducir los nuevos temas a estudiar y permitir al estudiante la adquisición de algunos conocimientos necesarios para dar inicio al estudio matemático (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 333).



## Sesión 1

La actividad inició con una introducción a GeoGebra apoyada en el “MANUAL PARA GEOGEBRA Guías para geometría dinámica, animaciones y deslizadores” elaborado por Alexander Borbón, dando énfasis a la introducción del manual donde se especifican algunas de las herramientas de GeoGebra, y la actividad Triángulo Equilátero (Borbón, 2010, p. 4). En relación a la construcción del triángulo equilátero se abordaron conceptos básicos como: punto, segmento, recta, distancia entre dos puntos, ángulos, triángulo, círculo, intersección.

Por otro lado, al introducir el uso de GeoGebra en ese momento, se cumplió con la idea propuesta por Gamboa (2007) sobre enseñar los conceptos básicos de la tecnología que se va a implementar, de esta forma, se dio a conocer GeoGebra al grupo, sus herramientas y la ubicación de las mismas, permitiéndoles manipular un poco el programa, antes de continuar con otras actividades de la estrategia didáctica.

Para esta sesión se pidió a sus estudiantes que realizaran la lectura de las herramientas en voz alta. Luego el docente, les realizó preguntas como ¿dónde se encontraba la herramienta seleccionar y mover?, ¿y la herramienta punto?, entre otras. Esto con el fin de motivar una lectura activa del documento. Esto además fue importante para que el estudiante o la estudiante reconociera donde localizar las herramientas.

Luego se inició la construcción del triángulo equilátero, siguiendo el paso a paso que propone Borbón (2010, p. 4). La figura 3 representa una construcción realizada por un estudiante.

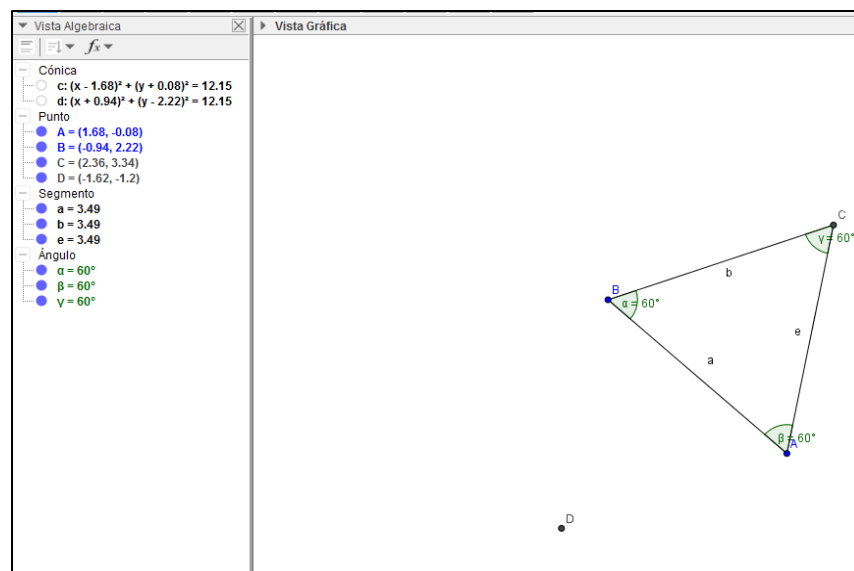


Figura 3: Construcción del triángulo equilátero realizada por uno de los estudiantes.

Algunas de las observaciones de esta etapa:

- Los estudiantes no leían las instrucciones. En especial con una estudiante, a la cual debió indicársele que herramienta utilizar en cada momento. Ante esta situación, el docente prefirió indicar siempre la ubicación de las herramientas en caso de que algún participante preguntase, para no distraerles de los temas de estudio.



- Respecto a las medidas del segmento, la mayoría de quienes participaban no relacionaban la letra “a” con la medida del segmento  $\overline{AB}$ , para ellos eran dos elementos sin relación, en otras palabras, no relacionaban la ventana algebraica y la ventana vista gráfica de GeoGebra. Para solventar esto se ideó utilizar la herramienta distancia, de esta forma se comprendió mejor que del punto A al punto B existía una determinada medida, como se muestra en la figura.

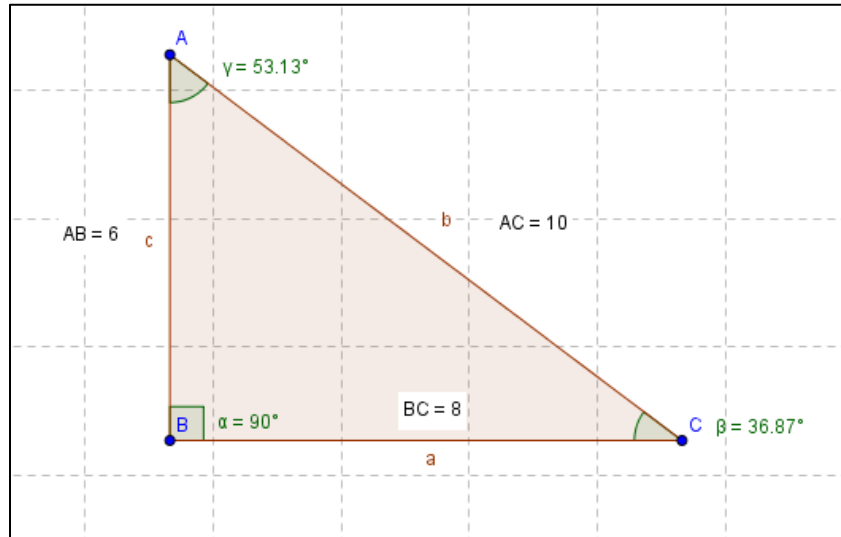


Figura 4: Uso de la Herramienta Distancia

## Sesión 2

Para la sesión 2, se abordó la actividad 1 de la estrategia didáctica, la cual correspondía a la fase de introducción, que tiene como objetivo introducir los objetos que serán estudiados y los recursos didácticos a utilizar.

Antes de dar inicio a la sesión, se modificaron las sugerencias para la actividad 1, las cuales inicialmente planteaban utilizar regla, transportador, lápiz y medidas a escala, en su lugar, se recomendó a los estudiantes utilizar directamente GeoGebra, para solucionar los problemas planteados.

Entre las sugerencias para utilizar GeoGebra se les recomendó primero visualizar en la vista gráfica del programa la cuadrícula y ocultar los ejes. Por ejemplo, para la actividad 1.1 (figura 4.5).



1.1. En una de las parcelas de Vesta, se quiere construir una rampa para descargar el ganado a los corrales, la cual debe tener un metro de altura y un ángulo  $30^\circ$  con la horizontal, como se muestra en la Figura 1.

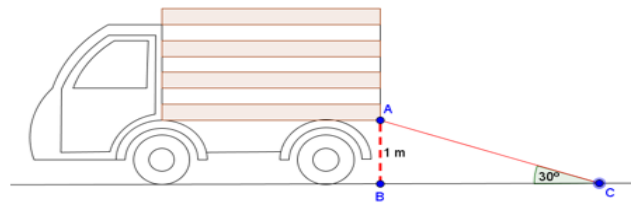


FIGURA 1: RAMPA DE DESCARGA

Figura 5: Actividad 1.1.

Un estudiante realizó la construcción de la figura 4.6, para contestar las preguntas ¿a qué distancia horizontal debe comenzar la rampa?, y ¿qué distancia tiene la rampa?

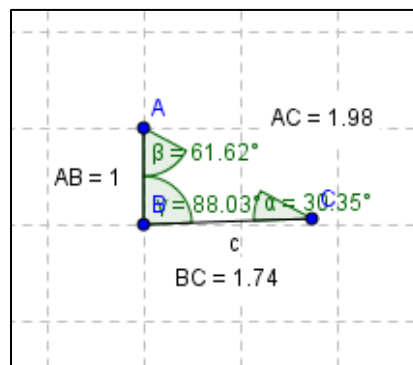


Figura 6: Solución actividad 1.1, construida por un estudiante.

A raíz de las soluciones realizadas por los estudiantes participantes, se sugiere que la estrategia didáctica incluya guías de construcción en GeoGebra que involucren ángulos de  $90^\circ$ , para que el estudiante pueda asociar las razones trigonométricas con el triángulo rectángulo. Algunas ideas para la construcción de un triángulo rectángulo podrían ser: utilizar el concepto de rectas perpendiculares, utilizar un ángulo inscrito en un círculo que contenga el diámetro, utilizar el teorema de la recta tangente a una circunferencia, el teorema del radio y una cuerda de una circunferencia, utilizar la herramienta ángulo dada su medida de GeoGebra, utilizar la cuadrícula y puntos para construir un triángulo recto.

### Sesión 3

Durante la tercera sesión se continuó trabajando con la actividad 1, obteniendo observaciones similares a la sesión 2.

Además, al final de la sesión se realizó un grupo de enfoque, con el objetivo de comentar la experiencia al interactuar con la estrategia didáctica. Para recolectar la información de esta actividad, se grabó un





audio, del cual se puede concluir que la estrategia didáctica incentivó actitudes positivas hacia la matemática, como se muestra en los siguientes comentarios de quienes participaron:

- *“Aprendí a trabajar con GeoGebra y me podría servir para el próximo año.”*
- *“Yo aprendí a sacar hipotenusa y cateto de un triángulo rectangular.”*
- *“Me gustó mucho porque aprendí cosas que no sabía nada.”*
- *“Sacar distancias... longitudes.”*
- *“Usar las herramientas de GeoGebra.”*
- *“Bien”*
- *“El librito está excelente... hermoso.”*
- *“Al principio se vio como que era un toque difícil, pero cuando ya uno lleva varios días, practica más y lo hace súper rápido.”*
- *“Me costó aprender las herramientas.”*
- *“Es la primera vez que yo entiendo matemáticas con usted profesor.”*
- *Me gustó lo que aprendí, algo que no había visto... como que hay diferentes tipos de triángulos... equiláteros, rectángulos”*

#### Sesión 4

Para esta sesión, participaron cinco estudiantes, los cuales contaban con la autorización de las madres, padres o encargados para poder realizar la grabación de vídeo. Por otra parte, los demás estudiantes no participaron por los siguientes motivos: no tenían autorización para la grabación de vídeo, querían ir a jugar voleibol, o no tenían interés en continuar en el proyecto. Además, durante la sesión hubo mucho ruido externo, provocado por los estudiantes que estuvieron jugando tenis de mesa, también existieron varias interrupciones por parte del docente, ya que abandonaba el aula por labores administrativas o atendía a personal de la institución.

En esta sesión se abordó la actividad 2 de la estrategia didáctica, la cual corresponde a la 2º fase del modelo de Van Hiele, orientación dirigida. Esta fase busca delimitar los elementos principales que el estudiante debe estudiar, y construir las relaciones para el nuevo nivel, además cabe destacar que durante esta fase el estudiante no tendrá un aprendizaje óptimo en términos de resultados obtenidos y tiempo empleado (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 334).

Durante la aplicación se identificaron los siguientes obstáculos en los estudiantes: dificultad para expresar sus ideas, débil comprensión de lectura, falta de vocabulario. Por ejemplo, no sabían que significaba variar, les costaba identificar si los valores de los ángulos o las razones se incrementaban o decrecían, esto perjudicó el avance en las actividades, debido a que se dio a los estudiantes el tiempo necesario para que pudieran expresar sus ideas a través del diálogo con el docente y luego por escrito en el folleto facilitado a los estudiantes.

Para ejemplificar esta sesión, en la figura 4.7 se expone la actividad 2.2, con la solución de uno de los estudiantes, donde se puede observar que se utilizan los lados, ángulos y las razones entre los lados de un triángulo rectángulo, también se incentiva al estudiante el análisis de los valores obtenidos.



**Conjetura:** Juicio u opinión formada a partir de indicios o datos incompletos o supuestos.

2.2. Continuando con el archivo ACT-2.ggb. Mueve el punto B. Describe lo que ocurre con las razones cuando el ángulo  $\angle A$  varía de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . Escriba una conjetura. Justifique por qué cree que es verdadera su respuesta.

Razón	Medidas para $\angle BAC$		
	$10^\circ$	$45^\circ$	$70^\circ$
$\frac{AC}{AB}$	81.74	58.58	28.33
$\frac{BC}{AB}$	14.41	58.8	78.01
$\frac{BC}{AC}$	14.41	58.8	78.01

Handwritten calculations and notes:

$10^\circ$ : 0.9848...  
 $45^\circ$ : 0.7057...  
 $70^\circ$ : 0.3413...

$0.1736...$   
 $0.7084...$   
 $0.9398...$

$0.1762...$   
 $1$   
 $2.7536$

R/ es verdadera la Respuesta  
\* la razón  $\frac{AC}{AB}$  van disminuyendo cuando el ángulo de menor a mayor se mueve  
\* la razón para  $\frac{BC}{AB}$  van aumentando cuando el ángulo de menor a mayor se mueve  
\* la razón  $\frac{BC}{AC}$  van aumentando conforme se mueva el ángulo de menor a mayor

Figura 7: Solución actividad 2.2

## Conclusiones

El objetivo general de esta investigación fue diseñar una estrategia didáctica apoyada con el software GeoGebra y el modelo de Van Hiele para el desarrollo de las habilidades específicas de las razones trigonométricas, de estudiantes de noveno año del Liceo Rural Gavilán Vesta. Al finalizar esta investigación se obtiene una estrategia didáctica dirigida a estudiantes y otra para docentes, ambas cuentan con el apoyo de 6 archivos elaborados en el programa GeoGebra, y en particular la estrategia dirigida a docentes cuenta con indicaciones sobre el modelo de Van Hiele para orientar la mediación pedagógica.

Por lo cual, podemos asegurar que se cumple el objetivo general del presente estudio, además de que es factible aplicar las TIC en las aulas del Liceo Rural Gavilán Vesta con fines educativos, aunque esto conlleve un mayor esfuerzo en el planeamiento didáctico, en concordancia con Vargas y Gamboa (2013) y MEP (2012). También, se logra desarrollar una estrategia didáctica contextualizada en las necesidades de la comunidad educativa del liceo.

En relación a la prueba diagnóstica se evidencia que los estudiantes presentaron falencias en sus conocimientos previos, tales como desigualdad triangular, ángulos internos, ángulos externos, semejanza y congruencias de triángulos y el teorema de Pitágoras. Por otra parte, con la actividad triángulo equilátero del Manual de GeoGebra (Borbón, 2010, p. 4) se contribuye con el abordaje de los conocimientos previos y se logra introducir al estudiante al uso de GeoGebra.

En relación a las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, estas guiaron la secuencia de las actividades de la estrategia didáctica. En particular, la actividad 1 llamada triángulos rectángulos de la



estrategia didáctica, correspondiente a la fase de información, facilitó a cada estudiante un conjunto de conocimientos básicos necesarios para dar inicio al estudio de las razones trigonométricas, tales como, el triángulo, segmento, punto, distancia, ángulo y cateto. Por otro lado, la actividad 2 de la estrategia, referente a la fase orientación dirigida, propicio las relaciones necesarias para pasar del nivel 1 al nivel 2 de razonamiento, según el modelo de Van Hiele.

En cuanto a los niveles de razonamiento, al implementar estrategia didáctica se logró diagnosticar que los estudiantes, se encuentran en un nivel 1 de razonamiento según el modelo de Van Hiele, de acuerdo a los siguientes casos: describen los elementos y las propiedades de los triángulos rectángulos e identifican los ángulos internos, identifican las tres razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las describen como “cocientes” entre los lados del triángulo rectángulo y describen lo que observan en la pantalla.

De modo que, los procesos matemáticos del modelo de Van Hiele detectados en las respuestas de los estudiantes enfatizan el razonamiento sobre conceptos básicos, consideraciones visuales, descripción de propiedades y elementos físicos de los objetos relacionados con las razones trigonométricas, y no hay procesos de demostración (Algarín y Fiallo, 2014).

Por otro lado, se concluye que, al aplicar la estrategia didáctica apoyada en el modelo de Van Hiele, se incentivó los procesos matemáticos de razonar y argumentar, comunicar, conectar y representar propuestos por el MEP (2012, p. 24), ya se permitió a las personas participantes expresar sus ideas y argumentos de forma oral o escrita, trabajar en grupo, y evacuar entre ellos sus propias inquietudes.

En cuanto a las vivencias de los estudiantes, la estrategia propició el interés en los colegas, el cual es una condición importante para que surja la comprensión sobre un determinado tema (Van Hiele, 1957, p. 30), por ejemplo, al descubrir que las razones trigonométricas permanecen constantes a pesar de que el tamaño de los triángulos ha variado considerablemente, ya que para ellos esta situación es una contradicción, y suelen preguntarse ¿por qué si los lados de los triángulos son tan grandes siguen saliendo los mismos valores para las razones?.

## Recomendaciones

Las personas docentes, que deseen aplicar la estrategia didáctica diseñada en esta investigación, deben conocer y profundizar en el modelo de Van Hiele, para tener claro las ideas generales, las fases de aprendizaje y los niveles de razonamiento del modelo, y obtener un mejor aprovechamiento del proceso.

Se recomienda aplicar esta estrategia didáctica en las diversas instituciones que cuente con la asistencia de la FOD, por ejemplo, REMA, tecnologías móviles en centros educativos indígenas, entre otros. Sin embargo, si algún docente desea adaptar la estrategia didáctica apoyada en el uso de papel y lápiz, deberá modificar las actividades.

El personal docente que desee implementar la estrategia didáctica además deberá estar capacitado en el uso de TIC en las aulas, para poder solucionar cualquier inconveniente que surja en relación a las computadoras o alguna duda del estudiantado.

Al aplicar la estrategia didáctica, es preferible que la persona docente conozca las características básicas del programa GeoGebra.

La estrategia desarrollada en esta investigación puede utilizarse como apoyo para el estudiantado fuera de las lecciones, por ejemplo, trabajo extraclase o trabajo formativo para realizar en el hogar.



Se recomienda continuar aplicando la estrategia didáctica en ambientes de aulas donde estén presentes más estudiantes, por ejemplo, en grupos de 20 a 30 estudiantes.

El docente debe enfatizar el uso correcto del lenguaje, ya que este proporciona los elementos necesarios para generar los procesos descripción, definición y demostración (Van Hiele, 1957, p. 29).

Un aspecto del modelo de Van Hiele, que no se abordó en este proyecto fue la evaluación, lo cual puede ser utilizado en futuras investigaciones para profundizar el estudio de las razones trigonométricas apoyado en el modelo de Van Hiele.

Como comentario final, a pesar de que hubo algunas limitaciones, principalmente en la aplicación de la unidad diseñada, se debe mencionar que los estudiantes se notaban más motivados con la modificación de la metodología tradicional, es decir, aunque las dificultades estén presentes vale la pena apoyar el proceso de aprendizaje de los y las estudiantes, principalmente en territorios que históricamente han sido marginados por la sociedad.

### Referencias bibliográficas

Algarín Torres, D., y Fiallo Leal, J. (2014). Descriptores de los procesos de descripción, definición y demostración para los niveles de Van Hiele cuando se estudian las razones trigonométricas. *Uni-Pluri/Versidad*, 14(1), 42-52.

Borbón. (2010). Manual para GeoGebra: Guías para geometría dinámica, animaciones y deslizadores. *Revista Digital Matemática Educación e Internet*.

Fundación Omar Dengo. (2013). Acerca de REMA (Redes Mviles para el Aprendizaje). Obtenido de [www.fod.ac.cr](http://www.fod.ac.cr):  
[http://www.fod.ac.cr/rema/index.php?option=com\\_content&view=article&id=10&Itemid=106](http://www.fod.ac.cr/rema/index.php?option=com_content&view=article&id=10&Itemid=106)

Gutiérrez, A., y Fiallo, J. (2009). Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD. *Geometría dinámica*, 147-171.

Hernández, Fernández y Baptista. (2014). *Metodología de la Investigación*. México.: McGraw-Hill.

Jaime y Gutiérrez. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática*, 295-384. Obtenido de [www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf](http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf)

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programas de Estudio en Matemáticas.

Rodríguez, M. (2017) Estrategia didáctica apoyada en GeoGebra y el modelo de Van Hiele para la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas. Tesis de Licenciatura. UNED

Rodríguez, M. y Trigueros, E. (2016). Implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de razones trigonométricas, apoyada en el software GeoGebra y el modelo de Van Hiele. X festival de matemática, 92-101

Van Hiele. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares con el aprendizaje de la geometría)*. (Gutierrez , & otros, Trads.) Universidad de Utrecht, Utrecht.

Vargas Vargas, G. y Gamboa Araya, R. (2013). La enseñanza del teorema de pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del geogebra, según el modelo de Van Hiele. *UNICIENCIA*, 27(1), 95-118.