Conjuntos numéricos, un enfoque ontosemiótico

Bach. Freddy Ulate Agüero
Tecnológico de Costa Rica
freddy5594@gmail.com

Resumen: Se presenta un análisis sobre la Teoría de conjuntos numéricos abarcada a nivel de décimo año de secundaria en la educación costarricense. Se propone una manera de introducir el tema desde una visión ontológica-semiótica que permita la reflexión de los distintos significados de conjuntos numéricos finitos e infinitos. El análisis se basa en la noción de sistemas de significado personal e institucional de los objetos matemáticos.

Palabras clave: Configuración didáctica, conjunto numérico, infinito, enfoque ontosemiótico.

Introducción

Uno de los temas introductorios al área de relaciones y álgebra en el nuevo programa de estudios de matemática es el de conjuntos numéricos. Como partes de las habilidades específicas tenemos el analizar, utilizar, representar y determinar uniones, intersecciones, complementos y subconjuntos de números reales de manera gráfica, simbólica y por comprensión (MEP, 2012, pág. 443) con el fin de servir como base para la teoría de funciones.

Sin embargo, podemos plantearnos la pregunta, ¿Entenderá realmente un estudiante el *significado de conjunto* y sus implicaciones e importancia en el área de la matemática? No solamente de forma pragmática como un conjunto de objetos sino de manera abstracta con cuestiones propias del lenguaje matemático tales como pertenencia, subconjunto, existencia de elementos, etc. ¿Será capaz de profundizar concepciones de la teoría de conjuntos, tales como las definiciones de conjunto vacío, conjuntos infinitos y sus particulares representaciones?

En este trabajo, a partir de un episodio de clase introductorio al tema de conjuntos numéricos, se abordan nociones importantes de manera informal que constituyen la base para el estudio y formalización de la teoría conjuntista. Esto desde un *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)* haciendo énfasis en el conjunto de prácticas, configuraciones y significados que abasten dicha rama de la matemática.

Objetivos

***Objetivo general*:** Analizar, desde un punto de vista ontosemiótico, la teoría conjuntista de los números reales abarcada en décimo año.

Objetivos específicos:

- Analizar el sistema de prácticas y significados matemáticos propios de la teoría conjuntista
- Establecer las distintas configuraciones y proceso que abastecen la teoría de conjuntos numéricos

Conocimientos previos

Conjunto de los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.

Marco Teórico

El enfoque ontosemiótico de la de investigación en enseñanza de la matemática (EOS) fue desarrollado en la Universidad de Granada a finales del siglo XIX, como producto de la interacción de investigadores de dicha Universidad con los fundamentos teóricos de la didáctica de la matemática iniciados en Francia. Surge como una necesidad de unificar y clarificar diversas teorías del aprendizaje y enseñanza de la matemática. Se nutre de aportes de diversas disciplinas y tecnologías interesadas en la cognición humana: epistemología, psicología, sociología, semiótica, etc.

El problema central que dio origen al enfoque ontosemiótico fue la incapacidad de dar una respuesta clara y concisa, por parte de teorías como la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) y la Teoría de Campos Conceptuales (TCC) y la Dialéctica Instrumento-Objeto y el Juego de Macros, a la reflexión epistemológica sobre las matemáticas. Dicho problema se plantea de la siguiente manera:

- PE (Problema Epistemológico): ¿Qué es un objeto matemático? ¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, integral, mediana, etc.) en un contexto o marco institucional determinado?
- PC (Problema Ontológico): ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

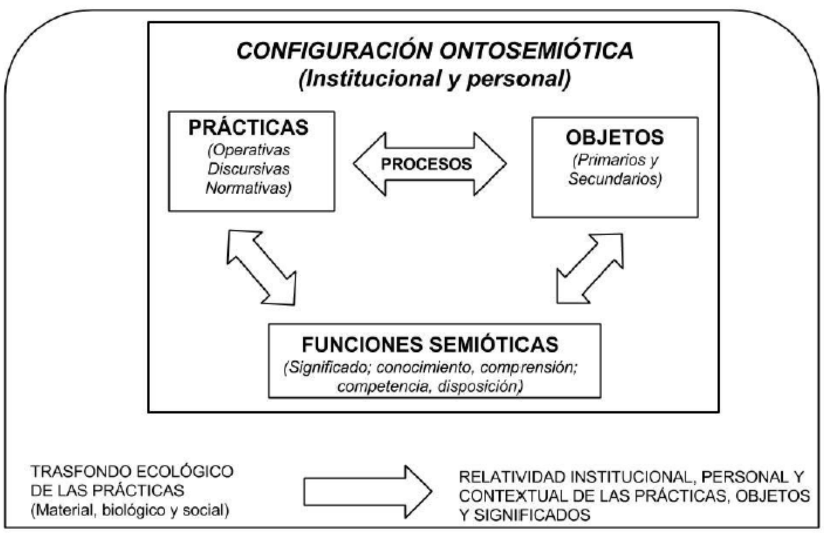


FIGURA 1: Síntesis del EOS (Godino, 2012)

En el afán por sintetizar las teorías antes mencionadas, se vio en la necesidad de comparar, coordinar e integrar bajo un marco inclusivo de herramientas necesarias y suficientes se formuló el problema epistemológico de la didáctica de las matemáticas (PEMD):

Dadas las teorías $T_1, T_2, \cdots, T_n$ enfocadas sobre un mismo problema de enseñanza y aprendizaje de la matemática, ¿Es posible elaborar una teoría T que incluya las herramientas necesarias y suficientes para realizar el trabajo de las T_i?

Las herramientas que integran la EOS se han refinado gradualmente bajo tres etapas donde se modifica ligeramente el objeto de investigación.

En la *primera etapa* se propuso como análisis “los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de la institución) ante una clase de situaciones-problema” (Godino y Batanero, 1994 y 1998).

En la *segunda etapa* se vio la necesidad de elaborar modelos ontológicos y semióticos (de ahí el nombre “Ontosemiótico”) más detallados y completos para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus “producciones”. Se llega a la necesidad de estudiar más a profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistema de signos) y las situaciones-problema. Se busca estudiar los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos en la interacción didáctica (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005)

En la *tercera etapa* el interés se puso en los modelos teóricos sobre la instrucción matemática (Godino, Contreras y Font, 2006) el cual se dividió en 6 dimensiones: epistémica (conocimiento institucional), docente (función del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (recursos instruccionales), cognitiva (significados personales) y afectiva (actitudes y emociones de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas).

Actualmente, las nociones teóricas (o pilares) que componen el enfoque ontosemiótico se clasifican en cinco grupos:

1) ***Sistema de prácticas***: Concebido desde un punto de vista pragmático-antropológico de las matemáticas desde un punto de vista institucional y personal.
2) ***Configuración de objetos y procesos matemáticos***: Analizando la interacción del objeto y su significado (desde sus funciones semióticas) con posiciones realistas de la matemática
3) ***Configuración didáctica***: Sistema de roles del profesorado y los alumnos. Constituye la principal herramienta de análisis de la instrucción matemática. Toma en cuenta los conocimientos institucionales, personales, afectivos y mediacionales (recursos tecnológicos)
4) ***Dimensión normativa***: Conjunto de reglas, hábitos y normas que rigen las prácticas matemáticas y didácticas, mediante el contrato didáctico y las normas socioculturales
5) ***Idoneidad didáctica***: Representan los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. Guía el análisis y la reflexión de las acciones de los agentes educativos.

Además según Godino et al. (2006) ésta expectativa se basa en las nociones de problema matemático, práctica matemática, institución, objeto matemático, función semiótica y las dualidades cognitivas (persona - institución; unitario - sistémico; ostensivo - no ostensivo; extensivo - intensivo; expresión - contenido).

Así se fundamenta como indica Godino y Recio (1998) que el EOS trata de dar una respuesta particular desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, ampliando las investigaciones realizadas hasta la fecha sobre los significados institucionales y personales y completando la idea de función epistemológica y la cognitiva de la matemática asociada.

Episodio de clase

Se incluye a continuación un extracto de una posible conversación profesor-estudiantes que sirva como introducción al tema los conjuntos numéricos, esto desde un contexto de estudiantes de 10mo año, los cuales, han trabajado con diferentes conjuntos numéricos a los largo del ciclo escolar (Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales y Reales). Veamos los posibles conflictos semióticos tanto de los estudiantes como del profesor en torno al tema:

Profesor: ¿Quién me podría dar un ejemplo de conjuntos finitos (o que tienen fin)?

Alumnos: ¿Pueden ser los números uno, dos, tres?

P: Perfecto, ¿Y algún ejemplo de conjunto finitos en la vida real?

A: El conjunto de juguetes, conjunto de mascotas, conjunto de familiares que viven en la casa...

P: Muy bien. Ante todo esto, ¿alguien sabe que es un conjunto?

A: Es un grupo de cosas

P: Llamemos a esas cosas “elementos” ¿Qué sería un conjunto infinito?

A: Un grupo con infinitos elementos

P: ¿Por ejemplo?

A: El conjunto de los números naturales, los números enteros, los racionales, irracionales y los reales

P: Muy bien. ¿Podrían mencionar algún ejemplo de conjuntos infinitos en la vida real?

A: [Los estudiantes se quedan pensando un momento, luego uno de ellos responde]: Las estrellas

P: Los científicos han estimado que en el universo observable hay entre 100.000 trillones a 300.000 trillones de estrellas, ¿Es eso un conjunto infinito?

A: No, pero es un conjunto muy grande

A: [Otro alumno responde] Entonces no existen conjuntos infinitos pues si pensamos por ejemplo en el número de personas en el mundo o los granos de arena en el mar, aunque seas número muy grandes los podremos contar. No serían infinitos.

P: Y sin embargo hablamos de conjuntos infinitos como el conjunto de los números naturales, ¿Por qué?

El profesor continúa la clase explicando y definiendo el concepto de conjunto y conjunto numérico (de acuerdo a lo establecido en el programa de estudios) analizando junto con los estudiantes otras cuestiones tales como:

- ¿Puede un conjunto ser vacío? ¿Qué significa que un conjunto sea vacío?
- ¿Existen los conjuntos infinitos? ¿Cómo entendemos que algo es infinito? ¿Podemos definir tal concepto?
- Supongamos que tenemos un conjunto que tiene todos los conjuntos que no se contienen a sí mismo, este conjunto, ¿Se contiene a sí mismo?

Sistemas de prácticas formales e informales

De acuerdo al enfoque ontosemiótico de la matemática el significado de un objeto matemático es el sistema de prácticas operatorias y discursivas que una persona (una institución, una comunidad de prácticas) realiza para resolver una cierta clase de situaciones problemas en las que dicho objeto interviene mediante diferentes *configuraciones* o interrelaciones de prácticas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos, etc. Veamos cómo se constituyen estos sistemas y como contrastan desde los distintos marcos de referencia formales e informales.

Significados informales

Intuitivamente un conjunto es una colección (clase, agregado, conglomerado, etc.) de objetos, los que pertenecen a (forman parte de, son los elementos de, etc.) el conjunto. Para transmitir diferentes tipos de conjuntos los hacemos mediante:

1. Contadores cardinales y palabras: Podemos denotar los elementos mediante números: 1, 2, 3 de acuerdo a su posición en el conjunto o simplemente enunciándolos verbalmente: "Primero, segundo, tercero..."
2. Características de los elementos: Etiquetas como color (negro, blanco, verde), tamaño (Grande, pequeño), forma (triangular, cuadrada), olor, textura, etc.
3. Ubicación en el espacio, agrupación, patrones

Decimos que un objeto "está en" un conjunto si cumple las características en común con los demás elementos. Comúnmente vemos estos conjuntos como "contenedores" tales como cajas y bolsas. Un "conjunto vacío" lo imaginamos como un contenedor sin objetos y un "conjunto infinito" como un grupo innumerable de cosas del cual ignoramos su final y su número de elementos.

Significados formales

Diversas teorías de axiomáticas conjuntistas han logrado en mayor o menor grado construir proposiciones que modelaran las intuiciones que tenemos de la realidad cuya lista se considere completa, es decir, que todas las propiedades de los objetos se puedan deducir de axiomas. Analizaremos una de ellas, la teoría de Zermelo - Fraenckel desarrollada a partir de los trabajos de E. Zermelo.

- **Símbolos**
    - **Variables:** $\alpha, \beta, x, X, Y, A_1, B_1, \ldots$, en general, letras del alfabeto latino o griego. Se utilizan para denotar conjuntos, elementos y proposiciones.
    - **Signos:** $(,), \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \forall, \exists, |, =, \in, \subseteq$
- **Leyes de Formación**
    - $\boldsymbol{L1}$**:** Toda variable es un elemento.
    - $\boldsymbol{L2}$**:** Si a y b son elementos, entonces $a = b$, $a \in b$ y $a \subseteq b$ son proposiciones.
    - $\boldsymbol{L3}$**:** Si α y β son proposiciones, entonces $\neg a$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ son proposiciones.
    - $\boldsymbol{L4}$**:** Si A y B son conjuntos $\bar{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \triangle B$ son conjuntos
    - $\boldsymbol{L5}$**:** Si α es una proposición y X una variable entonces $(\forall X)(\alpha)$ y $(\exists X)(\alpha)$ son proposiciones.

La definición de *leyes de formación* nos permite establecer medios lingüísticos específicos, técnicas operatorias (unión, intersección, resta), propiedades (pertenencia, subconjunto), argumentaciones (deductivas) propias de los conjuntos numéricos.

- **Axiomas**
  - $\boldsymbol{A1.}$ Axioma de extensionalidad**:** Si todo elemento de A es un elemento de B y todo elemento de B es un elemento de A, entonces A es igual a B.
  - $\boldsymbol{A2.}$ Axioma del conjunto vacío: Existe un conjunto que no contiene ningún elemento.
  - $\boldsymbol{A3.}$ Axioma de separación: Si $P(x)$ es una proposición abierta, y U es un conjunto universo, entonces existe un conjunto A cuyos elementos son aquellos elementos de U que verifican $P(x)$
  - $\boldsymbol{A4.}$ Axioma del Par: Dados don conjuntos A y B existe un conjunto cuyos únicos elementos son son A y B.
  - $\boldsymbol{A5.}$ Axioma de Uniones: Si A es un conjunto, entonces existe un conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de A.
  - $\boldsymbol{A6.}$ Axioma del Conjunto Potencia: Si A es un conjunto, entonces existe el conjunto de todos los subconjuntos de A
  - $\boldsymbol{A7.}$Axioma de Regularidad: Todo conjunto no vacío contiene un elemento con el que no comparte ningún elemento.
  - $\boldsymbol{A8.}$ Axioma de Conjunto Infinito: Existe un conjunto que tiene infinitos elementos.
  - $\boldsymbol{A9.}$ Axioma de Reemplazo: Si $P(x,y)$ es una función proposicional y A es un conjunto, entonces existe el conjunto de elementos b que verifican $P(x,y)$ para algún $a \in A$

En algunos casos el axioma 8 se toma resultado de $\boldsymbol{A2}$ y $\boldsymbol{A5}$. En efecto considere la existencia del conjunto cuyos elementos son $\emptyset$ y todos los conjuntos de conjuntos que tengan este elemento: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right\}, \ldots$ Con esta idea, podemos comunicar a los estudiantes ejemplos de conjuntos infinitos.

Configuraciones de objetos y procesos matemáticos

A nivel de interacciones entre el objeto denominado "conjunto" y su significado tenemos diferentes maneras de expresar lo que se entiende como tal y lo que se pretende sea la normativa de los procesos y prácticas propias de la disciplina. Un conjunto puede ser representado de distintas maneras, particularmente hacemos una distinción en procesos de comunicación entre los conjuntos finitos e infinitos.

<u>Representaciones de conjuntos finitos</u>

Considere el conjunto P: *Los números pares menores que diez*

- **Verbal:** Texto que representa el conjunto mediante el lenguaje literal. La representación verbal de P sería: Cero, dos, cuatro, seis, ocho.

- **Diagramas:** Son representaciones gráficas. Por ejemplo, la figura de la derecha representa el diagrama del conjunto P.
- **Por extensión:** Se nombra cada uno de sus elementos o una parte de ellos. P se denotaría por extensión así: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
- **Por comprensión:** Se da la propiedad que caracteriza todos sus elementos. En el paso de P: $\{x \mid x \text{ es par } \wedge x < 10\}$

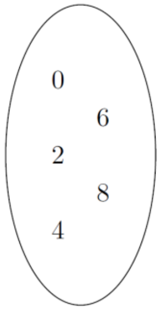


FIGURA 2: Diagrama del conjunto P

Representaciones de conjuntos infinitos

Estos tipos de representaciones son propias de los conjuntos infinitos. Principalmente de subconjuntos de los números reales.

Considere el conjunto Q: *Los números mayores que cero.*

- **Simbólica:** Se nombra mediante caracteres propios de la simbología matemática En el caso de Q tenemos el símbolo: $\mathbb{R}^+$
- **Intervalo:** Se utilizan corchetes o paréntesis. Pueden ser abiertos, cerrados, semiabiertos e ilimitados. Por ejemplo el conjunto Q se representa mediante intervalos de la siguiente manera: $]0, +\infty[$
- **Gráficamente:** Se representan mediante un segmento de la recta real. La figura de abajo muestra el conjunto Q representado en la recta real.

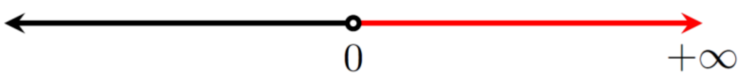


FIGURA 3: Gráfico del conjunto Q

Estas representaciones de conjuntos no son excluyentes. Es decir, algunos conjuntos infinitos pueden representarse también por extensión y comprensión. Por ejemplo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Note que existe una diferencia de procesos y configuraciones en la transmisión del saber de conjuntos numéricos finitos vs infinitos. Debido a la densidad del conjunto de los números reales, se dificulta la representación mediante diagramas (en el caso de los diagramas de Venn) o por extensión. También hay una diferencia semántica e interpretativa cuando decimos "Conjuntos numéricos mayores que cero" y "El conjunto de números mayores que cero". Este último se entiende como el mayor conjunto que cuyos elementos sean positivos.

Configuraciones Didácticas

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema vemos el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones - problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en cada configuración (Font y Godino, 2006, p. 69).

Breve reseña de los conjuntos numéricos

En esta sección se hará un mención del surgimiento de los distintos conjuntos numéricos desde un enfoque praxiológico (no exhaustivo) con el fin de analizar los distintos objetos matemáticos propios de cada configuración.

- **Naturales** $\mathbb{N}$: El hombre primitivo utilizó los números naturales como una necesidad de establecer orden y para realizar cálculos aritméticos como sumas y multiplicaciones. Las nomenclaturas de los sistemas de numeración variaban de acuerdo a cada cultura los conjuntos de símbolos y su orden era sumamente importante para escribir los distintos números. Por ejemplo, en la figura 4 vemos diferentes representaciones numéricas de acuerdo a la base de cada sistema.

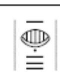
Sistema	Representación	Justificación
Romano	MMXVI	$1000 + 1000 + 10 + 6$
Babilonio		$33 \cdot 60^1 + 36 \cdot 60^0$
Griego	$'\beta\iota\varsigma$	$2000 + 10 + 6$
Maya		$5 \cdot 20^2 + 0 \cdot 20^1 + 16 \cdot 20^0$

FIGURA 4: Representación del número 2016 en diferentes sistemas numéricos

Es importante destacar también el aporte hecho por el matemático Giuseppe Peano en el siglo XIX para definir de manera axiomática conjunto de los números naturales mediante los denominados *Axiomas de Peano*.

- **Enteros** $\mathbb{Z}$: Era conocido como el conjunto de los números deudos o absurdos. Las primeras expresiones datan del siglo V, en Oriente. En China, los números enteros negativos se escribían en color rojo a diferencia de los positivos (escritos con color negro). Surgen ante la imposibilidad de realizar operaciones como $3 - 5$. Sus primeras aplicaciones fueron en balances contables para expresar cantidades adeudadas.

- **Racionales** $\mathbb{Q}$: Son producto de la necesidad de resolver ciertas divisiones donde que no eran posibles de solucionar en el conjunto de los números enteros, por ejemplo, $3 \div 2$. En el Papiro de Ahmes se encuentras escritos 87 problemas que tratan con situaciones aritméticas, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, reparto de proporciones, ecuaciones lineales y trigonometría.

- **Irracionales** $\mathbb{I}$**:** Su descubrimiento se atribuye a Pitágoras de Samos (580 - 500 a.C.) como necesidad a la medición de cantidades denominadas *inconmensurables* pues su medida en dicho sistema no es un número fraccionario. Por ejemplo, determinar la diagonal de un cuadrado de lado 1, es decir, de acuerdo al teorema de pitágoras, un número que cumpla la ecuación $x^2 = 2$. Más adelante se añaden al conjunto número trascendentes como π, e, φ

- **Reales** $\mathbb{R}$: Incluye tanto a los números Racionales como Irracionales. Su sistematización y construcción fue establecida en el siglo XIX proveniente del estudio riguroso hecho por dos matemáticos en diferentes áreas: La teoría de conjuntos de George Cantor y el análisis matemático de Dedekind. Se resaltan una serie de axiomas que son la base de este conjunto: axiomas de cuerpo, de orden y de completitud.

Conjuntos numéricos como distintas configuraciones

De acuerdo con Godino (2009) existen seis tipos de entidades primarias que amplían la tradicional separación de conceptos y procedimientos del saber matemático, las cuales constituyen la base de las distintas configuraciones de la práctica, las cuales son:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- Situaciones - problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)
- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...)

Es interesante que conforme se va evolucionando el concepto de conjunto numérico se constatan estas distintas entidades primarias. Considere por ejemplo el primer conjunto numérico: los Números Naturales (Configuración 1). Su base se encuentra en los distintos sistemas de numeración (Configuración 0). Los elementos lingüísticos y las notaciones varían totalmente de acuerdo al marco institucional (cultura) y los contextos de uso en el que nos posicionamos. Los mayas (para citar un caso) fueron los primeros en incorporar en su sistema el número cero. Esto constituye no solo una variante semántica, sino también un modo de accionar distinto en la manera procedimental en las situaciones-problema. Muchas de las dificultades de otros sistemas numéricos a nivel pragmático y operacional provenían a causa de la ausencia de un "elemento nulo".

Los distintos procedimientos se deben destacar también en cada configuración. Por ejemplo el surgimiento secuencial de los conjuntos Enteros, Racionales e Irracional se debe a un problema procedimental en lo más básico de la matemática: La aritmética. Las dificultades de expresar resultados de operaciones como resta, división y potenciación (respectivamente) dieron hincapié al surgimiento de elementos en los conjuntos que se consideraban extraños desde los significados personales pero que parecían necesarios a nivel de significados institucionales.

En algunos casos la separación entre distintas configuraciones es una distancia abismal (como el caso de los objetos que componen los números racionales vs irracionales). Esto pues los significados, las prácticas operatorias (algorítmicas y de cálculo), la institucionalización del saber y la materialización del conocimiento evocan una ruptura del modelo tradicional.

En la *figura 5* se muestran como los distintos significados de los conjuntos numéricos se interrelacionan dando origen a distintas configuraciones cuyas prácticas e instrumentación varían de acuerdo a cada cultura y enfoque ya sea de manera formal o informal. Estas correlaciones dan origen a diferentes objetos del tipo “conjunto numérico”.

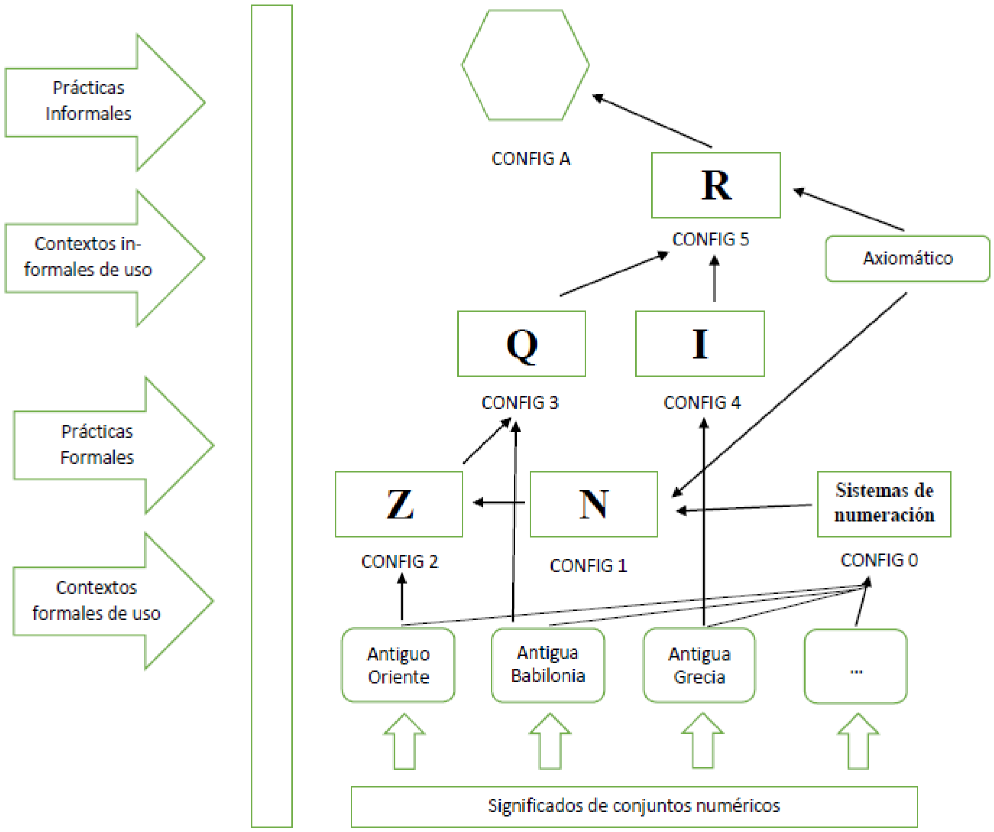


FIGURA 5: Pluralidad de configuraciones para el significado de los conjuntos numéricos

Conclusión

El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática en definitiva muestra ser una perspectiva integral para el entendimiento del fenómeno didáctico desde un punto de vista epistemológico y ontológico. Analiza fenómenos carentes en otras teorías del aprendizaje y brinda un entendimiento profundo, a nivel cognitivo, de lo que se conoce como matemática. Su estudio permite comprender cuán importante es el significado de los objetos matemáticos así como su instauración desde un contexto dado.

La utilización de distintas configuraciones de objetos y procesos matemáticos es fundamental si queremos pasar de un saber-sabio a un saber-enseñado. El uso de diferentes significantes (tanto representaciones visuales como sintácticas) permite al estudiante profundizar el entendimiento del concepto de conjunto, además de ser algo previsto y necesario enmarcado en la dimensión didáctica.

La formalización matemática brinda una base para entender las dificultades de establecer significados personales tales como la construcción y existencia de conjuntos infinitos. Si bien es cierto, desde un punto de vista de funciones semióticas y prácticas operativas es algo difícil de aplicar no tiene por qué de serlo así desde una idealización del conocimiento institucional. La matemática permite la construcción de conceptos cuyo sentido cognitivo proviene de un conjunto de prácticas argumentativas más que de prácticas aplicativas, aunque eso no excluye que tengan una implicación pragmática.

Anexos

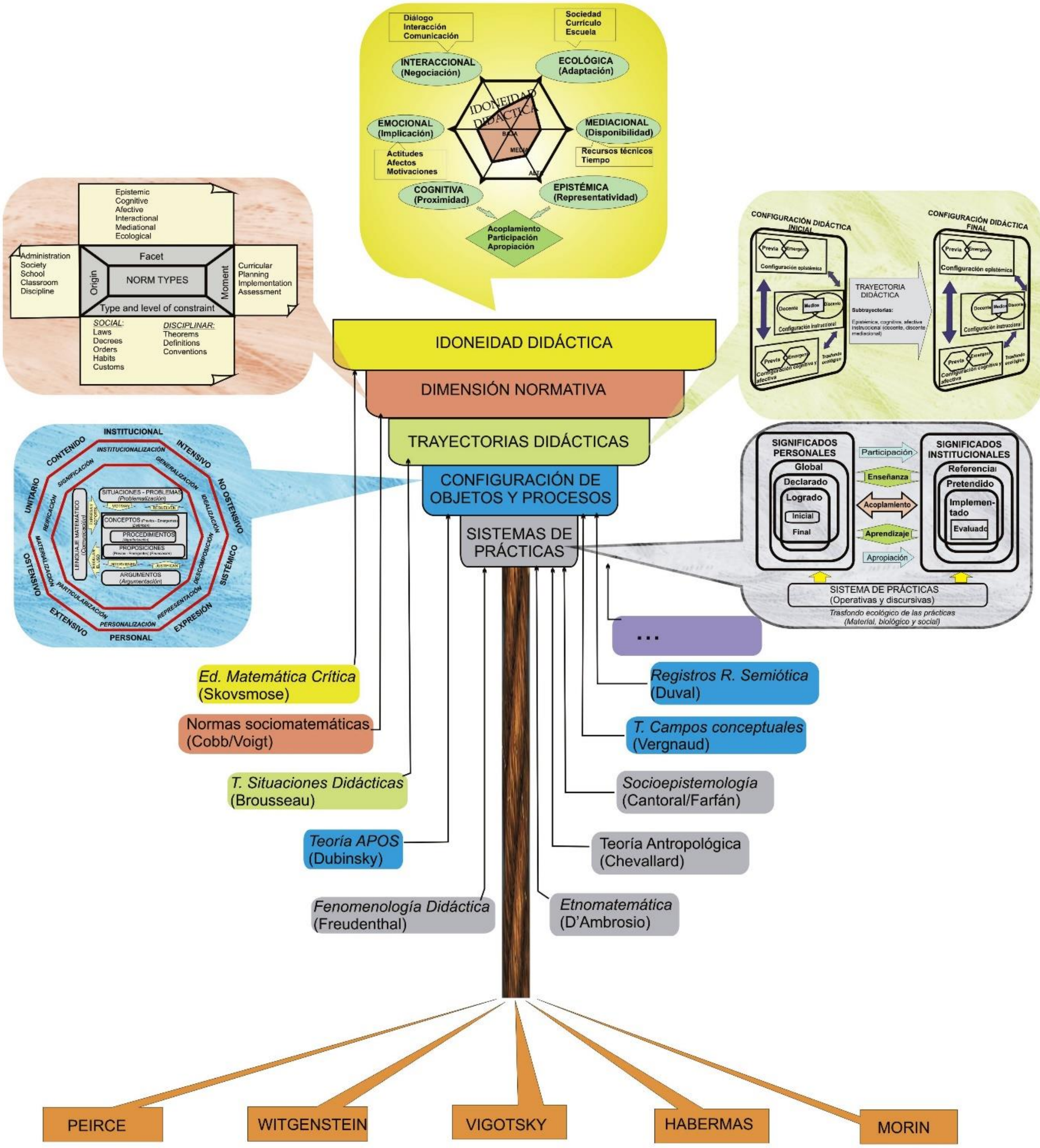


FIGURA 6: Poster alusivo al enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: Teorías y supuestos que lo abastecen

Referencias bibliográficas

Godino, J.D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. Springer-Verlag. 1993. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Disponible en http://enfoqueontosemitico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf

Santilla. (2015). Matemática 10. San José, Costa Rica: Editorial Santillana.

Ivorra, C. (2015). La Axiomática de la Teoría de Conjuntos. Consultado el 5 de Junio de 2017 en el sitio web: http://www.uv.es/=ivorra/Libros/Axiomas.pdf

Renato, A. (sf). Teoría Axiomática de Conjuntos Versión Preliminar. Consultado el 5 de Junio de 2017 en el sitio web: https://upaep.blackboard.com/bbcswebdav/users/isanchez/Prealgebra/Conjuntos\%20R.A.\%20Lewin.pdf

Veldez, V. (2008). Los conjuntos numéricos a través de la historia. Tesis para optar por el título de Profesor de matemática. Buenos Aires, Argentina. Consultado el 5 de Junio de 2017 del sitio web: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2779665.pdf